# Распознавание двусвязных цифр коллективами автоматов

Б. Стаматович

Изучается проблема существования автомата (пешки), распознающего некоторый класс шахматных лабиринтов ($\pi$-лабиринтов). Этот класс в геометрическом смысле представляет цифру ноль. В [4] доказано, что для нуля не существует распознающего автомата. В предлагаемой работе приводится доказательство существования распознающего коллектива типа $(1,1)$.

## 1. Основные понятия и результаты

Основные обозначения и понятия, такие как конечный автомат, лабиринт, пешка, и т.п. взяты из [1, 2, 3]. Обозначим через $e = (1,0)$, $n = (0,1)$, $w = (-1,0)$, $s = (0,-1)$ единичные векторы евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^2$ и через $\mathbf{0} = (0,0)$ – нулевой вектор.

Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ – произвольные элементы множества $\mathbb{Z}^2$. Говорим, что $a$ и $b$ *(слабо) соседние*, если ($\|a-b\| < 2$) $\|a-b\| = 1$, $\|a-b\| = [(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2]^{1/2}$. Последовательность $a = p_0, p_1, \cdots, p_m = b$ в $\mathbb{Z}^2$ называется *(слабой) цепью*, связывающей точку $a$ и точку $b$, если точки $p_{i-1}$ и $p_i$ (слабо) соседние для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Множество $V$, $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ называется *(слабо) связным*, если для любых $a, b \in V$ существует (слабая) цепь в $V$, связывающая их. *Компонентой (слабой) связности* множества $V$ называется любое максимальное (слабо) связное подмножество множества $V$.

*$\pi$-лабиринтом* называется любое отображение $c: \mathbb{Z}^2 \to E^2$, ($E^2 = \{1, 0\}$) такое, что $P_c = c^{-1}(\{1\})$ является связным множеством. Если $p_0$ – произвольная точка в $P_c$, тогда пара $(c, p_0)$ называется $\pi$-лабиринтом с началом $p_0$. $\pi$-лабиринт называется (конечным) бесконечным, если множество $P_c$ является (конечным) бесконечным. В будущем под $\pi$-лабиринтом будем понимать конечный $\pi$-лабиринт. *Дырой* $\pi$-лабиринта $c$ называется произвольная компонента слабой связности множества $\mathbb{Z}^2 \setminus P_c$.

Пусть $c$ – произвольный $\pi$-лабиринт. Рассмотрим граф $G_c = (P_c, X_c)$, у которого $P_c$ – множество вершин, $X_c$ – множество дуг и $\langle p_1, p_2 \rangle \in X_c$ тогда и только тогда, когда $p_1$ и $p_2$ – соседние точки $(p_1, p_2 \in P_c)$.

Для произвольного множества $A$ через $P_0(A)$ обозначим множество всех непустых подмножеств.

Обозначим $D = \{e, n, w, s\}$.

Пусть даны инициальный автомат $\mathbf{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_{i0})$ и упорядоченный набор $\vec{V}_i = (p_1^i, \dots, p_{n_i}^i)$ ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^2$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что $\mathbf{A}_i$ – такой автомат, что $B_i \subseteq V_i' = \{\mathbf{0}, p_1^i, \dots, p_{n_i}^i\}$, и $A_i$ – множество всех таких

$$a^i = (a_1^i, \dots, a_{n_i}^i) \in \left[\{0,1\} \bigcup P_0 \left[\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\{j\} \times Q_j)\right]\right]^{n_i+1},$$

что если $a_{k_l}^i \notin \{0,1\}$, $l = 1, 2, 3$, то $pr_1(a_{k_1}^i) \cap pr_1(a_{k_2}^i) = \emptyset$ и $|a_{k_3}^i \cap \{j\} \times Q_j| \leqslant 1$ для любого $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$; $0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant n_i$, $k_1 \neq k_2$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Допустим далее, что для произвольного $q \in Q_i$, если $a_0^i \neq 0$ и $\psi(q, a^i) = p_k^i$, $0 \leqslant k \leqslant n_i$, то $a_k^i \neq 0$; $p_i^0 = \mathbf{0}$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Система $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$, которая обладает указанными выше свойствами, называется *системой взаимодействующих (коллективом) регулярных пешек*, а набор $\vec{V}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, – ***полем зрения*** пешки $\mathbf{A}_i$. Далее, если для пешки $\mathbf{A}_i$ набор $\vec{V}_i = (p_1^i, \dots, p_{n_i}^i)$ является полем зрения и если $p_j^i = (\alpha_j^1, \alpha_j^2)$ $(p_0^i = \mathbf{0})$ $1 \leqslant j \leqslant n_i$, то под $a_{\alpha_j^1, \alpha_j^2}$ будем понимать $a_j$; $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n_i}) \in A_i$.



Для произвольной пешки $\mathbf{A}$ через $A_\mathbf{A}, B_\mathbf{A}, Q_\mathbf{A}$ будем обозначать, соответственно, ее множества входов, выходов и состояний, а через $\varphi_\mathbf{A}$ и $\psi_\mathbf{A}$, соответственно, ее функции выхода и перехода.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ – произвольная система взаимодействующих пешек, $\vec{V}_i = (p_1^i, \dots, p_{n_i}^i)$ – поле зрения пешки $\mathbf{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $c$ – произвольный $\pi$-лабиринт. Предположим, что пешка $\mathbf{A}_i$ в состоянии $q_i$ лежит на поле $z_i$; $q_i \in Q_{\mathbf{A}_i}$; $z_i \in P_c$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Определим вход $a_{\mathbf{A}_i}(z_i)$ пешки $\mathbf{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следующим образом:

$$[a_{\mathbf{A}_i}(z_i)]_{\alpha_1^i, \alpha_2^i} = \begin{cases} 0, & z_i + (\alpha_1^i, \alpha_2^i) \notin P_c, \\ 1, & z_i + (\alpha_1^i, \alpha_2^i) \in P_c \wedge \forall j \neq i,\ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ & \qquad z_j - z_i \neq (\alpha_1^i, \alpha_2^i), \\ \{j, q_j) | z_j - z_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i), j \neq i,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} & \\ & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$(\alpha_1^i, \alpha_2^i) \in V_i'$. Ясно, что $a_{\mathbf{A}_i}(z_i)$ зависит от $\mathcal{A}$, $\vec{V}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и от размещения пешек этой системы, то есть от $\{z_i\}_{i=1}^n$. Поскольку всегда будет ясно из контекста, о каком коллективе идет речь, и где лежат пешки этой системы, будем пользоваться этим обозначением без специальной оговорки.

