Об одной модели этнических отношений

И.М. Корнев

1. Введение

В последние годы после завершения биполярного деления мира резко возросло количество конфликтов на межэтнической почве, и возникла насущная необходимость в средствах их предотвращения и локализации. Предлагаемые ниже математические модели представляют собой попытку математического моделирования развития таких конфликтов.

2. Общее определение однородной структуры

Однородная структура (сокращенно ОС) [1, 2] или *клеточный автомат* σ формально определяется как набор $\langle Z^2, E_n, V, \varphi \rangle$, где Z^2 - множество векторов на плоскости с целочисленными координатами, $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $V = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}\}$ - упорядоченный набор различных ненулевых векторов из Z^2, φ - функция n-значной логики от h переменных, причем существует такое k, что $\varphi(k, k, \ldots, k) = k$. Векторы из Z^2 называются *ячейками (клетками)* однородной структуры (*клеточного автомата*), элементы множества E_n - *состояниями ячейки.* Набор V, называемый *шаблоном соседства* однородной структуры, для каждой ячейки α определяет ее *окрестность* $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$. Наконец, функция φ задает *локальную функцию переходов* однородной структуры: если в момент времени t состояния ячеек $\alpha, \alpha+\alpha_1, \alpha+\alpha_2, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}$ равны соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$, то состояние ячейки α в следующий момент времени $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$.

Приписывая каждой ячейке ОС σ состояние из множества E_n, получим *состояние однородной структуры.* Другими словами, под состоянием ОС σ понимается функция f, определенная на множестве ячеек Z^2 и принимающая значения из E_n.

Функционирование (поведение) ОС происходит в дискретном времени $t = 0, 1, \ldots$ в результате последовательного выполнения *основной функции переходов.* Основная функция (оператор) переходов Φ определяется на множестве всех состояний ОС σ, при этом считается, что состояние ОС f переходит в состояние ОС g, $g = \Phi(f)$, если для любой ячейки α выполняется равенство $g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}))$, т.е. состояние каждой ячейки после перехода определяется по состоянию окрестностей ячейки до перехода с помощью локального преобразования φ, не зависящего от расположения ячейки α в пространстве Z^2. Как правило, изучается поведение только таких состояний ОС, у которых лишь конечное число ячеек находится в состоянии, отличном от состояния покоя k. Состояния ОС такого вида называются *конфигурациями.*

Определение 1. Конечные непустые множества ячеек ОС называем *блоками* этой ОС. Блок $\bigcup\limits_{\alpha \in B} V(\alpha)$ называем *окрестностью блока* B и обозначаем посредством $V(B)$.

Определение 2. $B_{\alpha n m} = \{\beta = (\beta_1, \beta_2) \in Z^2 : |\beta_1 - \alpha_1| \le n, \ |\beta_2 - \alpha_2| \le m\}$, $\alpha \in Z^2$ - целочисленный прямоугольник вокруг ячейки α. $B_{nm} = B_{0nm}$ - целочисленный прямоугольник вокруг нуля.

3. Определение моделей

Пусть $S \in Z^2$, $|S| < \infty$, $|V(S) \setminus S| = o(|S|)$, т.е. граница множества S мала по сравнению с самим множеством. Граница, естественно, определяется в терминах окрестности V. S мы дальше будем называть опорным множеством. Во всех приводимых ниже моделях S представляет собой конечную популяцию, в которой изучается поведение моделей роста агрессивности.

Каждая ячейка из S соотносится с одним индивидуумом из популяции. Все клетки вне S получают значение покоя k, и для них локальная функция перехода $\varphi(k, \ldots) = k$, и в дальнейшем это не упоминается. Фактически функционирование модели происходит внутри множества

S.

Во всех моделях агрессивность будет определяться конфигурацией $f : S \to Z_2$, т.е. индивидуум либо спокоен, либо возбужден. В неординарных популяциях каждая ячейка снабжается некоторым неизменяемым набором признаков n. Хотя в общем определении однородной структуры локальная функция перехода не зависит от ячейки α, однако путем введения некоторых дополнительных состояний во множество состояний клетки $E_n : \overline{E}_n = E_n \times E_m$ получаем конфигурации $\overline{f} = (f, n)$, расширенная локальная функция переходов для которых $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}, id)$ (id - тождественное отображение) удовлетворяет общему определению однородной структуры.

