О методах перехода от логического описания геометрических фигур к аналитическому

А.А. Шакиров

В некоторых областях математики таких, как аналитическая геометрия, математическая физика возникают задачи для решения которых требуется преобразовывать геометрическую информацию в аналитическую, т. е. требуется написать уравнения границы (или внутренности (области)) заданной фигуры в виде одной единой формулы такой как, например, уравнение прямой (граница полуплоскости), или уравнение окружности (граница круга) и т.д. Для описания геометрических фигур можно использовать формулы алгебры логики в стандартном базисе: дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, в которых символы переменных заменены на предикаты, описывающие базисные фигуры. В работе доказывается, что длина аналитической формулы, получаемой по методу R-функций [1], квадратично зависит от длины исходной логической формулы. Кроме того, предлагается другой способ описания геометрических фигур, который позволяет строить аналитическую формулу для заданной фигуры, длина которой зависит от длины исходной логической формулы линейно.

1. Введение

В задачах математической физики одной из наиболее важных проблем является краевая задача, постановка которой чаще всего имеет следующий вид. Искомая функция $u(x)$ (это может быть вектор - функция, тензор и т. п.) должна внутри некоторой области G удовлетворять уравнению

$$Au = f, \tag{1}$$

а на ее границе ∂G — условию вида

$$Bu|_{\partial G} = \varphi_0, \tag{2}$$

где $\varphi_0 : \partial G \longrightarrow R$. A и B — заданные операторы, f — заданная функция.

Нетрудно заметить, что в постановке задачи (1) – (2) присутствуют два различных типа входной информации. С одной стороны, это информация о функциях φ_0, f и операторах A и B, имеющая аналитический характер, с другой — информация геометрического характера о форме области G. Эти две информации создает особые трудности при разработке методов их решения. Всякий такой метод неизбежно должен предусматривать совместную переработку этих видов информации, и поэтому геометрическая информация должна быть приведена к аналитическому виду.

Однако для области достаточно сложного вида и при достаточно сложном характере краевых условий получить точное решение общего вида задачи (1) – (2) практически невозможно. Поэтому в таких случаях применяются приближенные методы, например, проекционные, вариационные и т. п.

Можно считать, что во всех приближенных методах применяется один и тот же конструктивный подход. А именно, приближенное решение разыскивается в виде

$$u_n = w(x)\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x) + \varphi_0(x), \tag{3}$$

где $\varphi_k(x)(k = 0, 1, \ldots, n)$ — заранее выбранные известные функции, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — неизвестные постоянные коэффициенты. А функция $w(x)$—непрерывная функция, имеющая внутри области G ограниченные и непрерывные производные и удовлетворяющая условиям $w(x) > 0$ внутри G, $w(x) = 0$ на границе G. Подставляя (3) в (1) – (2), приходим к задаче такого выбора постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, чтобы эти условия возможно точнее удовлетворялись (в смысле в той или иной метрики), обычно это задача отыскания решения системы линейных алгебраических уравнений.

Построение $w(x)$ для некоторых областей (круг, эллипс, выпуклый многоугольник) не составляет труда. А если область представляет собой сложную фигуру, например, пятиконечную звезду или невыпуклую сложную фигуру и т. д., то построение $w(x)$ не так-то просто.

Метод решения этой задачи, получивший название метода R-функций, предложил В.Л.Рвачев в [1]. Этот метод позволяет практически для любой области G по ее логическому описанию, т.е. по формуле с сигнатурой $\bigcap, \bigcup, \overline{}, (,)$ над некоторым множеством базисных фигур, строить аналитическую формулу, описывающую фигуру G, т.е. формулу, соответствующая функция которой принимает значение 0 на границе фигуры G и положительна внутри фигуры G. В работе доказывается, что длина аналитической формулы, получаемой по методу R-функций [1], квадратично зависит от длины исходной логической формулы. Кроме того, предлагается другой способ описания геометрических фигур, который позволяет строить аналитическую формулу для заданной фигуры, длина которой зависит от длины исходной логической формулы линейно.

Автор выражает благодарность В.Б.Кудрявцеву за постановку задачи и Э.Э.Гасанову и А.С.Строгалову за помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть R - множество действительных чисел, N - множество натуральных чисел. Если $n \in N$, то через R^n обозначим n-мерное евклидово пространство.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ — исходный алфавит переменных, принимающих значения из R. Будем рассматривать функции $f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ ($v_{i_\eta} \neq v_{i_\mu}$ при $\eta \neq \mu$), аргументы которых определены на множестве R, и такие, что $f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \in R$. Такие функции назовем действительными функциями и множество всех действительных функций обозначим через $\mathcal{Q}$. Чтобы избежать сложных обозначений для индексов переменных, мы будем употреблять в качестве метаобозначений символы $x, y, z, \ldots$, а также эти символы с индексами. Таким образом, запись $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ понимается как запись функции, зависящей от любых аргументов $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$, где $v_{i_\eta} \neq v_{i_\mu}$ при $\eta \neq \mu$. Пусть D некоторое подмножество функций из $\mathcal{Q}$. Введем индуктивное определение аналитической формулы над D.

