

Об одной мере близости плоских изображений, инвариантной относительно подобия

В.Н. Козлов

Введение

Под изображением в этой работе понимается конечное (непустое) множество точек на плоскости. Такое представление об изображении может показаться искусственным, отвлеченным от того, чем являются реальные изображения. Тем не менее многие реальные изображения — газетные фотографии, распечатки матричного принтера, картинки на экране черно-белого телевизора — представляют собой совокупности точек. Любое реальное черно-белое изображение может быть «аппроксимировано» изображением из точек, с передачей различной плотностью точек в разных частях изображения всех градаций серого цвета. В какой-то мере черно-белый телевизор можно рассматривать как техническое устройство, которое выполняет такого рода аппроксимацию. Представление об изображении как о совокупности точек не закрывает дорогу и к работе с цветными изображениями: рассмотрение трех монохроматических (в основных цветах) изображений эквивалентно рассмотрению цветного изображения. Наконец, все, что мы видим, мы видим посредством глаз. Изображение из среды просецируется на сетчатку глаз, что приводит к возбуждению части рецепторных клеток сетчатки, то есть, в конечном счете, к формированию на сетчатке составленного из точек изображения. Именно оно и анализируется в последующем мозгом.

[22] Дискриминантная геометрия / Уильямс Л. М., Бейли М. М., Бейли М. М., Бейли М. М. / Уильямс Л. М., Бейли М. М., Бейли М. М., Бейли М. М. М.: Мир, 1988.

[23] Коппель, Корнел Е. Элементы геометрии. М.: Мир, 1980.

[24] Бейли М., Коппель Е. Уильямс Л. М.: Мир, 1988.

Дастар З.

Системы линейных преобразований

МЭТЭС ХАТРИНХ СИСТЕМ

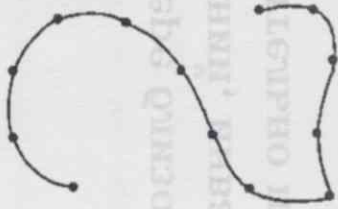


Рис. 1.

Под образами в этой работе имеются в виду зрительные образы. Определение зрительного образа нет, и на практике образ задается перечислением примеров изображений, в него входящих. Тем самым можно полагать, что образ — это множество примеров изображений (потенциально бесконечное), объединяемых в одну группу по трудноформализуемому критерию. Обычно говорят, что изображения одного образа «похожи», они «одной формы», одинаковы в своей «сущности», и пр. За этим должны стоять какие-то алгоритмы, позволяющие делать такие суждения. Попытаемся по шагам проследить те правила, которые можно положить в основу формальных критериев объединения изображений в группы, с тем, чтобы они (эти группы) в как можно большей степени удовлетворяли бы интуитивным представлениям о зрительном образе.

Возьмем в качестве примера изображение цифры два (рис. 1). Обозначим его через A . Это — конкретное множество точек на плоскости. Ясно, что если это множество как целое движениями — параллельными переносами, поворотами — переместить по плоскости, то оно своей «сущности», своей «формы» не изменит, то есть останется все тем же изображением цифры два. Поэтому на этом первом шаге мы сформируем группу изображений, которые можно получить из рисунка 1 произвольными изометрическими преобразованиями — параллельными переносами, поворотами, преобразованиями симметрии и их комбинациями.

Конечно, этого далеко не достаточно, и сформированную группу изображений никак нельзя считать эквивалентом образа цифры два. Это следует хотя бы из того, что содержательно «двойкой» будет признаваться и рисунок 1, увеличенный или уменьшенный в размерах. Поэтому на следующем шаге к изометрическим преобразованиям добавим возможность менять размеры изображения (с сохранением подобия), то есть будем рассматривать все, что можно получить из рисунка 1 преобразованиями подобия.

Наконец, добавление возможности растягивать или сжимать рисунок 1 по произвольному направлению приводит нас к аффинным преобразованиям в целом. Ранее [1, 2] был предложен код, позволяющий описывать любое изображение, получаемое из данного произвольным аффинным преобразованием, и только такие изображения. В этом смысле код — эквивалент группы (континуальной по мощности) изображений, получаемых из данного изображения произвольными аффинными преобразованиями.

К необходимости рассматривать изображение с точностью до аффинных его преобразований можно подойти и по-другому, из анализа условий, в которых происходит работа глаза. Если сетчатку глаза представлять как плоскость, на которую проецируются объекты перед глазом, то, при определенных допущениях и в некоторых границах [1, 2], произвольные перемещения объекта перед глазом (приближения — удаления, повороты и т.д.) приведут к аффинным трансформациям его проекции на сетчатку. То же имеет место и при перемещениях глаза по отношению к объекту, что происходит практически непрерывно из-за движений, микроизменений позы, тремора и пр. Поэтому для того, чтобы объект при таких перемещениях воспринимался как один и тот же, изображение на сетчатке должно восприниматься (по крайней мере в определенных случаях) с точностью до аффинных преобразований.

Тем не менее множество изображений, получаемых из изображения A произвольными аффинными преобразованиями — это еще, конечно, далеко не то, что содержательно понимается под образом. Суть в том, что в реальности для изображений одного образа допускаются локальные изменения формы, можно сказать, что образ

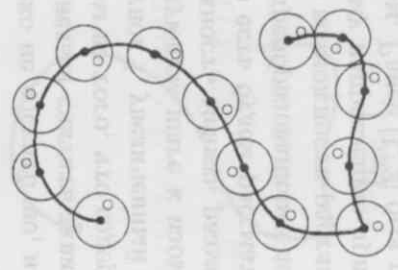


Рис. 2.

«инвариантен» к локальным изменениям во взаиморасположении точек изображения. Поэтому очередной шаг [3, 4] в приближении к понятию образа делается по следующей схеме. Положим, что каждая точка изображения «двойки» есть центр круга радиуса r (рис. 2). Возьмем теперь в каждом круге по точке (кружочки на рис. 2). Изображение из кружочков обозначим через A' . Фигуры A и A' состоят из одинакового числа точек. Различие в форме этих фигур — это различие во взаиморасположении этих точек. Характеристикой этого различия выступает величина r . Взяв другие точки в кругах радиуса r , получим другое изображение. Множество всех таким образом получаемых изображений обозначим через A'' . В качестве очередного приближения к понятию образа рассматривается множество J_A — все изображения, получаемые из изображений множества A'' изометрическими преобразованиями.

