щим понятием обхода.

Список литературы

[1] Budach L. Automata and labyrinth. Math. Nachrichten 86, 1978, 195–282.

[2] Hemmerling A. Labyrinth problems. Labyrinth-searching abilities of automata. Teubner-Texte zur Mathematik, v 114, Leipzig, 1989.

[3] Насыров А.З. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые метки. Дискретная математика. 1997, т. 9, №1, 123–133.

[4] Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[5] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Щ., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах. Дискретная математика. 1992, т. 4, №3, 3–28.

[6] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина. Дискретная математика. 1991, т. 3, №3, 135–146.

[7] Золотых А.А. Обход лабиринтов с ограниченными в фиксированных направлениях дырами. Дискретная математика. 1993, т. 5, №1, 59–69.

[8] Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. М.: Мир, 1973.

[9] Будах Л. Автоматы в лабиринтах. Пробл. кибернетики, 34, 1978, 83–74.

[10] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: изд-во Московского ун-та, 1985.

Об отличимости инициальных автоматных лабиринтов конечными автоматами

И.С. Грунский, Р.И. Олейник

Исследуется проблема распознавания неизвестных характеристик автоматных лабиринтов конечным автоматом, блуждающим по этим лабиринтам. Рассмотрены условия различения двух лабиринтов автоматом. Показано, что любые два неизоморфные лабиринта различаются экспериментом кратности не больше двух. Найдены точные верхние оценки наименьшего времени такого различения. Описан алгоритм построения таких экспериментов.

1. Введение

Рассматривается задача об отличимости автоматных лабиринтов конечным автоматом. Автоматные лабиринты представляют собой конечные орграфы переходов инициальных автоматов без выхода [1] и конечных отмеченных систем [2]. С помощью таких графов можно описывать различные ситуации [1] и динамику взаимодействия систем [2]. Конечный автомат стартует в начальной вершине одного из двух орграфов, блуждает по нему (при этом может оставлять отметки в вершинах этого орграфа), и за конечное время автомат должен выдать на выходе информацию, в каком именно графе он блуждал.

В работе устанавливаются точные верхние оценки наименьшего времени, за которое различаются два автоматных лабиринта. В отличие от [1], рассматриваются не только простые (однократные), но и двукратные эксперименты, что позволяет различать любые два неизоморфных автоматных лабиринта. Описан алгоритм построения таких экспериментов.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся основные определения и формулируются основные результаты. В разделе 3 проводится доказательство. В разделе 4 предлагается кодирование различающих экспериментов словами в некотором алфавите и строится конечный акцептор, представляющий множество всех кодов всех различающих экспериментов. Этот акцептор позволяет для заданной пары графов определить, существуют ли, и построить, если они существуют, различающие эксперименты.

Неопределяемые понятия общеприняты и их можно найти в [1, 3]. Желательно знакомство с работой [1].

2. Основные определения и формулировка результатов

Пусть $G = (G, V, X, g_0)$ – конечный ориентированный граф, у которого G – множество его вершин, V – множество дуг, X – множество отметок дуг, g_0 – выделенная начальная вершина. Пусть $|G|$ – это мощность множества G и $|G| = n$, $|X| = k$. Рассматриваются графы, для которых выполняются следующие условия:

1) из каждой вершины выходит ровно k дуг;
2) если из одной и той же вершины выходят разные дуги, то отметки этих дуг различны;
3) граф G может содержать петли и параллельные дуги;
4) все вершины графа достижимы из начальной. Через Γ_n обозначаем класс всех таких графов с одним и тем же множеством X и n вершинами.

Граф G представляет собой диаграмму переходов конечного автомата, и поэтому с ним взаимнооднозначно ассоциируется функция переходов: $gx = g'$, если в G существует дуга из вершины g в g' с отметкой x. Пусть X^* – множество всех слов конечной длины в алфавите X и e – пустое слово. Расширим функцию переходов на слова, полагая: $ge = g$, $g(px) = (gp)x$ для всех $g \in G$, $p \in X^*$, $x \in X$.