Пусть $(c, z_0)$ – произвольный $\pi$-лабиринт с началом в $z_0$, $z_0 \in P_c$, и $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ некоторая система взаимодействующих регулярных пешек. *Поведением* коллектива $\mathcal{A}$ в $\pi$-лабиринте $c$ называется последовательность $\pi(\mathbf{A}; c, z_0) : \left(\vec{z}_0, \vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{q}_0\right), \dots, \left(\vec{z}_t, \vec{a}_t, \vec{b}_t, \vec{q}_t\right)$, $\left(\vec{z}_{t+1}, \vec{a}_{t+1}, \vec{b}_{t+1}, \vec{q}_{t+1}\right), \dots$, где $\vec{z}_t = (z_t^1, \dots, z_t^n)$, $\vec{a}_t = (\vec{a}_t^1, \dots, \vec{a}_t^n)$, $\vec{a}_t^i = (\vec{a}_{t0}^i, \dots, \vec{a}_{tn_i}^i) \in A_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\vec{b}_t = (b_t^1, \dots, b_t^n)$, $b_t^i \in B_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\vec{q}_t = (q_t^1, \dots, q_t^n)$, $q_t^i \in Q_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что $\vec{z}_0 = (z_0, \dots, z_0)$, $\vec{z}_{t+1} = \vec{z}_t + \vec{b}_t$, $b_t^i = \psi_i(q_t^i, a_t^i)$, $q_{t+1}^i = \varphi_i(q_t^i, a_t^i)$, а $a_{tk}^i = [a_{\mathbf{A}_i}(z_t^i)]_{\alpha_k^i, \beta_k^i}$, где $p_k^i = (\alpha_k^i, \beta_k^i) \in \vec{V}_i$, $\vec{V}_i = (p_i^i, \dots, p_{n_i}^i)$ – поле зрения пешки $\mathbf{A}_i$. Ясно, что $\vec{z}_t \in P_n^c$ для любого $t$, $t = 0, 1, \dots$.

Далее везде предполагается, что $\vec{V}_i = \vec{V}_0$ и $B_i = D \cup \{\mathbf{0}\}$ для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\vec{V}_0 = ((1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, -1), (0, 1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1))$.

Пусть $\mathrm{Int}(\mathcal{A};c,z_0)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{n} z_i^j\right)$. Множество $\mathrm{Fr}(\mathcal{A};c,z_0)=P_c\setminus\mathrm{Int}(\mathcal{A};c,p_0)$ называется краем для коллектива $\mathcal{A}$ в $\pi$-лабиринте $(c,z_0)$. Если $\mathrm{Fr}(\mathbf{A},\mathbf{V};c,p_0)=\emptyset$, то говорим, что коллектив $\mathcal{A}$ обходит $\pi$-лабиринт $(c,z_0)$.

Пусть выделены пешки $\mathbf{A}_{i_1},\mathbf{A}_{i_2},\dots,\mathbf{A}_{i_m}$, $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_m\leqslant n$, в $\mathcal{A}$, $\mathbf{A}_{i_j}=(A_{i_j},Q_{i_j},B_{i_j},\varphi_{i_j},\psi_{i_j})$, $1\leqslant j\leqslant m$, удовлетворяющие следующему условию. Предположим, что $Q_{i_j}=\{q_{i_j}\}$ и для любого $a=(a_0,a_1,\dots,a_8)\in A_{i_j}$ либо $\psi_{i_j}(q_{i_j},a)=0$, либо, если $\psi_{i_j}(q_{i_j},a)=b\neq 0$, то существуют $s$, $s\neq i_k$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ и $q$, $q\in Q_s$, такие, что $(s,q)\in a_0$ и $\psi_s(q,a')=b$, где $a'=((a_0\setminus\{(s,q)\})\bigcup\{(i_j,q_{i_j})\},a_1,\dots,a_8)$; $1\leqslant j\leqslant m$. Тогда пешки $\mathbf{A}_{i_1},\mathbf{A}_{i_2},\dots,\mathbf{A}_{i_m}$ называются *камнями* в коллективе $\mathcal{A}$.

Коллектив $\mathcal{A}$ с $m$ отмеченными автоматами $\mathbf{A}_{i_1},\mathbf{A}_{i_2},\dots,\mathbf{A}_{i_m}$, которые являются камнями, называется *коллективом из $n-m$ автоматов с $m$ камнями (коллектив типа $(n-m,m)$)*.

Кроме инициального состояния $q_0$ автомата $\mathbf{A}_{q_0}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ можно ввести *множество заключительных состояния* $Q_F\subseteq Q$. Пусть $Q_F=q_{F_0},q_{F_1}$. Будем говорить, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ (коллектив $\mathbf{S}=(\mathbf{A}_{q_0},\mathbf{K})$ типа (1, 1)) *распознает* лабиринт $L_\nu$, если при его запуске в лабиринт $L_\nu$ происходит переход автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в заключительное состояние $q_{F_1}$, а при его запуске в лабиринт $L'_{\nu'}\neq L_\nu$ происходит переход в заключительное состояние $q_{F_0}$. Пусть $\mathbf{C}$ класс инициальных лабиринтов. Говорим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ (коллектив $\mathbf{S}=(\mathbf{A}_{q_0},\mathbf{K})$ типа (1, 1)) *распознает класс* $\mathbf{C}$, если при его запуске в любой лабиринт $L_\nu$ происходит переход автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в заключительное состояние $q_{F_1}$ только тогда, когда $L_\nu\in\mathbf{C}$ и для любого лабиринта $L_\nu\notin\mathbf{C}$ происходит переход в заключительное состояние $q_{F_0}$.