Базис индукции. Каждая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ из D называется аналитической формулой над D.

Индуктивный переход. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ функция из D и $a_1, a_2, \ldots, a_s$ - выражения, являющиеся либо аналитическими формулами над D, либо символами переменных из U. Тогда выражение $f(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ называется аналитической формулой над D (или просто формулой над D).

В дальнейшем будем обозначать аналитические формулы заглавными буквами $A_1, A_2, \ldots$. Если в построении аналитической формулы A участвуют переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то пишем $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Длиной аналитической формулы A назовем число, равное количеству вхождений переменных в формулу A и обозначим ее через $L(A)$.

Множество всех аналитических формул над D обозначим через $\mathbf{A}_D$. Множество всех аналитических формул A над D, зависящих от n переменных, обозначим через $\mathbf{A}_D(n)$.

Каждая формула A из $\mathbf{A}_D$ при любой фиксации значений ее переменных позволяет с помощью функций из D вычислять ее значения и тем самым задает (реализует) некоторую действительную функцию. Функцию f из $\mathcal{Q}$, которая реализуется формулой A из $\mathbf{A}_D$ будем обозначать через f_A.

Любое открытое множество точек из R^n будем называть фигурой. Каждой фигуре G сопоставляется предикат $p(y_1, \ldots, y_n)$, определенный на R^n и принимающий значение 1 только на точках множества G.

Поскольку определения фигуры, как открытого множества точек, так и через соответствующий предикат, тавтологичны, то мы часто будем обозначать фигуру G, через сопоставленный ей предикат p, и будем говорить фигура p.

Пусть $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_m\}$ множество базисных фигур, и $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ множество предикатов, соответствующих фигурам $G_1, \ldots, G_m$, соответственно.

С помощью $\mathcal{G}$ и теоретико-множественных операций $\bigcap, \bigcup, \overline{}$ получается множество Φ, вообще говоря, новых геометрических фигур. Любая фигура из Φ определяется некой логической формулой $\mathcal{A}(G_1, \ldots, G_m)$ над $\mathcal{G}$ с сигнатурой $\bigcap, \bigcup, \overline{}, (,)$. Пусть дана логическая формула

$\mathcal{A}(G_1,\ldots,G_m)$, задающая фигуру G. В формуле $\mathcal{A}$ производим формальную замену: G_i на p_i и операций $\bigcap, \bigcup, ^{-}$ на $\wedge, \vee, \neg$, соответственно. В результате получим формулу логики предикатов $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$, которую назовем $\mathcal{P}$-формулой, логически описывающей фигуру G.

Длиной $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$ назовем число вхождений предикатов p_i $(i=\overline{1,m})$ в формулу $\mathcal{A}$ и обозначим ее через $L(\mathcal{A})$.

Говорим, что формула $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbf{A}_D(n)$ *сильно описывает фигуру* G из R^n, если

- $f_A(x_1,\ldots,x_n) > 0$, при $(x_1,\ldots,x_n) \in G$,
- $f_A(x_1,\ldots,x_n) = 0$, при $(x_1,\ldots,x_n) \in \partial G$,
- $f_A(x_1,\ldots,x_n) < 0$, при $(x_1,\ldots,x_n) \in R^n \setminus (G \cup \partial G)$,

где ∂G — граница открытого множества G.

Так как в выражении (3) не накладывается ограничений на значения $w(x)$ вне границы области G, имеет право на существование и следующее определение.

Будем говорить, что формула $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbf{A}_D$ *слабо описывает фигуру* G из R^n, если

- $f_A(x_1,\ldots,x_n) > 0$, при $(x_1,\ldots,x_n) \in G$,
- $f_A(x_1,\ldots,x_n) = 0$, при $(x_1,\ldots,x_n) \in R^n \setminus G$.

Пусть нам дана фигура G и ее логическое описание $\mathcal{P}$-формулой $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$. Будем считать, что каждая базисная фигура $G_i \in \mathcal{G}$ сильно описывается некоторой аналитической формулой над D, которую обозначим через $r_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=\overline{1,m})$.