Для каждого изображения из J_A известно (по построению J_A), что его можно изометрическими преобразованиями так расположить на плоскости, что каждая его точка окажется на расстоянии не больше r от некоторой точки изображения A (называем это искомым взаиморасположением). Однако для произвольного изображения B априори не известно, можно ли это сделать. Встает вопрос: как взаиморасположить A и произвольное B искомым образом, и ка-

ким при этом будет минимально возможный радиус r ? Ясно, что эту задачу нельзя решать перебором — множество взаиморасположений двух изображений континуально по мощности. Задача должна решаться конечной процедурой — под этим понимается здесь решение геометрическим построением или сведением к решению некоторых систем уравнений. Можно выразиться так, что решение должно быть технологичным по характеру.

Эта задача рассматривалась в [3, 4]. Эти рассмотрения недостаточны, если иметь в виду то, что на практике изображения могут различаться по размерам. Поскольку в целом эта работа ориентирована на применение в конечном счете к реальному распознаванию образов, то такого рода различия должны быть учтены в решении. Поэтому здесь рассматривается та же задача, но вместо изометрических преобразований рассматривается более широкий класс — преобразования подобия.

1. Сведение задачи к решению систем уравнений

Пусть изображение A состоит из точек a_1, \dots, a_n ($n \geq 1$), изображение B — из точек b_1, \dots, b_n , причем никакие две точки в каждом из изображений не совпадают. Сразу исключаем из рассмотрения тривиальный случай, когда A и B переводятся друг в друга преобразованиями подобия. Следовательно, $n \geq 3$.

Рассмотрим некоторое взаимно однозначное соответствие ψ между точками изображений A и B . Без ограничения общности можем полагать, что этим соответствием точке a_i сопоставляется точка b_i ($i = 1, \dots, n$).

Назовем сокращенными преобразованиями подобия преобразования параллельного переноса, поворота, изменения масштаба (с коэффициентом подобия $k > 0$) и их комбинации, то есть преобразования подобия без симметрии относительно прямой. Пусть A^* и B^* — множества всех изображений, получаемых из A и B сокращенными

преобразованными подобия. Если $A' \in A^*$, то через a'_i обозначаем точку из A' , в которую переходит при соответствующем преобразовании точка a_i из A ($i = 1, \dots, n$). Аналогично трактуется обозначение точки b'_i из B' , где $B' \in B^*$. Точки a'_i и b'_i называем соответствующими, соответствующими называем и отрезки $(a'_i a'_j)$ и $(b'_i b'_j)$ ($i, j = 1, \dots, n, i \neq j$).

Рассмотрим бинарное отношение Q на декартовом произведении $A^* \times B^*$: пары (A_1, B_1) и (A_2, B_2) из $A^* \times B^*$ находятся в отношении Q , если пара (A_1, B_1) как целое переводится сокращенным преобразованием подобия в пару (A_2, B_2) . По этому отношению $A^* \times B^*$ разбивается на множество классов эквивалентности. Изображения во всех парах из одного такого класса можно, очевидно, трактовать как расположенные одинаково по отношению друг к другу. В качестве числовой характеристики взаимодальности точек изображений в некоторой паре (A', B') возьмем длину наибольшего из отрезков $(a'_i b'_i)$ ($i = 1, \dots, n$), отнесенную к длине заранее выделенного отрезка между парой точек на изображении либо A' , либо B' . Будем для определенности полагать, что этот выделенный отрезок обозначается двумя точками a_u и a_v на A (и, следовательно, точками a'_u и a'_v на A'). Содержательно это означает, что мы берем наибольший по длине отрезок между соответствующими точками пары изображений (A', B') , причем в качестве масштабной единицы при измерении его длины используем отрезок $(a'_u a'_v)$. Очевидно, что эта характеристика одинакова для всех пар изображений из одного класса эквивалентности разбиения Q^* .

Введем понятие угла φ между изображениями в паре (A, B) . Для этой цели зафиксируем в изображениях A и B пары отрезков $(a_p a_q)$ ($p \neq q$), и соответственно $(b_p b_q)$. В качестве угла φ выберем угол, образованный этими отрезками (или их продолжениями). Для произвольной пары изображений (A', B') из $A^* \times B^*$ угол φ между ними есть угол между соответствующими отрезками $(a'_p a'_q)$ и $(b'_p b'_q)$ или их продолжениями. Без ограничения общности можно полагать, что у исходных изображений A и B отрезки $(a_p a_q)$ и $(b_p b_q)$ параллельны и угол φ равен нулю, а для всех пар из $A^* \times B^*$ этот угол находится

в промежутке от 0 до 2π .

Отметим, что для всех пар изображений из одного класса эквивалентности в Q^* угол φ между изображениями один и тот же.

Разбиению Q^* можно дать наглядную интерпретацию, на которую в дальнейших рассуждениях удобно ориентироваться. Возьмем в каждом классе эквивалентности пару (очевидно, единственную), у которой первым элементом является исходное изображение A . Тогда получающееся множество пар представится как «неподвижное» изображение A и всеми возможными способами (конечно, из числа сокращенных преобразований подобия) трансформируемое изображение B . Каждое такое трансформированное B' охарактеризуем в отношении исходного изображения B парой параметров (φ, k) : здесь φ — угол между B' и A , и k — коэффициент подобия (то есть отношение любой пары соответствующих отрезков из B' и B). При этом B' — единственное изображение с фиксированной парой (φ, k) параметров. Однако если обозначить через $\{B'\}$ множество всех таких изображений, то состоит оно, нетрудно видеть, из изображений, переводимых друг в друга преобразованиями параллельного переноса. Как следует из ранее полученных результатов [3, 4], существует и единственно изображение $B'' \in \{B'\}$, на котором достигается минимум взаимодальности изображения A и изображений из $\{B'\}$. Этот минимум — обозначим его через $\tau(\varphi, k)$ — представляется тем самым как функция от пары (φ, k) параметров. Далее вопрос сводится к тому, чтобы определить минимум величин $\tau(\varphi, k)$ при всех возможных углах φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) и всех коэффициентах подобия k ($k > 0$) и найти расположение соответствующим образом трансформированного изображения B относительно изображения A . Пару (φ_0, k_0) , на которой достигается минимум для $\tau(\varphi, k)$, будем называть искомой, состоит она из искомого угла φ_0 и искомого коэффициента подобия k_0 . Величину $\tau(\varphi_0, k_0)$ будем обозначать через τ_0 и называть минимальной взаимодальностью точек изображений A и B (при заданной биекции ψ), изображения во всех парах (A', B') из $A^* \times B^*$ со взаимодальностью, равной τ_0^ψ (искомых парах), будем называть взаиморасположенными искомым образом. При «фиксиро-

ванном» изображении A это значит, что нужно найти $B_0 \in V^*$ такое, что в паре (A, B_0) изображения расположены искомым образом.