Если множество $K\subseteq P$, тогда границей $\partial K$ множества $K$ будем называть множество $\{z\in K|$ существует точка $z''$ в $\mathbb{Z}^2\setminus K$ такая, что $z$ и $z''$ слабо соседние$\}$. Вокруг каждой точки $z=(z_1,z_2)\in\partial K$ рассмотрим квадрат $kv_z$ с длиной сторон 1. Его стороны обозначим через $\alpha,\beta,\chi,\delta$:



$$\alpha=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|z_1-1/2\leqslant x_1\leqslant z_1+1/2,x_2=z_2+1/2\},$$
$$\beta=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|z_1-1/2\leqslant x_1\leqslant z_1+1/2,x_2=z_2-1/2\},$$
$$\chi=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1=z_1-1/2,z_2-1/2\leqslant x_2\leqslant z_2+1/2\},$$
$$\delta=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1=z_1+1/2,z_2-1/2\leqslant x_2\leqslant z_2+1/2\}.$$

Стороны $\alpha,\beta,\chi,\delta$ квадрата $kv_z$, $z\in K$, имеют свойство «сторона находится между точками множества $K$ и множества $\mathbb{Z}^2\setminus K$», если точки $(z_1,z_2+1)$, $(z_1,z_2-1)$, $(z_1-1,z_2)$, $(z_1+1,z_2)$, не принадлежат множеству $K$ соответственно.

Пусть $st_z$ – множество сторон квадрата $kv_z$, для которых «сторона находится между точками множества $K$ и множества $\mathbb{Z}^2\setminus K$». Фигура $F_K=\bigcup_{z\in\partial K} st_z$ представляет собой прямоугольный полигон.

Пусть $K\subset\mathbb{Z}^2$ – конечное связное множество. *Самая нижняя и самая правая точка* (НП) множества $K$ есть точка $z=(z_1,z_2)\in K$ такая, что для каждого $a=(a_1,a_2)\in K$, $z_2<a_2$ или, если $z_2=a_2$, тогда $z_1>a_1$. *Самая нижняя и самая левая точка* (НЛ) множества $K$ есть точка $z=(z_1,z_2)\in K$ такая, что для каждого $a=(a_1,a_2)\in K$, $z_2<a_2$ или, если $z_2=a_2$, тогда $z_1<a_1$. *Самая высокая и самая правая точка* (ВП) множества $K$ есть точка $z=(z_1,z_2)\in K$ такая, что для каждого $a=(a_1,a_2)\in K$, $z_2>a_2$ или, если $z_2=a_2$, тогда $z_1>a_1$. *Самая высокая и самая левая точка* (ВЛ) множества $K$ есть точка $z=(z_1,z_2)\in K$ такая, что для каждого $a=(a_1,a_2)\in K$, $z_2>a_2$ или, если $z_2=a_2$, тогда $z_1<a_1$.

Пусть $(S)^*$ - множество всех слов $\alpha=\alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(k)$, $k\geqslant 4$, над алфавитом $S=\{-1,1\}$. Определим отображение $f:\mathbf{P}\to(S)^*$ следующим образом. Пусть $P\in\mathbf{P}$. Обходя полигон $F_P$ в положительном направлению, начиная от самой нижней и самой правой точки, пронумеруем вершины полигона $F_P$ так, что сопоставим им -1 или 1, если угол в вершине равен $\pi/2$ или $-\pi/2$ соответственно.

Определим следующие семейства множеств (рис. 1):

$$\Phi_1 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(\text{-}1,1)^n\text{-}1\text{-}1(1,\text{-}1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}$$
$$\Phi_2 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(1,\text{-}1)^n\text{-}1\text{-}1(1,\text{-}1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}$$
$$\Phi_3 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(\text{-}1,1)^n\text{-}1\text{-}1(\text{-}1,1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}$$
$$\Phi_4 = \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(1,\text{-}1)^n\text{-}1\text{-}1(\text{-}1,1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}$$

где $(a,b)^n = \underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)}_{n}, n \in \mathbb{N}$.

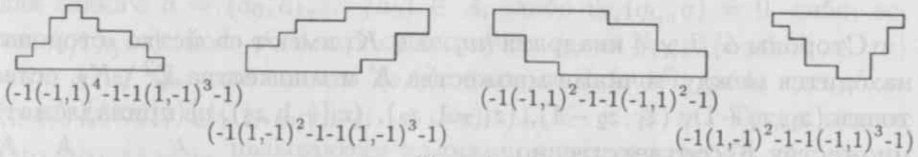
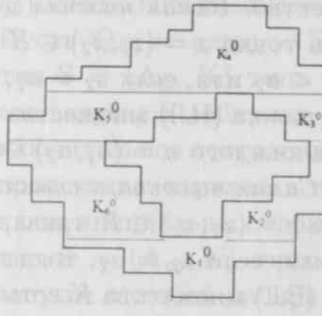



Рис. 1.

Если $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1,2,3,4$, такие что $y_2 = y_3$, $y_1 = y_4$ и $y_1 \leqslant y_2$, тогда обозначим через $A^{z_1,z_2,z_3,z_4}_{\Phi_i} = \{K \in \Phi_i \mid z_1, z_2, z_3, z_4$ – НП, ВП, ВЛ, НЛ точка множества $K$ соответственно $\}, i \in \{1, \dots, 4\}$.

Пусть $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1, 2, \dots, 16$ имеют свойства:



$$(0)\begin{cases} y_9 = y_{16} = y_{11} = y_2, \\ x_9 \leqslant x_{16} < x_{11} - 1,\ x_{11} \leqslant x_2, \\ y_4 > y_3 > y_2, \\ y_7 = y_{14} = y_{13} = y_4, \\ x_7 \leqslant x_{14} < x_{13} - 1,\ x_{13} \leqslant x_4, \\ y_7 > y_8 > y_9 \end{cases}$$

Рис. 2.

