*2. Если не выполняются условия пункта 1 Теоремы, и* $|F| = 1, F \subseteq P_{pr} \cup R_{pr}$, *или* $|F| = 2$ *и* $F = \{f(x,y), f_{\neg}(x)\}$, *где* $f(x,y) \in R_{pr}$, *то* $S_F(n) \asymp \log_2 n$.

*3. Во всех остальных случаях* $S_F(n) \asymp n$.

## Список литературы


[1] Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов М.: Наука, 1985.

[3] Андреев А.Е., Часовских А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения формул // Вестник МГУ. Сер. Мат., мех. 1996. №4.

[4] Кудрин А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения функций, заданных в префиксном виде // Вестник МГУ. Сер. Мат., мех. 1998. №1.


# Оценка отклонения разделяющей плоскости пороговой функции от вершин единичного куба

М.В. Носов


В работе получена нижняя оценка расстояния от вершин единичного куба до разделяющей плоскости для произвольной пороговой функции. Аналогичным образом могут быть получены нижние оценки для произвольных двух конечных множеств, разделимых гиперплоскостью. С использованием преобразования спрямления получаются нижние оценки расстояний для конечных множеств, разделимых более сложными поверхностями. В линейном случае эти оценки дают верхние оценки числа исправлений в теореме Новикова для алгоритма Розенблата.


Используя известную технику, докажем два утверждения. Пусть $F(t)$ – пороговая функция, $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

**Лемма 1.** *Любая пороговая функция* $F(t)$ *может быть задана гиперплоскостью, определяемой уравнением* $c_1 t_1 + \ldots + c_n t_n + c_0 = 0$ *так, что*

$$F(t) = 1 \iff c_1 t_1 + \ldots + c_n t_n + c_0 \geqslant 1,$$

$$F(t) = 0 \iff c_1 t_1 + \ldots + c_n t_n + c_0 \leqslant -1.$$

**Утверждение 1.** *Пусть* $B^n$ *–* $n$*-мерный единичный куб,* $F(t)$ *– пороговая функция, тогда существует такое задание* $F(t)$ *гиперплоскостью, что расстояние от любой вершины* $B^n$ *до этой гиперплоскости не меньше, чем* $1/(\sqrt{n(n+1)}^{n+1})$.

**Доказательство.** По лемме 1 функция $F(t)$ может быть задана гиперплоскостью, значит совместна система $2^n$ линейных неравенств:

$$c_1t_1 + \ldots + c_nt_n + c_0 \geqslant 1 \text{ при } F(t) = 1,$$

$$c_1t_1 + \ldots + c_nt_n + c_0 \leqslant -1 \text{ при } F(t) = 0.$$

Исходя из принципа граничных решений [1], найдется такая подсистема из $(n+1)$ неравенств, среди решений которой есть такое, которое превращает все неравенства подсистемы в равенства и удовлетворяет исходной системе $2^n$ неравенств. Таким образом, есть система $(n+1)$ линейных уравнений, решение которой является решением системы линейных неравенств:

$$c_1t_{j1} + \ldots + c_nt_{jn} + c_0 = \delta_j$$

$$F(t_{j1}, \ldots, t_{jn}) = \begin{cases} 1, & \delta_j = 1, \\ 0, & \delta_j = -1 \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, n+1.$$

По правилу Крамера решение системы имеет вид

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, c_n = \frac{D_n}{D}, c_0 = \frac{D_0}{D},$$

где $D, D_1, \ldots, D_n, D_0$ – соответствующие определители, получаемые из расширенной матрицы системы уравнений. Тогда расстояние $\rho$ от произвольной вершины до гиперплоскости есть

$$\rho = \frac{|c_1t_1 + \ldots + c_nt_n + c_0|}{\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2}} \geqslant \frac{|D|}{\sqrt{D_1^2 + \ldots + D_n^2}}.$$

Элементами матриц $D, D_1, \ldots, D_n, D_0$ являются числа 1, -1, 0, поэтому $|D| \geqslant 1$ и каждое $D_1, \ldots, D_n$ не более, чем произведение длин строк, значит

$$\rho \geqslant \frac{1}{\sqrt{n(n+1)^{n+1}}}.$$



Утверждение доказано.