Рассмотрим пару (A, B') , где $B' \in V^*$, и построим для этой пары изображение C , которое назовем характеристическим [3, 4]. Оно состоит из точки O и точек c_1, \dots, c_n , называемых соответственно центром и точками ядра. В качестве O берется произвольная точка на плоскости. Затем параллельным переносом отрезка $(a_i b'_i)$ ($i = 1, \dots, n$) совмещаем точку a_i с точкой O . Точку, в которую переходит при этом b'_i , обозначаем через c_i . Отметим, что некоторые из точек характеристического изображения могут при таком построении совместиться (слиться), и в этом смысле C называем особым изображением.

Возьмем две точки c_i и c_j ($i \neq j, i, j = 1, \dots, n$) из характеристического изображения C . Из рассмотренных в [3, 4] следует, что если параллельными переносами отрезков $(a_i a_j)$ и $(b'_i b'_j)$ совместить точку a_j с c_i , и точку b'_j с c_j , то точки a_i и b'_i совместятся в одну точку, обозначим ее через c_{ij} . При заданных изображениях A и B' тем самым, стороны $(c_i c_j)$, $(c_j c_{ij})$ и угол между этими сторонами в треугольнике $c_i c_j c_{ij}$ — обозначим его через α_{ij} — можно считать известными. Следовательно, может быть получена и длина отрезка $(c_i c_j)$:

$$(c_i c_j)^2 = (a_i a_j)^2 + (b'_i b'_j)^2 - 2(a_i a_j)(b'_i b'_j) \cos \alpha_{ij}.$$

Поскольку угол α_{ij} зависит от угла φ между изображениями A и B' и величина $(b'_i b'_j)$ зависит от коэффициента подобия k , то длина отрезка $(c_i c_j)$ есть функция от величин пары (φ, k) .

Из формулы для длины отрезка $(c_i c_j)$ следует, что она равна нулю, то есть точки c_i и c_j слиты в одну, только при равенстве отрезков $(a_i a_j)$ и $(b'_i b'_j)$ и их параллельности, поскольку угол α_{ij} тоже должен быть равен нулю. Следовательно, существует лишь конечное множество пар (φ, k) , при которых это может иметь место. Обозначим это множество через U_1 . В дальнейших рассуждениях исходим из предположения, что уже никакие две точки ядра не слиты в одну.

Окружность минимального по радиусу круга, включающего все точки ядра, называем ключевой окружностью. Таким образом, ка-

ждая из точек c_1, \dots, c_n лежит либо на ключевой окружности, либо внутри круга. Такая окружность при заданном конечном множестве точек существует и единственна. Из [3, 4] следует, что для искомого пары (A, B_0) центр характеристического изображения должен совпадать с центром ключевой окружности.

Положим, что мы имеем искомую пару (A, B_0) изображений. Далее априори возможны три случая: на ключевой окружности находятся соответственно две, три и больше трех точек.

Первый случай. Этот случай при подобных преобразованиях невозможен. Действительно, положим, что это не так. Тогда точки c_{i_1} и c_{i_2} ($i_1, i_2 \in (1, \dots, n)$) на ключевой окружности должны быть концами ее диаметра. Но тогда отрезки $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$ должны быть параллельны и угол между ними должен быть равен нулю, ибо в противном случае всегда возможен поворот изображения B_0 , уменьшающий длину отрезка $(c_{i_1} c_{i_2})$. При $\alpha_{i_1 i_2} = 0$ длина отрезка $(c_{i_1} c_{i_2})$ равна модулю разности длин отрезков $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$. Это значит, что $(c_{i_1} c_{i_2})$ всегда можно уменьшить увеличением или уменьшением изображения B_0 в размерах, что противоречит предположению о том, что пара (A, B_0) — искомая.

Второй случай. Пусть на ключевой окружности находятся три точки $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}$ ($i_1, i_2, i_3 \in (1, \dots, n)$). Треугольник с вершинами в этих точках должен быть либо остроугольным, либо прямоугольным.

Пусть для начала этот треугольник остроугольный. Отрезки $(a_{i_1} b_{i_1}^0)$, $(a_{i_2} b_{i_2}^0)$, $(a_{i_3} b_{i_3}^0)$ условимся считать направленными с направлением для всех трех отрезков либо от a_{i_j} к $b_{i_j}^0$ ($j = 1, 2, 3$), либо наоборот. Пусть для определенности отрезки направлены от a_{i_j} к $b_{i_j}^0$, и значит, они параллельны, однонаправлены и равны с соответствующими радиусами $(O c_{i_j})$ на ключевой окружности (рис. 3).

Будем рассматривать направленные прямые L_1, L_2, L_3 , на которых лежат отрезки соответственно $(a_{i_1} b_{i_1}^0)$, $(a_{i_2} b_{i_2}^0)$, $(a_{i_3} b_{i_3}^0)$ и которые по направлению все либо совпадают с направлениями лежащих на них отрезков, либо противоположны им. Будем для определенности полагать, что направления прямых совпадают с направлениями отрезков. В [3, 4] доказано, что прямые L_1, L_2, L_3 должны пересе-

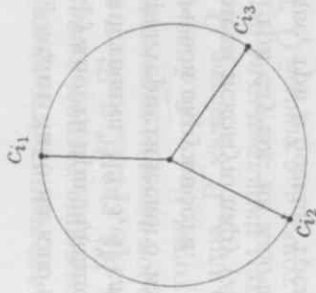


Рис. 3.

каться в одной точке. Эту точку обозначим через O_L и назовем центром трехосника, состоящего из осей L_1, L_2, L_3 . На каждой оси часть от центра в направлении оси называем положительной полуосью, оставшаяся часть — отрицательной полуосью.

Условимся дополнительно о следующих обозначениях. Отрезки (a_{ij}, b_{ij}^0) ($j = 1, 2, 3$) будем представлять величиной R , которую будем считать положительной, если направление отрезка совпадает с направлением оси, на которой он лежит, и отрицательной — в противном случае. Такое определение для R корректно, поскольку все отрезки (a_{ij}, b_{ij}^0) равны по длине и либо совпадают по направлению со своими осями, либо противоположны им. В нашем случае по выбору, сделанному выше, R положительно. Отрезки $(O_L a_{i1}), (O_L a_{i2}), (O_L a_{i3})$ будем считать направленными от O_L к a_{ij} ($j = 1, 2, 3$) и представлять величинами соответственно x, y, z . Длину отрезка $(O_L a_{ij})$ полагаем равной $|x|$. x полагаем положительным, если направленное отрезка $(O_L a_{i1})$ совпадает с направлением оси L_1 , и отрицательным — в противном случае. Аналогичное предполагаем и про y и z . Углы (положительные, меньшие π , в сумме составляющие 2π) между осями L_1 и L_2, L_1 и L_3, L_2 и L_3 обозначаем, соответственно, через α, β, γ . На рис. 4 для двух примеров показаны соответствующие обозначения.