Окрестность V полагаем симметричной, т.е. $\forall \alpha_i \in V \ \exists \alpha_j \in V$ и $\alpha_i = -\alpha_j$. Всевозможные конфигурации над одним множеством образуют пространство конфигураций $\mathbf{K}(S)$. Очевидно, оно является линейным пространством над полем Z_2.

3.1. Модель роста социальной напряженности в однородном обществе

В этой модели популяция однородна, и никаких признаков для ячеек в ней не устанавливается.

Определим линейный оператор $W : \mathbf{K}(S) \to \mathbf{K}(S)$ как $Wf(\alpha) = \sum\limits_{\beta \in V} f(\alpha + \beta)$. Функция перехода представляется в виде $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_h) = \varphi(x_0, y)$, а оператор перехода есть $\Phi f(\alpha) = \varphi(f(\alpha), Wf(\alpha))$. φ определяется следующим образом:

$$\varphi(i, y) = s(y - P_i), \quad \text{где } s(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

P_0, P_1 - коэффициенты, задающие режим функционирования модели. Таким образом, φ - пороговая функция с двумя порогами. Выбор порога зависит от текущего состояния ячейки. Напомним, что состояния ячеек изменяются только во множестве S, а вне его они тождественно равны k.

Заметим, что подобная схема описывает не только рост социальной напряженности в однородном обществе, но и распространение эпидемий, пожаров и т.д.

Пример 1. "Распространение пожара". Здесь $P_0 = 1,\ P_1 = 1,\ V = B_{11}$. Как легко заметить, любое множество единичек здесь увеличивается за счет границы на одну клетку за один ход и за время $N \le d(S)\ \Phi^T f(\alpha) = 1\ \forall \alpha \in S$. (Конечно, исключая случай $f(\alpha) \equiv 0$). Здесь d - диаметр множества S в терминах окрестности.
Определение 3. Пусть задана ОС σ_1 с порогами P_0, P_1. ОС σ_2 с той же окрестностью перехода и базовым множеством S, но с порогами $P'_0 = |V| - 1 - P_1,\ P'_1 = |V| - 1 - P_0$ назовем *двойственной* к данной.

Лемма 1. $1 - \Phi f = \tilde{\Phi}(1 - f),\ \forall f \in \mathbf{K}(S)$, *где* $\tilde{\Phi}$ *- оператор перехода двойственной ОС.*

Доказательство. Обозначим $f(\alpha) = i,\ |V| = M$. $W(1 - f) = W1 - Wf = m - Wf$. По определению,

$$\tilde{\varphi}(i, W(1-f)(\alpha)) = \begin{cases} 0, & 0 \le W(1-f)(\alpha) \le P'_i \\ 1, & P'_i + 1 \le W(1-f)(\alpha) \le m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le m - Wf(\alpha) \le P'_i \\ 1, & P'_i + 1 \le m - Wf(\alpha) \le m \end{cases} = \begin{cases} 0, & m - P'_i \le Wf(\alpha) \le m \\ 1, & 0 \le Wf(\alpha) \le m - 1 - P'_i \end{cases};$$

$$1 - \Phi F(\alpha) = 1 - \varphi(i, Wf(\alpha)) = \begin{cases} 1, & 0 \le Wf(\alpha) \le P_k \\ 0, & P_k + 1 \le Wf(\alpha) \le m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \le Wf(\alpha) \le m - 1 - P'_i \\ 0, & m - P'_i \le Wf(\alpha) \le m \end{cases}.$$

Таким образом, правая и левая части в исходном равенстве совпадают.

Практически это означает, что двойственная ОС функционирует абсолютно так же, как и исходная, только единицы соответствуют нулям и наоборот.

3.2. Модель возникновения конфликта в смешанном обществе

Здесь признаком, различающим ячейки во множестве S, является *"национальность"*, определяемая как функция $n : S \to Z_2$.

Аналогично модели однородного общества определяется оператор $W : \mathbf{K}(S) \to \mathbf{K}(S)$, а оператор перехода Φ несколько другой:

$$(\Phi f)(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists \beta \in V(\alpha), n(\beta) \neq n(\alpha) \text{ и } f(\beta) = 1 \\ s(Wf(\alpha) - P_i), \qquad \text{где } i = f(\alpha). \end{cases}$$

Как видно из определения, клетка активизируется, если активен кто-либо из ее соседей другой национальности. В противном случае, активизация происходит аналогично модели однородного общества.