Графы G и H из Γ_n называются изоморфными, что обозначается $G = H$, если существует биекция $\varphi : G \to H$, для которой $\varphi(g_0) = h_0$ и $\varphi(gx) = \varphi(g)x$. Графу G ставится во взаимнооднозначное соответствие конгруенция ρ_G на X^*, для которой $(p, q) \in \rho_G$, если $g_0p = g_0q$, $p, q \in X^*$. Очевидно следующее полезное утверждение.

Лемма 1. *$G \neq H$ тогда и только тогда, когда существуют такие $p, q \in X^*$, что $(p, q) \in \rho_G \oplus \rho_H$.*

Здесь $\oplus$ – симметрическая разность отношений, то есть последнее соотношение равносильно соотношению

$$(g_0p = g_0q) \Leftrightarrow (h_0p \neq h_0q). \tag{1}$$

Пару $W = \{p, q\}$, удовлетворяющую (1), назовем экспериментом, различающим графы G и H. Используя определения автомата, блуждающего по графу, из [1], по эксперименту W легко построить конечный автомат, который из начального состояния графа проходит путь p и в его конечной вершине оставляет отметку. Затем он из начального состояния графа проходит путь q. Если в этом графе конечные вершины этих путей совпадают, то автомат находит отметку в конечной вершине пути q и выдает выходной сигнал 1. В противном случае, он ее не находит и выдает сигнал 0. Ясно, что такой автомат различает эти графы.

Пусть $p \leqslant q$, если слово p является начальным отрезком слова q. Если $p \leqslant q$, то построенному автомату не нужно начинать проход пути q с начала, а естественно, пройдя путь p и поставив отметку в конечной вершине этого пути, продолжить проход пути q до конца. Поэтому, если $p \leqslant q$ или $q \leqslant p$, то эксперимент W назовем простым, и кратным – в противном случае. Заметим, что одно из слов в простом эксперименте может быть пустым, в кратном – оба не пустые. Сложностью $C(W)$ эксперимента W назовем число $max(d(p), d(q))$, если он простой, и $d(p) + d(q)$, если он кратный. Здесь $d(p)$ – длина слова p, то есть число букв в нем. Эта сложность фактически определяет время различения графов в эксперименте. Эксперимент минимальной сложности назовем кратчайшим.

Результаты данной работы можно сформулировать в виде следующих утверждений. Пусть $k \geqslant 1, n \geqslant 2$.

Теорема 1. *Сложность кратчайшего эксперимента, различающего любые два неизоморфных графа из класса* Γ_n, *не превосходит* $C(n,k)$, *где*

$$C(n,k) = \begin{cases} 2n-4, & \text{если } k \geqslant 2, n \geqslant 3, \\ n & , \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

причем указанные оценки не допускают уменьшения.

Теорема 2. *Пусть* $m > n$. *Сложность кратчайшего эксперимента, различающего любые два графа* $G \in \Gamma_n$ *и* $H \in \Gamma_m$, *не превосходит* $C(n,m,k)$, *где*

$$C(n,m,k) = \begin{cases} 2n-2, & \text{если } k \geqslant 2, \\ n & , \text{если } k = 1, \end{cases}$$

причем указанные оценки не допускают уменьшения.

В разделе 3 при доказательстве этих утверждений приведены графы, которые различаются только простыми или только кратными экспериментами. Следующее утверждение понижает оценку теоремы 1.

Теорема 3. *Если для графов* $G, H \in \Gamma_n$ *существуют только простые различающие эксперименты, то сложность кратчайшего эксперимента не превосходит* n, *и эта оценка не допускает уменьшения.*

В разделе 3 будет показано, что если в условии этой теоремы ограничиться кратчайшими простыми экспериментами, то полученное утверждение не имеет места.

3. Доказательство теорем

Докажем теорему 1. Пусть $W = \{p, q\}$ – кратчайший эксперимент, различающий неизоморфные графы G и H из Γ_n. По лемме 1 он существует. Полагаем, что $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 2$.