Ясно, что задание конкретных значений для $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, R$ определяет конкретное взаиморасположение для точек a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} и

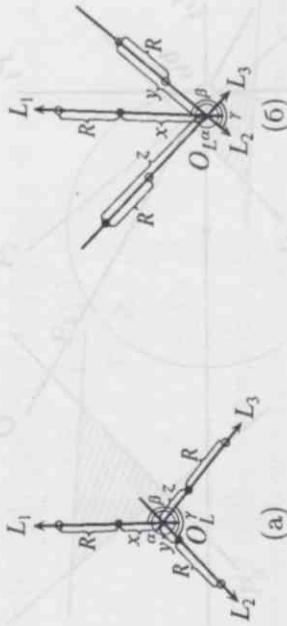


Рис. 4.

$b_{i1}^0, b_{i2}^0, b_{i3}^0$, а, значит, и конкретное значение угла φ между изображениями A и B_0 .

В [3, 4] показано, что все варианты взаиморасположения точек a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} и $b_{i1}^0, b_{i2}^0, b_{i3}^0$ на трехоснике найдутся среди решений следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \\ (a_{i1}, a_{i2})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \\ (b_{i1}^0, b_{i2}^0)^2 = (x + R)^2 + (y + R)^2 - 2(x + R)(y + R) \cos \alpha \\ (a_{i1}, a_{i3})^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \beta \\ (b_{i1}^0, b_{i3}^0)^2 = (x + R)^2 + (z + R)^2 - 2(x + R)(z + R) \cos \beta \\ (a_{i2}, a_{i3})^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma \\ (b_{i2}^0, b_{i3}^0)^2 = (y + R)^2 + (z + R)^2 - 2(y + R)(z + R) \cos \gamma \end{cases} \quad (1)$$

Если стороны треугольников a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} и $b_{i1}^0, b_{i2}^0, b_{i3}^0$ известны, то в системе (1) из семи уравнений семь неизвестных: $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, R$. Однако в нашем случае известны только стороны треугольника b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} , а стороны треугольника $b_{i1}^0, b_{i2}^0, b_{i3}^0$ получаются из сторон треугольника b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} умножением на коэффициент подобия k . Следовательно, возникает дополнительное восьмое неизвестное k .

Введем в рассмотрение направленные прямые P_1, P_2, P_3 , проходящие через точки соответственно $b_{i1}^0, b_{i2}^0, b_{i3}^0$ и перпендикулярные прямым L_1, L_2, L_3 . Направление прямой P_j ($j = 1, 2, 3$) определяется тем условием, что поворот ее на 90° против часовой стрелки с

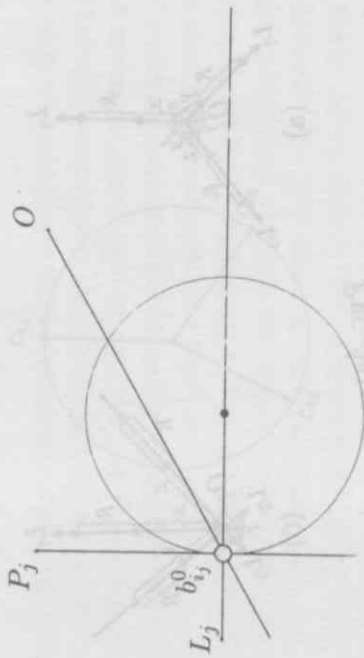


Рис. 5.

центром вращения в точке $b_{i_j}^0$ должен совмещать ее с прямой L_j .

Лемма 1. Прямые P_1, P_2, P_3 должны пересекаться в одной точке.

Доказательство. Прямая P_j ($j = 1, 2, 3$) делит плоскость на две полуплоскости: правую, если смотреть по ее направлению (рис. 5), и левую. Пусть O - произвольная точка в правой полуплоскости. Тогда часть отрезка $(Ob_{i_j}^0)$, примыкающая к точке $b_{i_j}^0$, находится внутри круга радиуса R с центром в точке a_{i_j} , а продолжение отрезка $(Ob_{i_j}^0)$, примыкающее к точке $b_{i_j}^0$, находится вне этого круга. Поэтому гомотетия с центром в точке O и с коэффициентом $k > 1$ удалит точку $b_{i_j}^0$ от точки a_{i_j} , а с коэффициентом $0 < k < 1$ - приблизит.

Аналогично гомотетия с любым центром в левой полуплоскости и с коэффициентом $k > 1$ будет приближать $b_{i_j}^0$ к a_{i_j} , а с коэффициентом $0 < k < 1$ - удалять.

Предположим теперь, что прямые P_1, P_2, P_3 не пересекаются в одной точке. Тогда они образуют треугольник, все внутренние точки которого являются точками их правых полуплоскостей (рис. 6а), или левых полуплоскостей (рис. 6б). В любом из этих случаев гомотетия с центром в любой из внутренних точек этого треугольника с одним коэффициентом удалит все точки $b_{i_j}^0$ от соответствующих точек a_{i_j} , а с другим коэффициентом - приближает их к ним. Тем

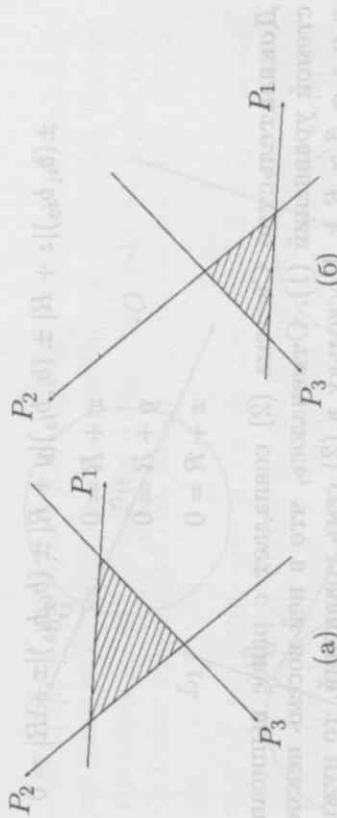


Рис. 6.

самым приходим к противоречию с предположением о том, что взаиморасположение изображений A и B_0 - искомого. Лемма доказана.

Точку пересечения прямых P_1, P_2, P_3 обозначим через O_P .

Лемма 2. Точки $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0, O_L, O_P$ коллимины.

Доказательство. Углы $O_L b_{i_1}^0 O_P, O_L b_{i_2}^0 O_P, O_L b_{i_3}^0 O_P$ прямые и опираются на один и тот же отрезок $(O_L O_P)$. Следовательно, $(O_L O_P)$ является диаметром окружности для треугольников $O_L b_{i_1}^0 O_P, O_L b_{i_2}^0 O_P, O_L b_{i_3}^0 O_P$ описанной окружности. Лемма доказана.