Ставится задача построить по логическому описанию $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$ фигуры G такую аналитическую формулу $A(x_1,\ldots,x_n)$, которая бы сильно (или слабо) описывала эту фигуру.

Один из методов решения этой задачи, называемый методом R-функций, предложил В.Л.Рвачев в [1].

Метод R-функций состоит в следующем:

1) Берется логическое описание $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$ фигуры G.

2) В формуле $\mathcal{A}$ производится формальная замена символов предикатов p_i на символы r_i $(i = \overline{1,m})$, а связок $\wedge, \vee, \neg$ соответственно на $\wedge_{R(\alpha)}, \vee_{R(\alpha)}, \neg_{R(\alpha)}$, где $\alpha \in (-1;1]$. Полученная формула называется R-формулой.

3) Переход от R-формулы к аналитической формуле осуществляется, используя следующую систему R-функций:

$$r_1 \wedge_{R(\alpha)} r_2 = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 - 2\cdot(\alpha) r_1 \cdot r_2 + r_1^2}, \tag{4}$$

$$r_1 \vee_{R(\alpha)} r_2 = r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 - 2\cdot(\alpha) r_1 \cdot r_2 + r_1^2}, \tag{5}$$

$$\neg_{R(\alpha)} r = -r. \tag{6}$$

Как показал В.Л.Рвачев в [2], получающаяся в результате аналитическая формула будет сильно описывать фигуру G.

При $\alpha = 1$ из (4), (5) и (6) получаются самые короткие по длине R-функции, которые проще записать так

$$r_1 \vee_{R(1)} r_2 = r_1 + r_2 + \mid r_1 - r_2 \mid, \tag{7}$$

$$r_1 \wedge_{R(1)} r_2 = r_1 + r_2 - \mid r_1 - r_2 \mid, \tag{8}$$

$$\neg_{R(1)} r = -r. \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{A}$ некоторая $\mathcal{P}$-формула. Через $R^{\mathcal{A}}$ обозначим аналитическую формулу, получающуюся из $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}$ по методу R-функций Рвачева с помощью соотношений (7) – (9).

Следующий ниже результат позволяет оценить длину аналитической формулы, полученной по методу Рвачева.

Теорема 1. *Для любой $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(p_1,\ldots,p_m)$*

$$L(R^{\mathcal{A}}) \geq (L(\mathcal{A}))^2 \min_{1\leq i\leq m} L(r_i),$$

где r_i — аналитическая формула, сильно описывающая фигуру p_i $(i = \overline{1,m})$.

Обозначим через $p^\delta = p$, если $\delta = 1$, и $p^\delta = \overline{p}$, если $\delta = 0$.

Если r — вещественное число, то через $|r|$ обозначим абсолютное значение числа r.

В данной работе предлагается другой способ перехода от логического описания к аналитическому, который мы назовем S-методом. Он состоит в следующем:

1) Берем логическое описание $\mathcal{A}(p_1, \ldots, p_m)$ фигуры G.

2) С помощью тождеств $\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$, $\overline{(x_1 \wedge x_2)} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ и $\overline{\overline{x}} = x$, которые не увеличивают длину формулы, преобразуем формулу $\mathcal{A}(p_1, \ldots, p_m)$ к формуле $\mathcal{A}'(p_1, \ldots, p_m)$, в которой все отрицания спущены до предикатов.

3) Сохраняем структуру скобок.

4) Заменяем формально знаки "$\bigcup$" и "$\bigcap$" на знак "+" (сложение) и "$\cdot$" (умножение) соответственно.

5) Заменяем выражения вида $p_i^{\delta_i}$ на $(-1)^{1+\delta_i} \cdot r_i(x) + | r_i(x) |$, где r_i — аналитическая формула, сильно описывающая фигуру p_i.

6) Полученную формулу обозначим $S^{\mathcal{A}}$ и считаем, что если нет скобок, то приоритет операций "+" и "$\cdot$" одинаков.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $\mathcal{P}$-формула $\mathcal{A}(p_1, \ldots, p_m)$ логически описывает фигуру G, и для любого $i \in \{\overline{1, m}\}$ r_i — аналитическая формула, сильно описывающая фигуру p_i, то аналитическая формула $S^{\mathcal{A}}$, полученная S-методом, слабо описывает фигуру G.*

Теорема 3. *Для любой $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(p_1, \ldots, p_m)$*

$$L(S^{\mathcal{A}}) \le 2L(\mathcal{A}) \cdot \max_{1 \le i \le m} L(r_i),$$

где r_i — аналитическая формула, сильно описывающая фигуру p_i ($i = \overline{1, m}$).