Рассмотрим случай, когда W – кратный. Ясно, что при $k = 1$ все эксперименты простые поэтому, $k \geqslant 2$. Предположим, что существуют такие начальные отрезки r и s слова p длины i и j соответственно, $0 \leqslant i < j \leqslant d(p)$, что $g_0 r = g_0 s$. Пусть r и s – отрезки наименьшей длины с таким свойством. Тогда $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Пусть $s = rt$ и $p = su$ для некоторых слов t, u. Предположим, что слово u не пусто. Если $h_0 r = h_0 s$, то $g_0 p = g_0 ru$ и $h_0 p = h_0 ru$. Выбрасывая отрезок t из p, получаем $W' = \{ru, q\}$ – эксперимент меньшей сложности, различающий G и H, что противоречит предположению о том, что W – кратчайший. Если же $h_0 r \neq h_0 s$, то $W'' = \{r, s\}$ – это простой эксперимент сложности $d(s)$. Поскольку в W оба слова не пусты и $d(s) < d(p)$, то $C(W'') < C(W)$, что противоречит тому, что W – кратчайший. Таким образом, слово u не может быть непустым для кратчайшего W.

Предположим теперь, что $u = e$, то есть $p = s$. Тогда $0 \leqslant d(p) \leqslant n$. Пусть для определенности $g_0 p = g_0 q$ и $h_0 p \neq h_0 q$. Если $h_0 r = h_0 s$, то учитывая, что $p = s$, получаем, что $\{r, q\}$ является экспериментом меньшей сложности, чем W, что невозможно. Если же $h_0 r \neq h_0 s$, то $\{r, s\}$ является простым экспериментом сложности меньшей, чем $C(W)$, что невозможно. Из проведенных рассуждений следует, что для всех $0 \leqslant i < j \leqslant d(p)$ $g_0 r \neq g_0 s$. Так как в графах G и H число различных состояний равно n, то $d(p) \leqslant n - 1$. Точно так же доказывается, что $d(q) \leqslant n - 1$. Таким образом, $C(W) \leqslant 2n - 2$.

Лемма 2. *Для всех* $G, H \in \Gamma_n$, *где* $n = 2$ *и* $G \neq H$, *все кратчайшие эксперименты простые, их сложность не превосходит* n *и эта оценка достижима для всех* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $W = \{p, q\}$ – кратчайший кратный эксперимент. По сказанному выше $0 < d(p)$,

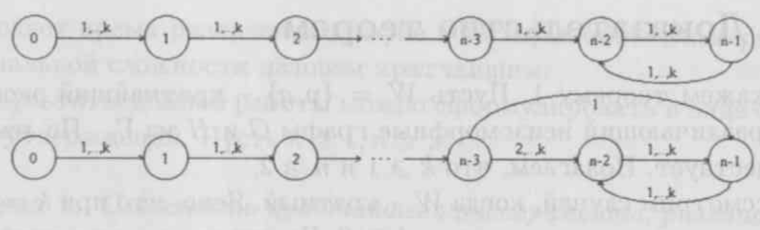

Рис. 1.

$d(q) \leqslant n-1$. Пусть $g_0p = g_0q$ и $h_0p \neq h_0q$. Так как $n=2$, то при $g_0p = g_0$ слова p, q отмечают две петли, а при $g_0p \neq g_0$ эти слова отмечают дуги, исходящие из g_0, не являющиеся петлями. Так как $h_0p \neq h_0q$ и $n=2$, то одно из слов отмечает петлю, а другое – не петлю. Пусть $h_0p = h_0$. Если $g_0p = g_0$, то пара $\{e, q\}$ образует простой эксперимент сложности меньшей $C(W)$. Если это равенство не выполняется, то такой эксперимент образует пара $\{e, p\}$. Полученное противоречие доказывает, что кратчайших кратных экспериментов не существует. В [1] показано, что сложность простых кратчайших экспериментов для $n=2$ не превосходит n. Эта оценка достижима для графов, у которых $g_0x = g_1$, $g_1x = g_0$ и $h_0x = h_1$, $h_1x = h_1$ для всех $x \in X$, поскольку $\{e, x^2\}$ является кратчайшим различающим экспериментом. Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение кратного W. Поскольку он кратный, то $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$. Предположим, что $d(p) = n-1$, и для определенности полагаем, что $g_0p \neq g_0q$, $h_0p = h_0q$. Так как для всех $r < s \leqslant p$ верно $g_0r \neq g_0s$, то путь из g_0, отмеченный словом p, проходит через все вершины графа $G \in \Gamma_n$. Поэтому найдется такое слово r, $r < p$, что $g_0r = g_0q$. Если $h_0r \neq h_0q$, то пара $\{r, q\}$ образует эксперимент сложности меньшей $C(W)$, что невозможно. Если $h_0r = h_0q$, то пара $\{r, q\}$ образует простой эксперимент сложности меньшей $C(W)$. Из сказанного следует, что $d(p) \leqslant n-2$. Аналогично показывается, что $d(q) \leqslant n-2$. Следовательно, $C(W) \leqslant 2n-4$.