Лемма 3. Взаиморасположение точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ и $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0$, определяющее искомое взаиморасположение изображений A и B_0 , находится среди решений четырех систем уравнений, получаемых поочередным присоединением к системе (2) уравнений 3, 4, 5, 6:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \\ (a_{i_1} a_{i_2})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \\ k^2 (b_{i_1} b_{i_2})^2 = (x + R)^2 + (y + R)^2 - 2(x + R)(y + R) \cos \alpha \\ (a_{i_1} a_{i_3})^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \beta \\ k^2 (b_{i_1} b_{i_3})^2 = (x + R)^2 + (z + R)^2 - 2(x + R)(z + R) \cos \beta \\ (a_{i_2} a_{i_3})^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma \\ k^2 (b_{i_2} b_{i_3})^2 = (y + R)^2 + (z + R)^2 - 2(y + R)(z + R) \cos \gamma \end{cases} \quad (2)$$

$$\pm(b_{i_1} b_{i_2})|z + R| \pm (b_{i_1} b_{i_3})|y + R| \pm (b_{i_2} b_{i_3})|x + R| = 0 \quad (3)$$

$$x + R = 0 \quad (4)$$

$$y + R = 0 \quad (5)$$

$$z + R = 0 \quad (6)$$

Доказательство Система (2) совпадает с ранее выписанной системой уравнений (1). Отмечалось, что в ней восемь неизвестных: $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, R, k$. Поскольку в (2) семь уравнений, то нужно добавить к ней еще одно уравнение.

Уравнение (3) возникает из тех соображений, что поскольку, согласно лемме 2, точки $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0, O_L$ коциклически, необходимо и достаточно (теорема Птолемея), чтобы выполнялось одно из трех равенств:

$$\pm(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)(b_{i_3}^0 O_L) \pm (b_{i_1}^0 b_{i_3}^0)(b_{i_2}^0 O_L) \pm (b_{i_2}^0 b_{i_3}^0)(b_{i_1}^0 O_L) = 0$$

Однако условие, проистекающее из теоремы Птолемея, не работает, если точка O_L совпадает с какой-либо из вершин треугольника $b_{i_1}^0 b_{i_2}^0 b_{i_3}^0$. Но такое совпадение, например, O_L с вершиной $b_{i_1}^0$, означает дополнительное уравнение $x + R = 0$, то есть уравнение (4). Аналогично из предположений о совпадении O_L с вершинами $b_{i_2}^0$ и $b_{i_3}^0$ получаются уравнения 5 и 6. Лемма доказана.

Рассмотрим все тройки точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ ($i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$) из изображения A и тройки соответствующих точек из изображения B . Для каждой такой тройки решаются системы уравнений из леммы 4. Каждое решение определяет пару (φ, k) . Множество всех таким образом получаемых пар (φ, k) обозначим через U_2 .

Везде выше предполагалось, что треугольник $c_{i_1} c_{i_2} c_{i_3}$ остроугольный. Положим теперь, что он прямоугольный и покажем, что взаиморасположение A и B в этом случае не может быть искомым. Пусть $(c_{i_1} c_{i_2})$ – гипотенуза треугольника и, следовательно, диаметр ключевой окружности. Далее возможны два варианта:

1) Отрезки $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$ не параллельны. Пример такой ситуации представлен на рис. 7. Прямые L_1, L_2, L_3 не пересекаются в одной

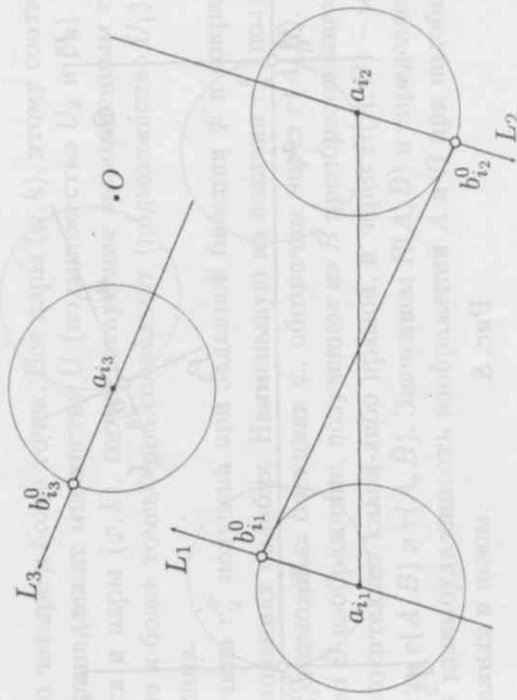


Рис. 7.

точке. Теми же построениями, которые использованы в [3, 4] для доказательства пересечения прямых L_1, L_2, L_3 в одной точке, нетрудно показать, что в этом случае всегда существует точка (например, точка O на рис. 7), поворот относительно которой изображения B_0 приближает точки $b_{i_j}^0$ к точкам a_{i_j} ($j = 1, 2, 3$).

2) Отрезки $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$ параллельны (пример на рис. 8). В этом случае прямые P_1, P_2, P_3 не пересекаются в одной точке и потому существуют точки (например, точка O на рис. 8), которые могут служить центром гомотетии, посредством которой можно приблизить точки $b_{i_j}^0$ к точкам a_{i_j} ($j = 1, 2, 3$).

Отметим, что если точки $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ лежат на одной прямой, то решение для этого случая должно принадлежать множеству U_1 .

Третий случай. Осталось рассмотреть случай, когда на ключевой окружности находятся четыре и более точек ядра. Парные расстояния между точками на ключевой окружности известны и являются при заданных A и B функциями от φ и k . Известна формула,

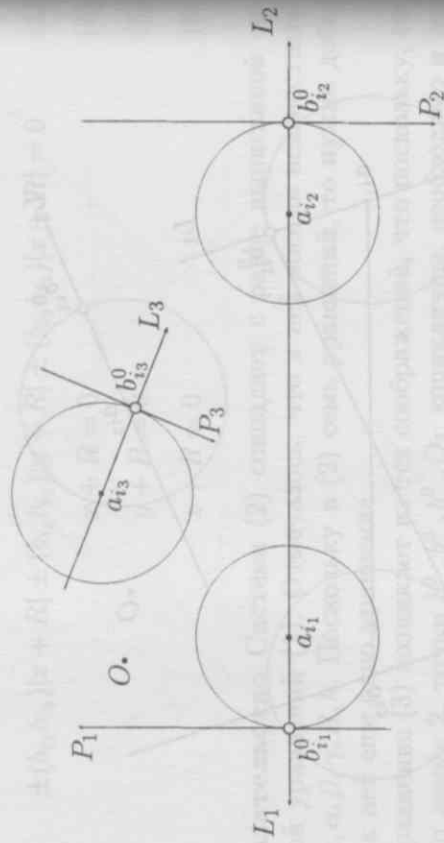


Рис. 8.