Тогда,
$K_0^{\{z_i\}_{i=\overline{1,16}}} = \{K \in \mathbf{P} | K = K_1^0 \cup K_2^0 \cup K_3^0 \cup K_4^0 \cup K_5^0 \cup K_6^0,\ K_1^0 \in A^{z_1,z_2,z_9,z_{10}}_{\Phi_4}$,
$K_2^0 \in A^{z_2,z_3,z_{12},z_{11}}_{\Phi_2}, K_3^0 \in A^{z_3,z_4,z_{13},z_{12}}_{\Phi_3}, K_4^0 \in A^{z_4,z_5,z_6,z_7}_{\Phi_1}, K_5^0 \in A^{z_{15},z_{14},z_7,z_8}_{\Phi_2}$,
$K_6^0 \in A^{z_{16},z_{15},z_8,z_9}_{\Phi_3}$,
$(x_1 = x_{10}) \Rightarrow (z_1 + (1,1) \in K_1^0 \wedge z_1 + (-1,1) \in K_1^0)$,



$(z_3+(0,1) \notin K_3^0 \wedge z_3+(0,-1) \notin K_2^0) \Rightarrow (z_3+(-1,1) \in K_3^0 \vee z_5+(-1,-1) \in K_2^0)$,
$(x_5 = x_6) \Rightarrow (z_5 + (1,-1) \in K_4^0 \wedge z_5 + (-1,-1) \in K_4^0)$,
$(z_8 + (0,1) \notin K_5^0 \wedge z_5 + (0,-1) \notin K_6^0) \Rightarrow (z_8 + (1,1) \in K_5^0 \vee z_8 + (1,-1) \in K_6^0)\}$

Определим класс $\pi$-лабиринтов $\mathbf{C}_0$:

$\mathbf{C}_0 = \{c : \mathbb{Z}^2 \to E^2 | c^{-1}(\{1\}) = K \in K_0^{\{z_i\}_{i=\overline{1,16}}}, z_i \in \mathbb{Z}^2, i = \overline{1,16}$, и выполнено условие (0)$\}$

**Теорема 1.** *Существует коллектив* $(\mathbf{A}_0, \mathbf{K}_0)$ *типа (1,1), который распознает класс* $(\mathbf{C}_0, \text{НП}) = \{(c, p_{\text{НП}}) | c \in \mathbf{C}_0, p_{\text{НП}}$ *– самая нижняя и самая правая точка множества* $c^{-1}(\{1\})\}$, *где у пешки* $\mathbf{A}_0$ *42 состояния и она любой лабиринт из класса* $(\mathbf{C}_0, \text{НП})$ *с* $n$ *вершинами обходит за время не меньшее* $\begin{cases} 3/2(n-2)+7, & n = 2k+2, \quad k \leqslant 3 \\ 3/2(n-3)+9, & n = 2k+3, \quad k \geqslant 3 \end{cases}$

*и не большее* $\begin{cases} 16, & n = 8, \\ 20, & n = 9, \\ 4n-18, & n = 2k+4, \quad k < 3 \\ 4n-20, & n = 2k+5, \quad k \geqslant 3, n \geqslant 8 \end{cases}$.

## 2. Доказательство теоремы 1

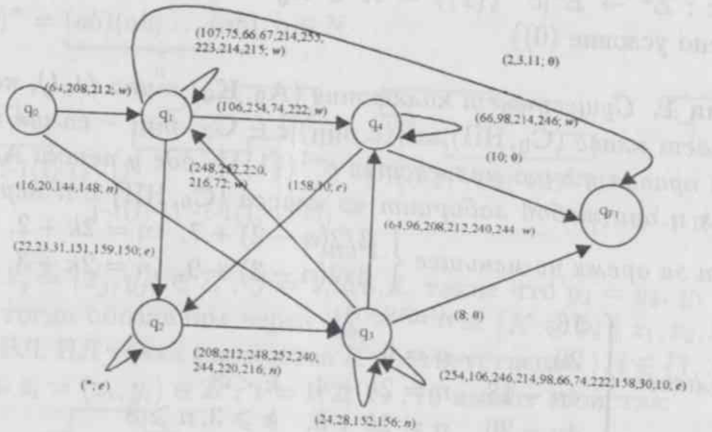
Так как будут рассматриваться только регулярные пешки, то можем пользоваться более короткой записью: входной алфавит есть множество $A = \{0, 1, \dots, 255\}$ вместо $(E^2)^9$, полученное кодированием $\sum_{i=1}^{8} a_i 2^{i-1}$ элементов $(1, a_1, \dots, a_8) \in (E^2)^9$.

**Лемма 1.** *Существует пешка* $\mathbf{A}_{\Phi_i} = (A, Q_i, B, \varphi_i, \psi_i, q_0, Q_F)$, *которая распознает класс инициальных* $\pi$*-лабиринтов* $(\Phi_i, \text{НП}) = \{(c, p_{\text{НП}}) | c^{-1}(\{1\}) \in \Phi_i; p_{\text{НП}}$ *– НП точка множества* $c^{-1}(\{1\})\}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

**Доказательство.** Пешки $\mathbf{A}_{\Phi_i}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, уже построены в [5]. Построим пешку $\mathbf{A}_{\Phi_4}$.

Не будем записывать переходы в состояние $q_{F_0}$; предполагаем, что это получается для каждого $a \in A$, которое не записано как вход любого состояния. Также используем обозначение $(*, w)$, где $w \in D$; предполагая, что автомат движется в направлении $w$ для каждого $a \in A$, которое не записано как вход этого состояния.

Автомат $\mathbf{A}_{\Phi_4}$:




Заметим, что в доказательстве теоремы 1.1 в [4] пешка не знает, находится ли она в окрестности конечной или бесконечной дыры. Ей нужна дополнительная информация.

Рассмотрим функционирование коллектива $(\mathbf{A}_0, \mathbf{K}_0)$, который построим на следующем этапе.

Из определения класса $\mathbf{C}_0$ следует что если $c \in \mathbf{C}_0$, тогда множество $c^{-1}(\{1\})$ можно горизонтальными отрезками разделить на подмножества $C_j$, $j \in (1, \ldots, 6)$, так что для каждого $j \in \{1, \ldots, 6\}$ существует $l \in \{1, \ldots, 4\}$ такое, что $C_j \in \Phi_l$.

Пусть $c \in \mathbf{C}_0$ и $c^{-1}(\{1\}) = K$. Автомат начинает движение в точке $z_1$ из определения множества $K$. Обходится множество $K$ тем же самым способом, как автоматы в лемме 1, в некоторый момент автомат (и камень, который все время рядом с ним) будет находиться в окрестности конечной дыры. Автомат-камень $\mathbf{K}_0$ тогда «остается» в одной точке лабиринта и помнит, что автомат $\mathbf{A}_0$ был в этой точке.