Покажем, что эта оценка для $k \geqslant 2$, $n \geqslant 3$ не может быть понижена. Она достигается на графах, представленных на рис. 1, у которых 0 является начальной вершиной. Для них $W = \{1^{n-2}, 1^{n-3}2\}$ является кратчайшим кратным экспериментом сложности $2n-4$ и эта оценка достижима для всех $k \geqslant 2, n \geqslant 3$. Легко проверить, что для этих графов простых экспериментов нет.

Рассмотрим теперь случай, когда $W = \{p, q\}$ – простой эксперимент. Пусть для определенности $p < q$. При $n=2$ по лемме 2 $C(W) \leqslant n$. Легко видеть, что при $k=1$ $C(W) \leqslant n$. Эта оценка достигается для всех n для графов, у которых $h_ix = h_{i+1}$, $g_ix = g_{i+1}$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, и $h_{n-1}x = h_{n-1}$, $g_{n-1}x = g_0$, поскольку $\{e, x^n\}$ образует кратчайший эксперимент. Пусть $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$. В [1] показано, что $C(W) \leqslant 2n-3$. При доказательстве теоремы 2 из [1] показано (см. [1] стр. 149–150), что если $C(W) = 2n-3$, то найдется такое слово r, что $p < r < q$ и $g_0r = g_0$, $h_0r = h_0$. Но тогда $W' = \{p, s\}$, где $rs = q$, образует кратный эксперимент, различающий графы. Поскольку $d(s) < d(q) - d(p)$, то $C(W) < 2n-3$, что невозможно. Из сказанного следует, что и для простого кратчайшего эксперимента W $C(W) \leqslant 2n-4$.

Покажем, что для $n \geqslant 4$ и $n \geqslant 3$ эта оценка не может быть понижена. Рассмотрим графы, представленные на рис. 2, у которых 0 является начальной вершиной и $i=1$. Нетрудно проверить, что $W = \{1^{n-2}, 1^{n-3}2\}$ является кратчайшим кратным экспериментом сложности $2n-4$, а $W = \{e, 1^{2n-5}2\}$ – кратчайшим простым экспериментом сложности $2n-4$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что для графов, у которых $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ и $g_ix = g_{i+1}$, $h_ix = h_{i+1}$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и $g_{n-1}x = \dot{g}_0$, $h_{n-1}x = h_{n-1}$ для всех $x \in X$, существуют только простые эксперименты.

Докажем теорему 2.

Пусть $W = \{p, q\}$ – кратчайший эксперимент, различающий неизоморфные $G \in \Gamma_n$, $H \in \Gamma_m$. По лемме 1 он существует. Полагаем, что $m > n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$.

Рассмотрим случай, когда W – кратный эксперимент. При $k=1$ все эксперименты простые, поэтому в нашем случае $k \geqslant 2$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 1, показывается, что длина слов p и q не превосходит $n-1$, то есть что $C(W) \leqslant 2n-2$. Эта оценка до-

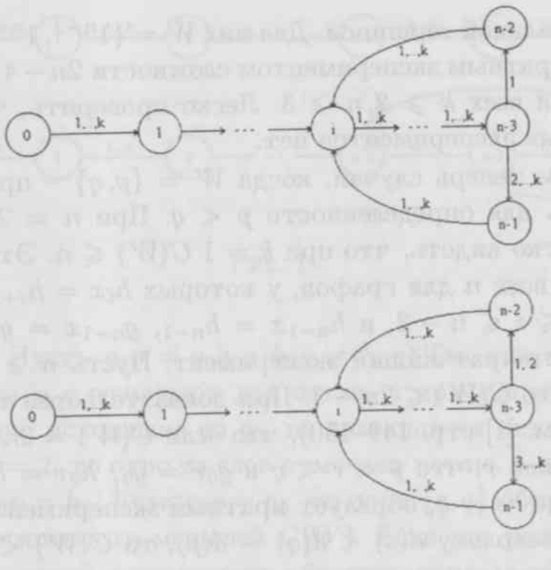

Рис. 2.