представляющая радиус описанной окружности треугольника через длины его сторон. Приравняем попарно радиусы описанных окружностей треугольников C_1, C_2, C_3 и C_1, C_2, C_4 , и треугольников C_1, C_3, C_4 и получим систему из двух уравнений, неизвестными в которых будут φ и k . Множество всех пар (φ, k) , полученных в качестве решений систем уравнений, составленных для всех возможных четверок точек $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, a_{j_4}$ и соответствующих четверок точек $b_{j_1}, b_{j_2}, b_{j_3}, b_{j_4}$, обозначим через U_3 .

Обозначим через U объединение множеств U_1, U_2, U_3 . Напомним, что задача поиска искомого взаиморасположения изображений A и B сводится, как описывалось выше, к поиску искомого угла φ_0 между изображениями и искомого коэффициента подобия k_0 , то есть к определению искомой пары (φ_0, k_0) .

Теорема 1. *Искомая пара (φ_0, k_0) найдется среди элементов множества U .*

Доказательство Следует из того, что при искомом взаиморасположении изображений A и B на ключевой окружности находятся либо

три, либо четыре и более точек. Все пары (φ, k) , этому соответствующие, принадлежат множеству U (подмножества U_2 и U_3). Там же находятся и пары (φ, k) , соответствующие вырожденным случаям, когда две и более точек ядра совпадают (подмножество U_1). Теорема доказана.

Величина r_0^ψ получена при заданной биекции ψ и сокращенных преобразованиях подобия. Наименьшую из величин r_0^ψ , полученную при всех возможных биекциях ψ , обозначим через $r(A, B)$. Обозначим через \bar{V} изображение, полученное из V преобразованием симметрии относительно какой-либо прямой, и через $R(A, B)$ — меньшую из величин $r(A, V)$ и $r(A, \bar{V})$. Значением $R(A, B)$ и определяется наименьшая взаимоудаленность изображений A и B при подобных преобразованиях в целом.

2. О геометрическом построении искомого взаиморасположения изображений

Ниже описываются основные моменты геометрических построений, позволяющих найти искомое взаиморасположение изображений для случая, когда на ключевой окружности находятся три точки.

Итак, треугольники $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ и $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0$ полагаем, расположенным образом, причем точки $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0$ не лежат на одной прямой и треугольник C_1, C_2, C_3 из точек ядра остроугольный.

Леммы 1 и 2 определяют условия, необходимые для искомого взаиморасположения. На рис. 9–11 представлены примеры расположения треугольников, удовлетворяющие этим условиям.

Леммой 2 углы α, β, γ между осями трехосника определены. Действительно, это углы при вершинах треугольника $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ или доопределенные к ним. Тем самым и трехосник можно считать известным с точностью до параллельных переносов и поворотов. Покажем теперь, что на осях L_1, L_2, L_3 трехосника можно разместить точки соответственно $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$. Разместим точки a_{i_2} и a_{i_3} на осях L_2 и L_3 . Существует четыре варианта такого размещения: обе точки в

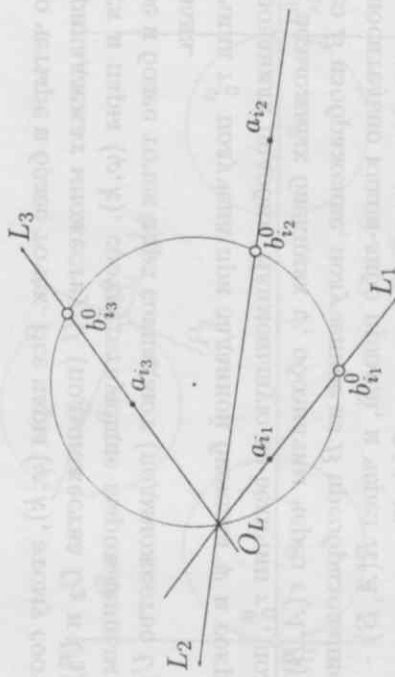


Рис. 9.

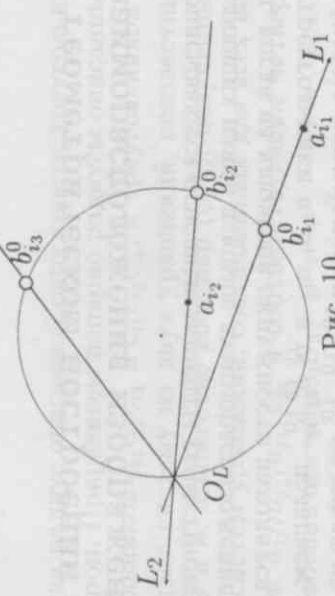


Рис. 10.

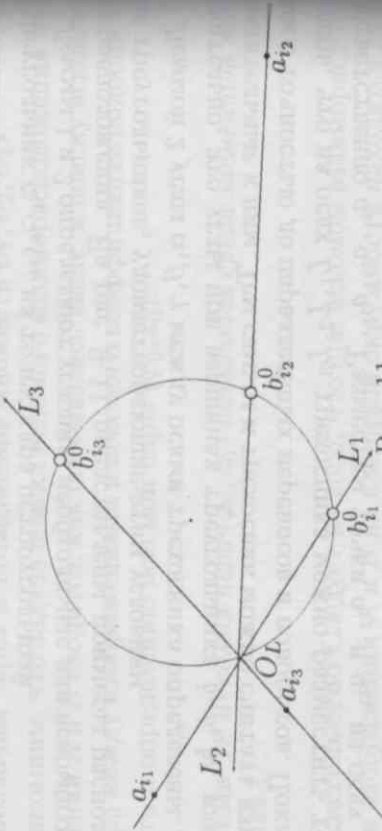
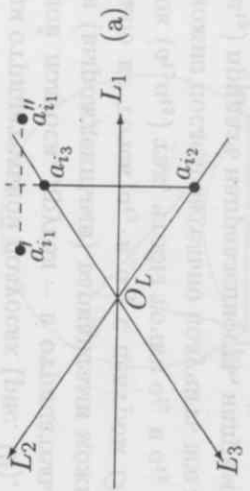
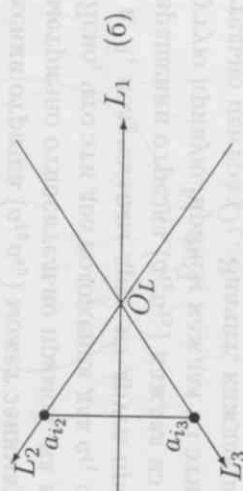


Рис. 11.