В дальнейшем поведении автомата $\mathbf{A}_0$ нужно, чтобы при обходе конечной дыры в том же самом направлении, он в некоторый момент снова оказался в точке, где находится камень $\mathbf{K}_0$, то есть автомат $\mathbf{A}_0$ обходит конечную дыру.

Построим коллектив $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{A}_0, \mathbf{K}_0)$.

В описании автомата $\mathbf{A}_0$ предполагаем существование «приоритета» между входными буквами некоторого состояния, который определяем как «описан раньше». Воспользуемся кодировкой, которую ввели ранее. Для элемента входного алфавита автомата $\mathbf{A}_0$ можем пользоваться более короткой записью $(s, a)$, где $s = \lambda$ (пустой символ) или $s = q_{k_0}$; $Q_{\mathbf{K}_0} = \{q_{k_0}\}$, $a \in \{0, 1, \ldots, 255\}$. Также в описании автомата $\mathbf{A}_0$ опустим код состояния автомата-камня $\mathbf{K}_0$, пишем его только в части функционирования автомата $\mathbf{A}_0$, где оно зависит от автомата-камня $\mathbf{K}_0$.

Коллектив $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{A}_0, \mathbf{K}_0)$ построим следующим образом:

$Q_0 = \{q_i | i \in \{1, \ldots, 40\}\} \cup Q_F$,

$\varphi_0(q_1, a) = q_4$, $\psi_0(q_1, a) = n$ для $a = 148$,
$\varphi_0(q_1, a) = q_2$, $\psi_0(q_1, a) = w$ для $a \in \{208, 212\}$,
$\varphi_0(q_1, a) = q_9$, $\psi_0(q_1, a) = w$ для $a \in \{80, 84\}$,
$\varphi_0(q_1, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_1, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_2, a) = q_2$, $\psi_0(q_2, a) = w$ для $a \in \{255, 223, 214, 215\}$,
$\varphi_0(q_2, a) = q_3$, $\psi_0(q_2, a) = e$ для $a \in \{22, 23, 31, 150, 151, 159\}$,
$\varphi_0(q_2, a) = q_9$, $\psi_0(q_2, a) = w$ для $a \in \{127, 95, 86, 87\}$,
$\varphi_0(q_2, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_2, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_3, a) = q_4$, $\psi_0(q_3, a) = n$ для $a \in \{208, 212, 240, 244, 248, 252\}$,
$\varphi_0(q_3, a) = q_3$, $\psi_0(q_3, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_0(q_3, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_3, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_4, a) = q_5$, $\psi_0(q_4, a) = w$ для $a \in \{208, 212, 240, 244\}$,
$\varphi_0(q_4, a) = q_2$, $\psi_0(q_4, a) = w$ для $a \in \{248, 252\}$,
$\varphi_0(q_4, a) = q_6$, $\psi_0(q_4, a) = e$ для $a \in \{74, 78, 202, 94, 206, 218, 106, 110,$

234, 126, 238, 250, 210, 242},
$\varphi_0(q_4, a) = q_4$, $\psi_0(q_4, a) = e$ для $a \in \{214, 246, 222, 254\}$,
$\varphi_0(q_4, a) = q_9$, $\psi_0(q_4, a) = w$ для $a \in \{120, 124\}$,
$\varphi_0(q_4, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_4, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_5, a) = q_5$, $\psi_0(q_5, a) = w$ для $a \in \{214, 246\}$,
$\varphi_0(q_5, a) = q_2$, $\psi_0(q_5, a) = w$ для $a \in \{222, 254\}$,
$\varphi_0(q_5, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_5, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_6, a) = q_6$, $\psi_0(q_6, a) = e$ для $a \in \{98, 102, 118, 246, 226, 230, 66, 70, 86, 214, 194, 198\}$,
$\varphi_0(q_6, a) = q_7$, $\psi_0(q_6, a) = w$ для $a \in \{112, 116, 244, 240, 80, 84, 208, 212\}$,
$\varphi_0(q_6, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_6, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_7, a) = q_7$, $\psi_0(q_7, a) = w$ для $a \in \{98, 102, 118, 246, 66, 70, 86, 214, 242, 210\}$,
$\varphi_0(q_7, a) = q_8$, $\psi_0(q_7, a) = w$ для $a \in \{74, 78, 94, 218, 106, 110, 126, 250, 254, 222\}$,
$\varphi_0(q_7, a) = q_7$, $\psi_0(q_7, a) = w$ для $a \in \{194, 198, 226, 230\}$,
$\varphi_0(q_7, a) = q_8$, $\psi_0(q_7, a) = w$ для $a \in \{202, 206, 234, 238\}$,
$\varphi_0(q_7, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_7, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_8, a) = q_8$, $\psi_0(q_8, a) = w$ для $a \in \{255, 223, 215, 251, 219, 211, 71, 79, 111, 107, 75, 67, 214, 66, 210\}$,
$\varphi_0(q_8, a) = q_{10}$, $\psi_0(q_8, a) = e$ для $a \in \{22, 23, 31, 150, 151, 159\}$,
$\varphi_0(q_8, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_8, a) = n$ для $a \in \{18, 19, 27, 146, 147, 155\}$,
$\varphi_0(q_8, a) = q_8$, $\psi_0(q_8, a) = w$ для $a \in \{194, 195, 198, 199, 203, 207, 235, 239\}$,
$\varphi_0(q_8, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_8, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_9, a) = q_9$, $\psi_0(q_9, a) = w$ для $a \in \{211, 67, 210, 66, 255, 223, 70, 71, 107, 75, 215, 111, 79, 219, 251, 214\}$,
$\varphi_0(q_9, a) = q_{10}$, $\psi_0(q_9, a) = e$ для $a \in \{22, 23, 31, 150, 151, 159\}$,
$\varphi_0(q_9, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_9, a) = n$ для $a \in \{18, 19, 27, 146, 147, 155\}$,