стигается на графах, представленных на рис. 3, у которых 0 является начальной вершиной. Из рис. 3 следует, что $W = \{1^{n-1}, 1^{n-2}2\}$ является кратчайшим кратным экспериментом сложности $2n-2$, поэтому для всех $k \geqslant 2$, всех $n \geqslant 3$ и $m = n+1$ оценка $2n-2$ достигается.

Рассмотрим теперь случай, когда W – простой эксперимент. При $k = 1$ $C(W) \leqslant n$, и эта оценка достижима для всех n для графов, у которых $g_i x = g_{i+1}$ для $0 \leqslant i \leqslant n-2$ и $g_{n-1}x = g_0$; $h_j x = h_{j+1}$ для $0 \leqslant j \leqslant m-2$ и $h_{m-1}x = h_0$. Пусть $k \geqslant 2$ и, для определенности, $p < q$. В теореме 2 из [1] показано, что в этом случае $C(W) \leqslant 2n-1$. При доказательстве этой теоремы (см. [1], стр. 149-152) показано, что если $C(W) = 2n-1$, то найдется такое слово r, что $p < r < q$ и $g_0 r = g_0$, $h_0 r = h_0$. Но тогда $\{p, s\}$, где $rs = p$, образует кратный эксперимент сложности меньшей $C(W)$, что невозможно. Из сказанного вытекает, что $C(W) \leqslant 2n-2$. Эта оценка достигаетя на графах, представленных на рис. 3, у которых 0 является начальной вершиной, поскольку $W = (e, 1^{2n-3}2)$ является кратчайшим кратным простым

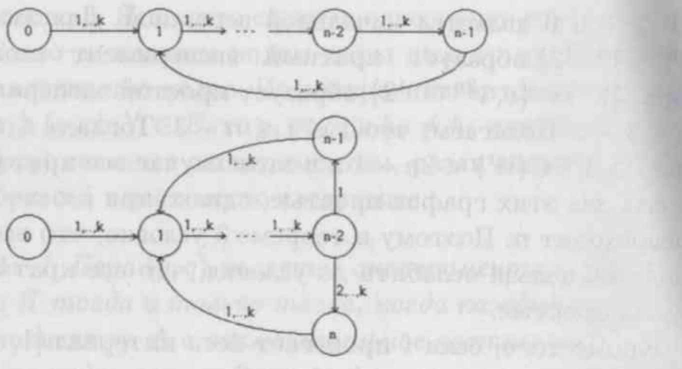

Рис. 3.

экспериментом сложности $2n-2$, поэтому эта оценка достижима для всех $k \geqslant 2$, $n \geqslant 3$, $m = n+1$. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3.

Предположим противное. Пусть выполняется условие теоремы и $W = \{p, q\}$ – кратчайший простой эксперимент сложности большей n, где $p < q$. Так как $d(q) > n$, то найдутся такие непустые слова r, s, что $r < s < q$ и $g_0 r = g_0 s$. Пусть r, s – слова наименьшей длины с таким свойством. Тогда $0 \leqslant d(r) < d(s) \leqslant n$. Если $h_0 r \neq h_0 s$, то $\{r, s\}$ образуют простой эксперимент меньшей сложности, что невозможно. Поэтому $h_0 r = h_0 s$. Пусть $p \leqslant r$, и $s = ru$, $q = sw$ для некоторых непустых u, w. Тогда пара $\{p, pw\}$ образует простой эксперимент сложности меньшей $C(W)$, что невозможно. Пусть $s \leqslant p < q$ и $s = ru$, $p = sv$, $q = sw$ для некоторых непустых слов u, w и, возможно, пустого v. Тогда пара $\{rv, rw\}$ образует простой эксперимент сложности меньшей $C(W)$, что невозможно. Из сказанного следует, что $r < p < s$. Пусть $p = rv, q = sw$ для некоторых непустых слов v, w. Если $v \leqslant w$, то пара $\{rv, rw\}$ образует простой эксперимент сложности меньшей $C(W)$, что невозможно. Если это неравенство не выполняется, то эта пара образует кратный эксперимент, что невозможно. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим графы, приведенные на рис. 2, у которых $n \geqslant$