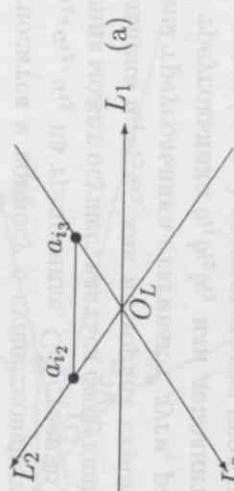


(a)

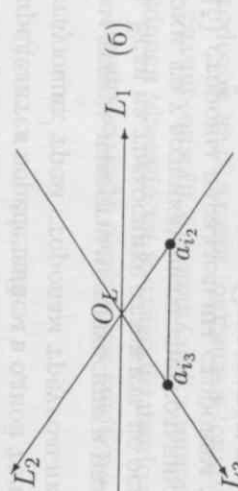


(б)

Рис. 12.



(a)



(б)

Рис. 13.

положительной или отрицательной полуосях (рис. 12), или одна точка в положительной полуоси, другая — в отрицательной (рис. 13). Дополнительными (вырожденными) вариантами можно назвать совпадение какой-либо из точек a_{i_2} и a_{i_3} с центром O_L трехосника. Перемещая отрезок $(a_{i_2} a_{i_3})$ так, чтобы точки a_{i_2} и a_{i_3} перемещались по осям L_2 и L_3 , можно последовательно получить все эти варианты. Если отрезку $(a_{i_2} a_{i_3})$ придать направленность, например, от a_{i_2} к a_{i_3} , то из рисунков 12 и 13 видно, что направленный отрезок $(a_{i_2} a_{i_3})$ совершает при таком перемещении полный оборот. Точка a_{i_1} при фиксированном положении отрезка $(a_{i_2} a_{i_3})$ может занимать два положения a'_{i_1} и a''_{i_1} , симметрично относительно прямой, на которой лежит $(a_{i_2} a_{i_3})$ (рис. 12). Ясно, что эти два положения для a_{i_1} соответствуют изображениям A и \bar{A} , получаемым друг из друга преобразованием симметрии. При вращении отрезка $(a_{i_2} a_{i_3})$ каждая из точек a'_{i_1} и a''_{i_1} описывает замкнутую кривую, причем каждая из этих кривых симметрична относительно центра O_L . Значит, каждая из этих кривых пересекает ось L_1 , что и дает искомые положения для точки a_{i_1} .

Описанное относится к вопросу о существовании нужного размещения точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ на трехоснике. Собственно же построение нужного размещения может осуществляться следующим образом. На сторонах треугольника $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ как на хордах строим окружности такие, что стороны треугольника стягивают дуги, равные соответствующим углам треугольника $b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3}$ или дополнительные к ним. Так, например, стороне $(a_{i_1} a_{i_2})$ соответствует угол при вершине b_{i_3} треугольника $b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3}$. Для каждой стороны треугольника $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ таких окружностей будет две (пример на рис. 14). Искомый центр O_L трехосника определится пересечением в одной точке трех окружностей, соответствующих трем сторонам треугольника $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$.

Итак, полагаем теперь известным трехосник и размещение точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ на нем. Если на трехоснике отложить по осям положительные равные отрезки, то у возникающего треугольника (треугольник $c'_{i_1} c'_{i_2} c'_{i_3}$ на рис. 15) стороны параллельны сторонам треугольника с вершинами на ключевой окружности. Следовательно, можно считать известными (с точностью до параллельных переносов) прямые, на

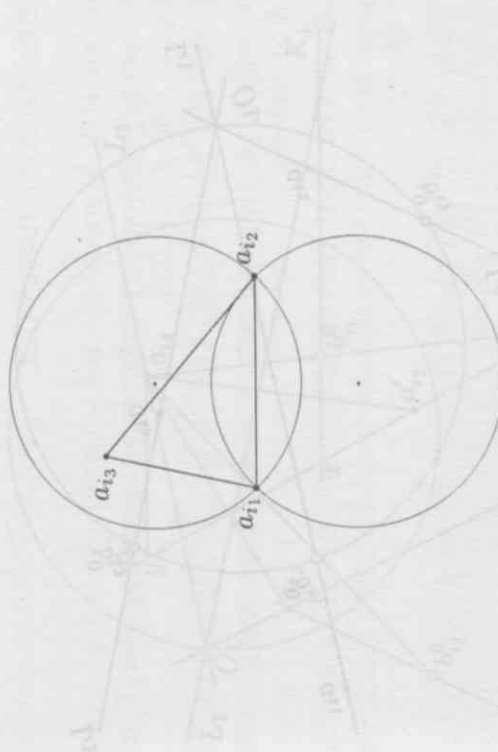


Рис. 14.

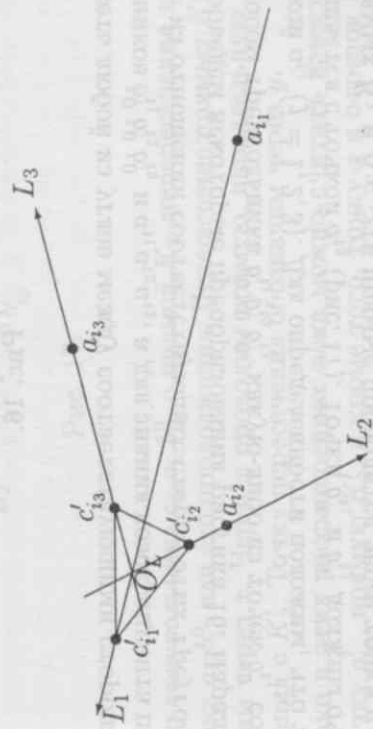


Рис. 15.

которых лежат стороны ключевого треугольника.

Будем далее ориентироваться на пример, изображенный на рис. 16. Что в сравнении с рисунком 15 нужно знать, чтобы получить рис. 16? Достаточно, очевидно, иметь угол поворота треугольника $b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3}$ относительно $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ и коэффициент подобия, позволяющий из $b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3}$ получить $b_{i_1}^0 b_{i_2}^0 b_{i_3}^0$. Для знания угла поворота достаточ-

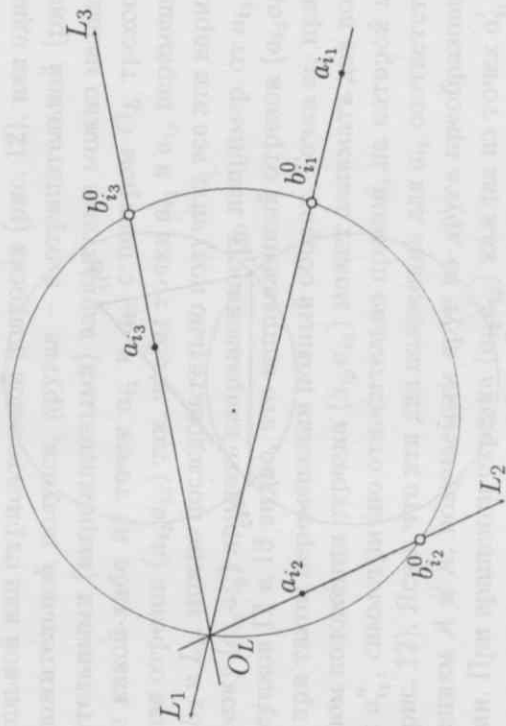


Рис. 16.