$\varphi_0(q_9, a) = q_9$, $\psi_0(q_9, a) = w$ для $a \in \{194, 195, 198, 199, 203, 207, 235, 239\}$,
$\varphi_0(q_9, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_9, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{10}, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_{10}, a) = n$ для $a \in \{210, 211, 219, 218, 250, 251, 242\}$,
$\varphi_0(q_{10}, a) = q_{10}$, $\psi_0(q_{10}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{10}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{10}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_{11}, a) = w$ для $a \in \{214, 66, 194, 210, 248, 104, 232, 203, 215, 211, 67, 195, 216, 200, 72, 255, 223, 251, 219, 107, 75, 235, 249, 233, 105, 217, 201, 73\}$,
$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_{11}, a) = n$ для $a \in \{18, 19, 24, 25, 28, 29, 27, 146, 147, 152, 153, 155\}$,
$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{12}$, $\psi_0(q_{11}, a) = e$ для $a \in \{22, 23, 31, 150, 151, 159\}$,
$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{13}$, $\psi_0(q_{11}, a) = w$ для $a \in \{253, 125, 221, 93, 95, 127, 88, 92, 220, 252, 124, 120, 121, 89\}$,
$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{15}$, $\psi_0(q_{11}, a) = e$ для $a \in \{10, 14, 30\}$,
$\varphi_0(q_{11}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{11}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{12}, a) = q_{11}$, $\psi_0(q_{12}, a) = n$ для $a \in \{210, 211, 216, 217, 219, 248, 249, 251\}$,
$\varphi_0(q_{12}, a) = q_{12}$, $\psi_0(q_{12}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{12}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{12}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{13}, a) = q_{13}$, $\psi_0(q_{13}, a) = w$ для $a \in \{107, 111, 214, 223, 255, 127, 215, 95\}$,
$\varphi_0(q_{13}, a) = q_{14}$, $\psi_0(q_{13}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 7, 43, 47\}$,
$\varphi_0(q_{13}, a) = q_{15}$, $\psi_0(q_{13}, a) = n$ для $a \in \{22, 23, 31, 63\}$,
$\varphi_0(q_{13}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{13}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{14}, a) = q_{14}$, $\psi_0(q_{14}, a) = e$ для $a \in \{107, 111, 79\}$,
$\varphi_0(q_{14}, a) = q_{15}$, $\psi_0(q_{14}, a) = n$ для $a \in \{88, 89, 92, 93, 95, 125, 127, 120,$

121, 124},
$\varphi_0(q_{14}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{14}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{15}, a) = q_{15},\ \psi_0(q_{15}, a) = e$ для $a \in \{246, 63, 30, 10, 14, 110, 111, 214, 66, 70, 86, 254, 126, 127, 106, 107, 43, 47, 62, 46, 42, 255, 31, 15, 11, 118, 98, 102\}$,
$\varphi_0(q_{15}, a) = q_{15},\ \psi_0(q_{15}, a) = n$ для $a \in \{56, 60, 124, 120, 24, 28, 112, 116, 80, 84\}$,
$\varphi_0(q_{15}, a) = q_{16},\ \psi_0(q_{15}, a) = w$ для $a \in \{208, 212, 240, 244, 248, 252\}$,
$\varphi_0(q_{15}, a) = q_{17},\ \psi_0(q_{15}, a) = e$ для $a \in \{242, 247, 243, 119, 114, 115, 103, 99, 250, 251, 122, 123, 215, 210, 211, 67, 71, 87, 82, 83\}$,
$\varphi_0(q_{15}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{15}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{16}, a) = q_{15},\ \psi_0(q_{16}, a) = n$ для $a \in \{30, 31, 62, 63, 86, 118, 126, 127\}$,
$\varphi_0(q_{16}, a) = q_{16},\ \psi_0(q_{16}, a) = w$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{16}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{16}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{17}, a) = q_{17},\ \psi_0(q_{17}, a) = e$ для $a \in \{66, 67, 106, 107, 98, 99, 194, 195, 226, 227, 234, 235\}$,
$\varphi_0(q_{17}, a) = q_{18},\ \psi_0(q_{17}, a) = s$ для $a \in \{223, 219, 216, 217, 200, 201, 203, 91, 95, 75, 79, 72, 73\}$,
$\varphi_0(q_{17}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{17}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{18},\ \psi_0(q_{18}, a) = e$ для $a \in \{107, 66, 67, 75, 31, 22, 23, 235, 203, 194, 195, 27, 18, 19, 255, 251, 223, 219, 214, 210, 215, 211, 159, 151, 150, 155, 146, 147\}$,
$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{18},\ \psi_0(q_{18}, a) = s$ для $a \in \{24, 25, 72, 73, 152, 153, 216, 217, 200, 201, 184, 56\}$,
$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{19},\ \psi_0(q_{18}, a) = w$ для $a \in \{104, 105, 232, 233, 248, 249\}$,
$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{20},\ \psi_0(q_{18}, a) = e$ для $a \in \{154, 158, 30, 62, 63, 59, 58, 26, 254, 250, 186, 187, 190, 191\}$,
$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{18}, a) = w$ для $a \in \{80, 112, 120\}$,
$\varphi_0(q_{18}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{18}, a) = 0$ иначе,