Поместим $n$-мерный единичный куб в $(n+1)$-мерное пространство считая, что $t_{n+1}$ координата равна 1. Тогда, если в исходном пространстве точки разделялись гиперплоскостью $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n + a_0 = 0$, то в расширенном они будут разделяться гиперплоскостью $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n + a_0t_{n+1} = 0$, проходящей через начало координат.

**Следствие 1.** *При использовании алгоритма Розенблата [2] построения разделяющей гиперплоскости для вершин единичного куба, число исправлений не превосходит величины* $(n+1)^{n+3}$.

**Доказательство.** По теореме Новикова число исправлений $k \leqslant M^2/d^2$ для разделяющей поверхности, проходящей через начало координат, $M$ – величина радиуса шара с центром в начале координат, в который попадают все точки, $d$ – расстояние от точек куба до гиперплоскости. Пусть пороговая функция задается гиперплоскостью $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n + a_0 = 0$, тогда при переходе в $(n+1)$-мерное пространство разделяющая гиперплоскость будет иметь вид $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n + a_0t_{n+1} = 0$. Из доказательства утверждения следует, что

$$d \geqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)^{n+1}}},$$

значит, $k \leqslant (n+1)^{n+3}$.

Пусть $k_0$ – наибольшее число исправлений в алгоритме Розенблата для различных пороговых функций, так как координаты точек имеют значения 0, 1, -1, то из доказательства теоремы Новикова следует, что $|a_i| \leqslant k_0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Значит, любая пороговая функция задается целой точкой из $[-k_0, k_0]^{n+1}$. Число исправлений по каждой координате не больше, чем $k_0$, значит

$$N_1(n) \leqslant (k_0+1)^{n+1},$$

где $N_1(n)$ – число пороговых функций [4, 5]. Окончательно получаем

$$2^{n(1+o(1))} \leqslant k_0 \leqslant 2^{(n+3)\log(n+1)}.$$

При $n$ являющемся степенью 2 из [6] следует, что

$$2^{\frac{1}{2}n\log n(1+o(1))} \leqslant k_0 \leqslant 2^{(n+3)\log(n+1)}.$$

Этот подход можно использовать в общем случае. Пусть $X = \{x = (x_{i1}, \ldots, x_{in}),\ i = 1, \ldots, m\}$, $Y = \{y = (y_{j1}, \ldots, y_{jn}),\ j = 1, \ldots, l\}$, $|x| \leqslant K$, $|y| \leqslant K$, положим для простоты $k \geqslant 1$.

**Утверждение 2.** *Пусть множества $X$ и $Y$ разделяются гиперплоскостью, тогда можно построить такую разделяющую гиперплоскость, что расстояние от точек множеств $X$ и $Y$ до этой гиперплоскости не менее*

$$|D_{\min}|/\sqrt{n(k^2+1)^{n+1}},$$

*где $|D_{\min}|$ – наименьший по абсолютной величине определитель минора матрицы*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} & 1 \\ y_{11} & \cdots & y_{1n} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{l1} & \cdots & y_{ln} & -1 \end{pmatrix}$$

*ранг минора равен рангу матрицы. В частности, если множества $X$ и $Y$ состоят из точек с рациональными координатами и $q$ – максимум знаменателей при представлении координат точек в виде несократимых дробей, то расстояние не менее $1/(q^n\sqrt{n(k^2+1)^{n+1}})$.*

Помещаем множества в $(n+1)$-мерное пространство, как выше.

**Следствие 2.** *При построении алгоритмом Розенблата разделяющей гиперплоскости множеств $X$ и $Y$, число исправлений не превосходит величины*

$$(n+1)(k^2+1)^{n+2}/|D_{\min}|^2.$$



Пусть $F(t)$ – $M_k$-пороговая функция [3], задаваемая многочленом $f(t)$, $\deg f(t) \leqslant k$. Аналогично лемме 1 имеет место

**Лемма 2.** *Любая $M_k$-пороговая функция $F(t)$ может быть задана поверхностью, определяемой уравнением $f(t) = 0$ так, что*

$$F(t) = 1 \iff f(t) \geqslant 1,$$

$$F(t) = 0 \iff f(t) \leqslant -1.$$

Пусть $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \\ 0 \leqslant i_1 + \ldots + i_n \leqslant k \\ i_1 \geqslant 0, \ldots, i_n \geqslant 0}} a_{i_1, \ldots, i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n},$$

определим отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\sum_{j=1}^{k} c_n^j}$$

$$\varphi : (t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow (t_1, \ldots, t_n, t_1t_2, \ldots, t_{n-1}t_n, t_1t_2t_3, \ldots).$$

Если $t \in B^n$, то получаем на коэффициенты $f(t)$ $2^n$ линейных неравенств. Индукцией по $n$ можно показать, что ранг системы равен $\sum_{j=0}^{k} c_n^j$.