$5, k \geqslant 3$ и 0 является начальной вершиной. Для этих графов пара $\{1^{n-2}, 1^{n-3}2\}$ образует кратный эксперимент сложности $2n-4$. Пара $W = \{e, 1^{2n-4-i}2\}$ образует простой эксперимент сложности $2n-3-i$. Полагаем, что $1 \leqslant i \leqslant n-3$. Тогда $n \leqslant C(W) \leqslant 2n-4$. При $i > 1$ $C(W) < 2n-4$ и в этом случае все кратчайшие эксперименты для этих графов простые, однако при $i < n-3$ их сложность превосходит n. Поэтому в теореме 3 условие, что все эксперименты простые, нельзя ослабить до условия, что все кратчайшие эксперименты простые.

Кроме того, если i пробегает весь интервал $[1, n-3]$, то $C(W)$ пробегает весь интервал $[n, 2n-4]$.

4. Построение различающих экспериментов

При исследовании свойств экспериментов, различающих неизоморфные графы G и H, зачастую полезно иметь конструктивное описание этих экспериментов. Для получения такого описания по графам G и H построим акцептор $A = (S, Z, \Delta, s_0, T)$, у которого S – множество его внутренних состояний, s_0 – начальное состояние, T – множество финальных состояний, $T \subseteq S$, $Z = X \times \{1,2\}$ – входной алфавит, Δ – функция переходов. Определим эти множества и функцию. Полагаем, что S равно множеству всех четверок вида $s = ((g_1, h_1), (g_2, h_2))$, где $g_1, g_2 \in G$ и $h_1, h_2 \in H$, то есть конечно. Пары (g_1, h_1) и (g_2, h_2) назовем первой и второй компонентой соответственно состояния s. Пусть $s_0 = ((g_0, h_0), (g_0, h_0))$ и $s \in T$, если $g_1 = g_2 \Leftrightarrow h_1 \neq h_2$. Функцию переходов автомата определяем правилом:

$$\Delta\left(((g_1, h_1), (g_2, h_2)), (x, i)\right) = \begin{cases} ((g_1 x, h_1 x), (g_2, h_2)), & \text{если } i = 1, \\ ((g_1, h_1), (g_2 x, h_2 x)), & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

Пусть $w = (x_1, i_1)...(x_l, i_l)$ – входное слово, для которого $\Delta(s_0, w) \in T$. Выбираем из слова w все буквы (x_j, i_j), для которых $i_j = 1$ и записываем x_j с сохранением порядка их вхождения в слово w. Получаем слово $p \in X^*$. Аналогично, из всех букв (x_j, i_j), для которых $i_j = 2$, строится слово q. Ясно, что слову w однозначно соответствует пара (p, q). Слово w назовем кодом пары слов (p, q). Ясно, что пара (p, q) имеет множество кодов. По построению автомата A, если $\Delta(s_0, w) = ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \in F$, то $g_1 = g_2$ и $h_1 \neq h_2$ или наоборот и, следовательно, (p, q) является экспериментом, различающим графы G и H. Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 1. *1. Пара (p, q) является экспериментом, различающим графы G и H тогда и только тогда, когда каждый код этой пары переводит акцептор A в заключительное состояние.*
2. Множество всех кодов всех экспериментов, различающих два неизоморфных графа, регулярно (по Клини).

При построении акцептора A фактически использована конструкция, примененная в [3] для описания идентификаторов состояний (см. [3], стр.12–16).

С помощью акцептора A можно проверять существование экспериментов, различающих пару графов (то есть изоморфизм этих графов), проверять существование только простых или только кратных, а также строить различающие эксперименты, если они существуют.

Список литературы

[1] Кудрявцев Г.Ю. Об отличимости вершин автоматных лабиринтов конечными автоматами // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 4. С. 143–152.

[2] Tan Q.M., Petrenko A., Bochman G. Checking experiments with labelled transition systems for trace equivalence // Proc. of the 10th Int. Workshop on Testing of Communicating Systems Chejn Island. Korea, Sept. 1997. P. 167–182.

[3] Богомолов А.М., Грунский И.С., Сперанский Д.В. Контроль и преобразования дискретных автоматов. Киев: Наукова думка, 1975.