$\varphi_0(q_{19}, a) = q_{18},\ \psi_0(q_{19}, a) = s$ для $a \in \{223, 219, 203, 75, 31, 159, 27, 155\}$,
$\varphi_0(q_{19}, a) = q_{19},\ \psi_0(q_{19}, a) = w$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{19}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{19}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{20}, a) = q_{20},\ \psi_0(q_{20}, a) = e$ для $a \in \{235, 246, 214, 251, 254, 255, 250, 107\}$,
$\varphi_0(q_{20}, a) = q_{21},\ \psi_0(q_{20}, a) = w$ для $a \in \{208, 212, 224, 240, 244\}$,
$\varphi_0(q_{20}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{20}, a) = s$ для $a \in \{104, 232, 248, 252\}$,
$\varphi_0(q_{20}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{20}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{21}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{21}, a) = s$ для $a \in \{154, 158, 30, 62, 58, 26, 254, 250, 186, 190\}$,
$\varphi_0(q_{21}, a) = q_{21},\ \psi_0(q_{21}, a) = w$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{21}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{21}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{22}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{22}, a) = w$ для $a \in \{246, 66, 98, 120, 80, 112, 106, 107, 255, 127, 254, 126, 214, 86, 118, 248, 240, 208, 70, 102, 110, 124, 116, 84, 252, 244, 212, 111\}$,
$\varphi_0(q_{22}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{22}, a) = s$ для $a \in \{14, 46, 28, 60, 62, 30, 24, 56, 10, 42\}$,
$\varphi_0(q_{22}, a) = q_{23},\ \psi_0(q_{22}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 31, 43, 47, 63\}$,
$\varphi_0(q_{22}, a) = q_{24},\ \psi_0(q_{22}, a) = w$ для $a \in \{222, 78, 95, 223, 94, 74, 79, 75\}$,
$\varphi_0(q_{22}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{22}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{23}, a) = q_{22},\ \psi_0(q_{23}, a) = s$ для $a \in \{126, 120, 106, 124, 252, 248, 110, 254\}$,
$\varphi_0(q_{23}, a) = q_{23},\ \psi_0(q_{23}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{23}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{23}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{24}, a) = q_{24},\ \psi_0(q_{24}, a) = w$ для $a \in \{215, 87, 67, 71, 214, 86, 70, 66\}$,
$\varphi_0(q_{24}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{24}, a) = 0$ иначе,

$\varphi_0(q_{25}, a) = q_{25}$, $\psi_0(q_{25}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1, a_4 = 0\}$,
$\varphi_0(q_{25}, a) = q_{25}$, $\psi_0(q_{25}, a) = n$ для $a \in \{b \in A | 24 \leqslant b \leqslant 31$ или $56 \leqslant b \leqslant 63$ или $80 \leqslant b \leqslant 95$ или $112 \leqslant b \leqslant 127\}$,
$\varphi_0(q_{25}, a) = q_{26}$, $\psi_0(q_{25}, a) = n$ для $a \in \{b \in A | 144 \leqslant b \leqslant 159$ или $184 \leqslant b \leqslant 191\}$,
$\varphi_0(q_{25}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{25}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{26}$, $\psi_0(q_{26}, a) = w$ для $a \in \{b \in A | 64 \leqslant b \leqslant 103$ или $112 \leqslant b \leqslant 119$ или $192 \leqslant b \leqslant 231$ или $240 \leqslant b \leqslant 247\}$,
$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{26}$, $\psi_0(q_{26}, a) = n$ для $a \in \{b \in A | 16 \leqslant b \leqslant 29$ или $b = 31$ или $144 \leqslant b \leqslant 159\}$,
$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{27}$, $\psi_0(q_{26}, a) = w$ для $a \in \{106, 110, 122, 126, 234, 250, 254\}$,
$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{30}$, $\psi_0(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{10, 42\}$,
$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{28}$, $\psi_0(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{14, 30, 46, 62\}$,
$\varphi_0(q_{26}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{26}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{27}, a) = q_{27}$, $\psi_0(q_{27}, a) = w$ для $a \in \{107, 111, 127, 123, 235, 251, 255\}$,
$\varphi_0(q_{27}, a) = q_{28}$, $\psi_0(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{15, 31, 63, 47\}$,
$\varphi_0(q_{27}, a) = q_{30}$, $\psi_0(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{11, 43\}$,
$\varphi_0(q_{27}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{27}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{28}$, $\psi_0(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{254, 255, 246, 247, 214, 215, 126, 127, 118, 119, 86, 87\}$,
$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{29}$, $\psi_0(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{122, 123, 114, 115, 82, 83, 250, 251, 242, 243, 210, 211\}$,
$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{31}$, $\psi_0(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{95, 223\}$,
$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{32}$, $\psi_0(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{91, 219\}$,
$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{36}$, $\psi_0(q_{28}, a) = n$ для $a \in \{216, 217\}$,
$\varphi_0(q_{28}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{28}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{29}, a) = q_{29}$, $\psi_0(q_{29}, a) = e$ для $a \in \{234, 235, 226, 227, 194, 195, 106, 107, 98, 99, 66, 67\}$,



$\varphi_0(q_{29}, a) = q_{32}$, $\psi_0(q_{29}, a) = e$ для $a \in \{203, 75\}$,
$\varphi_0(q_{29}, a) = q_{35}$, $\psi_0(q_{29}, a) = w$ для $a \in \{200, 201, 72, 73\}$,
$\varphi_0(q_{29}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{29}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{30}$, $\psi_0(q_{30}, a) = e$ для $a \in \{66, 67, 98, 99, 106, 107\}$,
$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{28}$, $\psi_0(q_{30}, a) = e$ для $a \in \{110, 111, 102, 103, 70, 71\}$,
$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{F_1}$, $\psi_0(q_{30}, a) = \mathbf{0}$ для $a \in \{72, 73\}$,
$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{31}$, $\psi_0(q_{30}, a) = e$ для $a = 79$,
$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{33}$, $\psi_0(q_{30}, a) = e$ для $a = 75$,
$\varphi_0(q_{30}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{30}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{31}, a) = q_{36}$, $\psi_0(q_{31}, a) = n$ для $a \in \{248, 249\}$,
$\varphi_0(q_{31}, a) = q_{31}$, $\psi_0(q_{31}, a) = e$ для $a \in \{127, 255\}$,
$\varphi_0(q_{31}, a) = q_{32}$, $\psi_0(q_{31}, a) = e$ для $a \in \{123, 251\}$,
$\varphi_0(q_{31}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{31}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{32}, a) = q_{35}$, $\psi_0(q_{32}, a) = w$ для $a \in \{72, 73, 104, 105, 232, 233\}$,
$\varphi_0(q_{32}, a) = q_{32}$, $\psi_0(q_{32}, a) = e$ для $a \in \{107, 235\}$,
$\varphi_0(q_{32}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{32}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{33}, a) = q_{F_1}$, $\psi_0(q_{33}, a) = \mathbf{0}$ для $a \in \{104, 105\}$,
$\varphi_0(q_{33}, a) = q_{33}$, $\psi_0(q_{33}, a) = e$ для $a = 107$,
$\varphi_0(q_{33}, a) = q_{34}$, $\psi_0(q_{33}, a) = e$ для $a = 111$,
$\varphi_0(q_{33}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{33}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{34}, a) = q_{34}$, $\psi_0(q_{34}, a) = e$ для $a \in \{127, 255\}$,
$\varphi_0(q_{34}, a) = q_{36}$, $\psi_0(q_{34}, a) = n$ для $a \in \{248, 249\}$,
$\varphi_0(q_{34}, a) = q_{32}$, $\psi_0(q_{34}, a) = e$ для $a \in \{123, 251\}$,
$\varphi_0(q_{34}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{34}, a) = \mathbf{0}$ иначе.