3. Нижняя оценка сложности метода R-функций

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если* $n \in N$ *и* $f(m,k) = 2m^2 + 2k^2$, *то*

$$r(n) \stackrel{def}{=} min\{f(m,k) : m,k \in N,\ m+k=n\} \geq n^2$$

Доказательство. Возьмем произвольные $n,m,k \in N$, такие, что $m + k = n$.

Рассмотрим 2 случая.

1) $n = 2l$, где $l \in N$. Без ограничения общности можем считать, что $m \geq k$. Пусть $c = m - l$, тогда $m = l + c$, $k = l - c$ и $c \geq 0$. Откуда получим

$$f(m,k) = f(l+c, l-c) = 2(l+c)^2 - 2(l-c)^2 = 4l^2 + 4c^2 \geq 4l^2 = n^2.$$

2) $n = 2l+1$, где $l \in N$. Будем считать, что $m > k$. Пусть $c = m-l-1$, тогда $m = l + 1 + c$, $k = l - c$ и $c \geq 0$. Откуда имеем

$$\begin{aligned} f(m,k) &= f(l+c+1, l-c) = 2(l+c+1)^2 - 2(l-c)^2 = \\ &= 4l^2 + 4c^2 + 4l + 4c + 2 > 4l^2 + 4l + 1 = n^2. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора n, m, k получаем справедливость утверждения леммы.

Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство будем вести индукцией по длине $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}$.

Базис индукции. Если $\mathcal{A}$ — такая $\mathcal{P}$-формула, что $L(\mathcal{A}) = 1$, то $\mathcal{A}$ представляет собой предикат с навешанным на него некоторым количеством отрицаний, но согласно (9) навешивание отрицания не изменяет длины формулы, следовательно $L(R^{\mathcal{A}}) = L(\mathcal{A}) = 1$.

Пусть $\mathcal{A}$ — такая $\mathcal{P}$-формула, что $L(\mathcal{A}) = 2$. Тогда поскольку, как мы уже отмечали, навешивание отрицания не изменяет длины формулы, то достаточно рассмотреть случаи, когда $\mathcal{A} = p_i \vee p_j$ и $\mathcal{A} = p_i \wedge p_j$ ($i, j \in \{\overline{1, m}\}$). Согласно (7) и (8)

$$L(R^{p_i \vee p_j}) = 2L(r_i) + 2L(r_j) \geq 4 \min_{1 \leq i \leq m} L(r_i),$$

$$L(R^{p_i \wedge p_j}) = 2L(r_i) + 2L(r_j) \geq 4 \min_{1 \leq i \leq m} L(r_i).$$

Индуктивный переход. Пусть для любого $l < n$ и любой такой $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, что $L(\mathcal{A}) = l$ верно

$$L(R^{\mathcal{A}}) \geq l^2 \min_{1 \leq i \leq m} L(r_i).$$

Возьмем произвольную $\mathcal{P}$-формулу $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, такую, что $L(\mathcal{A}) = n$.

Поскольку согласно (9) навешивание и снятие отрицания не изменяет длины формулы, то мы можем рассматривать только случаи, когда $\mathcal{A}$ имеет один из двух видов

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$,

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$.

Так как и в том, и в другом случае $L(\mathcal{A}_1) < n$, $L(\mathcal{A}_2) < n$ и $L(\mathcal{A}_1) + L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}) = n$, то, согласно предположению индукции, соотношениям (7), (8) и лемме 1 имеем

$$\begin{array}{rcl} L(R^{\mathcal{A}}) & = & 2 \cdot L(R^{\mathcal{A}_1}) + 2 \cdot L(R^{\mathcal{A}_2}) \geq \\ & \geq & (2(L(\mathcal{A}_1))^2 + 2(L(\mathcal{A}_2))^2) \cdot \min\limits_{1 \leq i \leq m} L(r_i) \geq n^2 \cdot \min\limits_{1 \leq i \leq m} L(r_i). \end{array}$$

Тем самым теорема доказана.

4. Анализ S-метода

Доказательство теоремы 2.

Доказательство будем вести индукцией по длине $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — такая $\mathcal{P}$-формула, что $L(\mathcal{A}) = 1$. Тогда после шага 2 S-метода она преобразуется к формуле $\mathcal{A}'$, которая может иметь один из двух видов.