но иметь любой из углов между соответствующими сторонами треугольников $b_{i_1}^0 b_{i_2}^0 b_{i_3}^0$ и $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$, а для знания коэффициента подобия — любое из отношений соответствующих сторон этих треугольников.

Проведем некоторые преобразования рисунка 16. Параллельным переносом треугольника $b_{i_1}^0 b_{i_2}^0 b_{i_3}^0$ какою-либо из точек $b_{i_j}^0$ совместим с точкой a_{i_3} ($j = 1, 2, 3$). Для определенности положим, что точка $b_{i_1}^0$ совмещается с точкой a_{i_3} (рис. 17). Точки $b_{i_1}^0$ и $b_{i_2}^0$ должны очутиться на прямых K_1 и K_2 . Эти прямые проводятся через точки a_{i_1} и a_{i_2} и параллельны сторонам $(c'_{i_2} c'_{i_3})$ и $(c'_{i_1} c'_{i_3})$ треугольника $c'_{i_1} c'_{i_2} c'_{i_3}$ и, следовательно, могут быть построены заранее. Достаточно построить положение какой-либо из точек $b_{i_1}^0$ или $b_{i_2}^0$ на прямых K_1 и K_2 — это, очевидно, определит и искомый угол, и коэффициент подобия.

Предположим, что построен треугольник $a_{i_3} a'_{i_2} b'_{i_2}$, равный треугольнику $a_{i_3} a_{i_2} b_{i_2}^0$ так, чтобы прямые, на которых лежат отрезки $(a_{i_3} b'_{i_2})$ и $(a_{i_3} b_{i_1}^0)$, совместились (рис. 17). Прямую, на которой лежит отрезок $(a'_{i_2} b'_{i_2})$, обозначим через K'_2 . Такое построение наглядно можно представить как поворот вокруг точки a_{i_3} на рис. 17 ком-

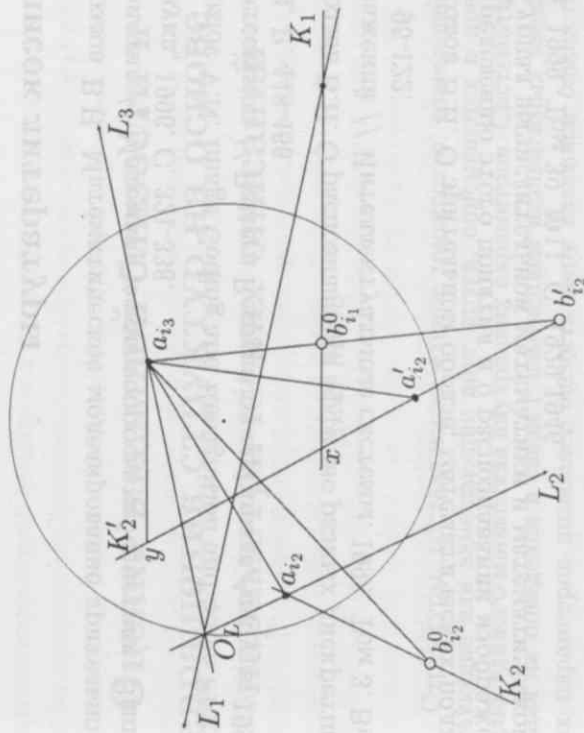


Рис. 17.

плекса из треугольника $a_{i_3} a_{i_2} b_{i_2}^0$ и прямой K_2 до пересечения точкой $b_{i_1}^0$, отрезка $a_{i_3} b_{i_1}^0$ или его продолжения. Пересечение прямых K_1 и K'_2 обозначим через x . Через x проводим прямую, параллельную K_1 до пересечения с K'_2 . Точку пересечения обозначим через y .

Однако в этих рассуждениях пока можно считать известными лишь точку a'_{i_2} , прямую K'_2 , и кроме того, точку x и отрезок $(a_{i_3} y)$, которые находятся построением. Искомое положение треугольника $b_{i_1}^0 b_{i_2}^0 b_{i_3}^0$ относительно $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ на рис. 17 определится, если будет определен отрезок $(b'_{i_1} x)$, поскольку этим, очевидно, определится и положение точки $b_{i_1}^0$ на прямой K_1 .

Треугольники $a_{i_3} y b'_{i_2}$ и $b_{i_1}^0 x b'_{i_2}$ подобны, и коэффициент подобия определяется известным отношением сторон $(a_{i_3} b'_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b'_{i_2})$ (на рис. 17 отрезок $(b_{i_1}^0 b'_{i_2})$ равен модулю разности длин отрезков $(a_{i_3} b_{i_1}^0)$ и $(a_{i_3} b'_{i_2})$). Так как отрезок $(a_{i_3} y)$ известен из построения, то отсюда и находим длину искомого отрезка $(b_{i_1}^0 x)$.

Список литературы

- [1] Козлов В.Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 321-338.
- [2] Kozlov V.N. Image Coding and Recognition and Some Problems of Stereovision // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V.7. N4. P. 448-466.
- [3] Козлов В.Н. О распознавании аффинно разных дискретных изображений // Интеллектуальные системы. 1998. Том 3. Вып. 3-4. С. 95-122.
- [4] Козлов В.Н. О зрительном образе, математических подходах к определению этого понятия и о распознавании изображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Том 39. №11. С. 1929-1946.

Оценка взаимной близости и превращения структур на основе их параметрических описаний

Д.М. Мазо

Структуры, составляющие единое множество, взаимодействующие или замещающие друг друга, описываются в пределах единого множества внутренних параметров. Систематизация их поведения в связи с изменением независимых внешних параметров позволяет оценить меру взаимной близости структур, число шагов, необходимых для взаимного превращения структур, и необходимое для этого направление изменения внешних параметров. Рассмотрена проблема идентификации структур в пределах множества. Возможности подхода декомпонируются на примере анализа переходов между правильными системами точек плоских групп симметрии и динамики развития шахматных партий.

1. Введение

Любая структура может быть трансформирована, без потери индивидуальности в пределах некоторого множества структур, объединяющих те же элементы. Эта возможность существует с момента зарождения структуры и вплоть до ее разрушения. Любые нарушения соответствия текущего состояния структуры сложившимся внешним условиям в пределах области ее существования компенсируются за счет обратной трансформации. По достижении некоторого критического уровня состояния (у границы области) возможности обратной трансформации исчерпываются и прогрессив-