$\varphi_0(q_{35}, a) = q_{36}$, $\psi_0(q_{35}, a) = n$ для $a \in \{210, 114, 115, 122, 123, 82, 242, 243, 250, 251, 219, 83, 211, 91\}$,
$\varphi_0(q_{35}, a) = q_{35}$, $\psi_0(q_{35}, a) = w$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{35}, a) = q_{F_0}$, $\psi_0(q_{35}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{36},\ \psi_0(q_{36}, a) = n$ для $a = 123$,
$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{36},\ \psi_0(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{104, 105, 107, 232, 233, 235\}$,
$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{37},\ \psi_0(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{248, 249, 251\}$,
$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{40},\ \psi_0(q_{36}, a) = s$ для $a = 41$,
$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{F_1},\ \psi_0(q_{36}, a) = \mathbf{0}$ для $a \in \{11, 43\}$,
$\varphi_0(q_{36}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{36}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{37}, a) = q_{37},\ \psi_0(q_{37}, a) = w$ для $a = 255$,
$\varphi_0(q_{37}, a) = q_{39},\ \psi_0(q_{37}, a) = e$ для $a \in \{31, 63\}$,
$\varphi_0(q_{37}, a) = q_{38},\ \psi_0(q_{37}, a) = w$ для $a = 127$,
$\varphi_0(q_{37}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{37}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{38}, a) = q_{38},\ \psi_0(q_{38}, a) = w$ для $a \in \{107, 111\}$,
$\varphi_0(q_{38}, a) = q_{39},\ \psi_0(q_{38}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 43, 47\}$,
$\varphi_0(q_{38}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{38}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{39}, a) = q_{36},\ \psi_0(q_{38}, a) = n$ для $a \in \{248, 249, 251\}$,
$\varphi_0(q_{39}, a) = q_{39},\ \psi_0(q_{39}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_0(q_{39}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{39}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_0(q_{40}, a) = q_{40},\ \psi_0(q_{40}, a) = w$ для $a \in \{82, 83, 91, 114, 115, 122, 123, 70, 71, 79, 102, 103, 110, 111, 66, 67, 75, 98, 99, 106, 107\}$,
$\varphi_0(q_{40}, a) = q_{F_1},\ \psi_0(q_{40}, a) = \mathbf{0}$ для $a \in \{10, 11, 14, 15, 42, 43, 46, 47\}$,
$\varphi_0(q_{40}, a) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{40}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

Пусть $M = \{194, 195, 198, 199, 202, 203, 206, 207, 226, 230, 234, 235, 238, 239\} \subseteq A$. Тогда $\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_i\}, a)) = \psi_0(q_i, (\{q_{k0}\}, a))$ для $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a \in A$,

$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_7\}, a)) = \mathbf{0}$ $a \in M_1 = \{202, 206, 234, 238, 194, 198, 226, 230\} \subset M$,
$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_7\}, a)) = \psi_0(q_7, (\{q_{k0}\}, a))$ для $a \notin M_1$,

$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_8\}, a)) = \mathbf{0}$ $a \in M_1 = \{195, 194, 203, 239, 207, 235\} \subset M$,
$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_8\}, a)) = \psi_0(q_8, (\{q_{k0}\}, a))$ для $a \notin M_1$,



$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_9\}, a)) = \mathbf{0}$ $a \in M_1 = \{195, 194, 203, 239, 207, 235, 198, 199\} \subset M$,
$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_9\}, a)) = \psi_0(q_9, (\{q_{k0}\}, a))$ для $a \notin M_1$,

$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_{22}\}, a)) = \mathbf{0}, a \in A$,
$\varphi_0(q_{22}, (\{q_{k0}\}, a)) = q_{25},\ \psi_0(q_{22}, (\{q_{k0}\}, a)) = e$ для $a \in M \setminus \{195, 199\}$,
$\varphi_0(q_{22}, (\{\lambda\}, a)) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{22}, (\{\lambda\}, a) = \mathbf{0}$ для $a \in M \setminus \{195, 199\}$, то есть если автоматы $\mathcal{A}_0, \mathbf{K}_0$ не встретятся,

$\psi_{k0}(q_{k0}, (\{q_{24}\}, a)) = \mathbf{0}, a \in A$,
$\varphi_0(q_{24}, (\{q_{k0}\}, a)) = q_{25},\ \psi_0(q_{24}, (\{q_{k0}\}, a)) = e$ для $a \in \{194, 195, 198, 199\} \subset M$,
$\varphi_0(q_{24}, (\{\lambda\}, a)) = q_{F_0},\ \psi_0(q_{24}, (\{\lambda\}, a)) = \mathbf{0}$ для $a \in \{194, 195, 198, 199\}$, то есть если автоматы $\mathcal{A}_0, \mathbf{K}_0$ не встретятся.

Из того, что данный автомат обходит лабиринт, для каждого $n \geqslant 8$ мы всегда можем построить лабиринты $L, L' \in \mathbf{C}_0$, такие что $\|V(L)\| = \|V(L')\| = n$, чтобы время обхода для лабиринта $L$ было минимально, а для лабиринта $L'$ - максимально.

Таким же способом можно определить двусвязные цифры 4, 6 и 9. Можно показать, что существует коллектив типа (1, 1), который распознает эти цифры.

## Список литературы


[1] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2. С. 71 - 81.

[2] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[4] Стаматович Б. Распознавание лабиринтов автоматами // Дискретная математика. (В печати).

[5] Стаматович Б. Распознавание односвязных цифр автоматом // Интелектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3 - 4.