1) $\mathcal{A}' = p_i$ ($i \in \{\overline{1, m}\}$). Тогда

$$S^{\mathcal{A}'} = r_i(x_1, \ldots, x_n) + |r_i(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Так как r_i сильно описывает фигуру p_i, то для любого $(x_1, \ldots, x_n)$ такого, что $p_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$,

$$S^{\mathcal{A}'} = r_i(x_1, \ldots, x_n) + r_i(x_1, \ldots, x_n) > 0,$$

и для любого $(x_1, \ldots, x_n)$ такого, что $p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$,

$$S^{\mathcal{A}'} = r_i(x_1, \ldots, x_n) - r_i(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Следовательно, $S^{\mathcal{A}'}$ — слабо описывает фигуру p_i.

2) $\mathcal{A}' = \overline{p_i}$ $(i \in \{\overline{1, m}\})$. Тогда

$$S^{\mathcal{A}'} = -r_i(x_1, \ldots, x_n) + |r_i(x_1, \ldots, x_n)|.$$

Так как r_i сильно описывает фигуру p_i, то для любого $(x_1, \ldots, x_n)$ такого, что $p_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$,

$$S^{\mathcal{A}'} = -r_i(x_1, \ldots, x_n) + r_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

и для любого $(x_1, \ldots, x_n)$ такого, что $p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$,

$$S^{\mathcal{A}'} = -r_i(x_1, \ldots, x_n) - r_i(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$

причем равенство достигается только на границе фигуры p_i. Следовательно, $S^{\mathcal{A}'}$ — слабо описывает фигуру $\overline{p_i}$.

Индуктивный переход. Пусть для любого $l < n$ и любой такой $\mathcal{P}$-формулы $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, что $\mathcal{A}$ логически описывает некоторую фигуру G и $L(\mathcal{A}) = l$, аналитическая формула $S^{\mathcal{A}}$, полученная S-методом, слабо описывает фигуру G.

Возьмем произвольную $\mathcal{P}$-формулу $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, такую, что она логически описывает некоторую фигуру G и $L(\mathcal{A}) = n > 1$.

После шага 2 S-метода формула $\mathcal{A}$ преобразуется к формуле $\mathcal{A}'$, которая может иметь один из двух видов:

1) $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$,

2) $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$.

Пусть $\mathcal{A}_1$ логически описывает фигуру G_1, а $\mathcal{A}_2$ — фигуру G_2. Понятно, что в первом случае $G = G_1 \cup G_2$, а во втором — $G = G_1 \cap G_2$.

В первом случае

$$S^{\mathcal{A}'} = S^{\mathcal{A}_1} + S^{\mathcal{A}_2}.$$

Так как, согласно предположению индукции, $S^{\mathcal{A}_1}$ слабо описывает фигуру G_1, а $S^{\mathcal{A}_2}$ — фигуру G_2, то для любого $(x_1, \dots, x_n) \in G_1 \cup G_2$

$$S^{\mathcal{A}_1} + S^{\mathcal{A}_2} > 0,$$

и для любого $(x_1, \dots, x_n) \notin G_1 \cup G_2$

$$S^{\mathcal{A}_1} + S^{\mathcal{A}_2} = 0.$$

Следовательно, $S^{\mathcal{A}'}$ — слабо описывает фигуру $G_1 \cup G_2 = G$.

В втором случае

$$S^{\mathcal{A}'} = S^{\mathcal{A}_1} \cdot S^{\mathcal{A}_2}.$$

Тогда, согласно предположению индукции, для любого $(x_1, \dots, x_n) \in G_1 \cap G_2$

$$S^{\mathcal{A}_1} \cdot S^{\mathcal{A}_2} > 0,$$

и для любого $(x_1, \dots, x_n) \notin G_1 \cap G_2$

$$S^{\mathcal{A}_1} \cdot S^{\mathcal{A}_2} = 0.$$

Следовательно, $S^{\mathcal{A}'}$ — слабо описывает фигуру $G_1 \cap G_2 = G$.

Тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Пусть нам дана произвольная $\mathcal{P}$-формула $\mathcal{A}(p_1, \dots, p_m)$. Применим к ней S-метод. Ни один из шагов метода, кроме пятого, не меняет длину формулы, а на пятом шаге каждый предикат p_i заменяется на две формулы r_i (фрагменты формул, не влияющие на длину, здесь не учитываются). Отсюда сразу следует, что

$$L(S^{\mathcal{A}}) \leq 2L(\mathcal{A}) \cdot \max_{1 \leq i \leq m} L(r_i).$$

Тем самым теорема доказана.

Список литературы

[1] Рвачев В.Л., Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. — ДАН СССР, 1963, том 153, N 4, с. 765 - 767.

[2] Рвачев В.Л., Методы алгебры логики в математической физике. — Киев: Наукова думка, 1974, с. 260.