Пусть $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v \in B^n$, пусть $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u \in \mathbb{R}^n$ принадлежит разделяющей поверхности и является ближайшей к некоторой вершине куба, если $\Delta = \max_{i=1,\ldots,n} |u_i - v_i|$, тогда $|\Delta| \leqslant 1$, далее

$$|u_1 \ldots u_s - v_1 \ldots v_s| = |((u_1 - v_1) + v_1) \ldots ((u_s - v_s) + v_s) - v_1 \ldots v_s)| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta^s + c_s^1\Delta^{s-1} + \ldots + c_s^{s-1}\Delta = \Delta(\Delta^{s-1} + c_s^1\Delta^{s-2} + \ldots + c_s^{s-1}) \leqslant \Delta(2^s - 1) < 2^s\Delta.$$

Следовательно,

$$d^2(\varphi(u), \varphi(v)) \leqslant \sum_{j=1}^{k} c_n^j 2^{2j}\Delta^2 < \Delta^2 5^k \leqslant 5^k d^2(u, v).$$

**Утверждение 3.** *Пусть $F(t)$ – $M_k$-пороговая функция, тогда существует такое задание $F(t)$ многочленом $f(t)$, что сферы с центрами в вершинах $n$-мерного единичного куба и радиуса*

$$\frac{1}{5^{\frac{k}{2}}\sqrt{\left(\sum_{j=0}^{k} c_n^j\right)^{\sum_{j=0}^{k} c_n^j+1}}}$$

*не пересекают повехность, задаваемую уравнением* $f(t) = 0$.

Автор благодарит Алешина С.В. и Зуева Ю.А. за предоставленную информацию.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №99-01-00317.

## Список литературы

[1] Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

[2] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.

[3] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. М.: изд-во МГУ, 1996.

[4] Зуев Ю.А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Доклады АН СССР. 1989. Т. 306. Вып. 3. С. 528-530.

[5] Ирматов А.А. О числе пороговых функций. Дискретная математика. 1993. Т. 5. №3. С. 40-43.

[6] Hastad J. On the size of weights for threshold gates // SIAM J. Discrete Math. 1994. V. 7. N. 3. P. 484-492.

# О метрической сложности событий, представимых полиномиальными автоматами

А.Н. Руденко, А.С. Строгалов

В статье рассматривается асимптотическое поведение функции роста $G(N)$ полиномиального автомата-акцептора, представляющей для заданного автомата число слов длины не более $N$, распознаваемых данным автоматом. Для этой функции находится простейший асимптотически эквивалентный ей полином (моном). Описывается класс таких простейших полиномов, в точности состоящий из тех полиномов, каждый из которых является асимптотически эквивалентным некоторой функции роста полиномиального автомата.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – конечный алфавит, и $A^*$ – множество всех слов (конечных последовательностей) над $A$; подмножество $L \subseteq A^*$ называется языком $L$ над алфавитом $A$. Мы рассматриваем автоматы-акцепторы (распознаватели), понимаемые как пятерка $M = \langle A, Q, \varphi, q_0, Q_F \rangle$; где $A, Q$ – конечные алфавиты, входной и состояний соответственно, $Q_F \subseteq Q$ называется множеством финальных состояний, $q_0$ – начальное состояние, а $\varphi : A \times Q \to Q$ – функция переходов автомата. Все неопределяемые далее в тексте понятия взяты из [1].

Язык $L_M \subseteq A^*$ распознается автоматом $M$, если при подаче любого слова $\ell \in L_M$ на вход автомата он переходит из состояния $q_0$ в одно из состояний $Q_F$. Иными словами, $\varphi(q_0, \widetilde{\ell}) \in Q_F$, где $\varphi(q_0, \ell)$ – стандартное распространение функции $\varphi : Q \times A \to Q$ на множество слов $\widetilde{\ell} \in A^*$ [1]. Представим это множество слов в виде $L_M = \bigcup_i L_M(i)$, где $L_M(i)$ – множество слов длины $i$ в языке $L_M$.