3.3. Модель развития конфликта при участии третьей нейтральной стороны

Здесь признаком, различающим ячейки во множестве S, тоже является *национальность,* но это уже не двузначная, а трехзначная функция $n : S \to Z_3$. Национальности 0 и 1 имеют противоборствующие силы, а 2 - третья *"миротворческая"* сторона.

Как обычно, определяется оператор возбужденности в окрестности клетки $W : \mathbf{K}(S) \to \mathbf{K}(S)$, а оператор перехода Φ здесь:

$$(\Phi f)(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists \beta \in V(\alpha), n(\beta) = 2 \text{ или } n(\alpha) = 2 \\ 1, \text{ если } \exists \beta \in V(\alpha), n(\beta) \neq n(\alpha) \text{ и } f(\beta) = 1 \\ s(Wf(\alpha) - P_i), \qquad \text{где } i = f(\alpha). \end{cases}$$

Как видно, здесь третья сторона действует следующим образом: все миротворческие силы α ($n(\alpha) = 2$) "насильно" устанавливают в своей окрестности $V(\alpha)$ состояние $f(\beta) = 0$, $\beta \in V(\alpha)$, а в остальном все здесь так же, как и в смешанном обществе.

Приведем постановку *задачи оптимизации:*

В целях сокращения затрат требуется найти такое размещение миротворческих сил $M \subset S$, $M = \{\alpha \in S : n(\alpha) = 2\}$, чтобы их количество было минимальным при условиях, наложенных на количество и распределенность агрессивности, т.е. ищется $\min\limits_M |M| = M_0$, но при этом минимум берется по таким M, чтобы $A = \{\alpha \in S : f(\alpha) = 1\}$ - множество *"агрессии"* лежало в требуемых границах: $A \subseteq B$, $|A| \leq \overline{A}$, где $\overline{A}$ - некоторая константа, а B - некоторый блок, задающиеся заранее.

4. Общие теоремы

4.1. Однородное общество

Введем на пространстве конфигураций отношение частичного порядка, а именно:

Определение 4. Пусть $f, g \in \mathbf{K}(S)$ - конфигурации. Тогда $f \leq g$, если $\forall \alpha \in S \quad f(\alpha) \leq g(\alpha)$.

Теорема 1. *При* $P_1 \leq P_0$ *для любых* $f, g \in \mathbf{K}(S)$, $f \leq g$, *имеем* $\Phi f \leq \Phi g$.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $\exists \alpha \in S$, $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ и $\Phi f(\alpha) > \Phi g(\alpha)$. Отсюда $\Phi f(\alpha) = 1$, $\Phi g(\alpha) = 0$. Если $f \leq g$, то $Wf(\alpha) \leq Wg(\alpha)$. Обозначим $w_1 = Wf(\alpha)$, $w_2 = Wg(\alpha)$. Имеем $w_1 \leq w_2$. Возможны следующие три случая:

а) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 0$. Тогда $w_2 \leq P_0$, $w_1 > P_0$ и $w_1 > w_2$, получаем противоречие.

б) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $w_1 > P_0$, $w_2 \leq P_1$ и $w_2 \leq P_1 \leq P_0 \leq w_1$, получаем противоречие.

в) $f(\alpha) = 1$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $w_1 > P_1$, $w_2 \leq P_1$ и $w_1 > w_2$, получаем противоречие.

Таким образом, во всех случаях приходим к противоречию, и теорема доказана.

Сущность условия $P_1 \leq P_0$ состоит в том, что для сохранения состояния возбужденности ячейке требуется меньшее количество возбужденных соседей, нежели для возбуждения спокойной ячейки, что, однако, обычно и наблюдается в реальной жизни.

Определение 5. Пусть f_0, f_1, f_2 - последовательные конфигурации в ходе функционирования ОС. Обозначим через $T(f)$ период этой последовательности, а через $C(f)$ - ее предпериод:

$$
\begin{array}{ll}
f(t + T(f)) = f(t) & \text{для любого } t \geq C(f). \\
f(t_1 + t_2) \neq f(t_1) & \text{для любого } t_1 < C(f) \text{ или } 0 < t_2 < T(f).
\end{array}
$$

Через T и C обозначим максимальные по всем конфигурациям период и предпериод.

Заметим, что $|\mathbf{K}(S)| = 2^{|S|}$, и поэтому $T < 2^{|S|}$, $C < 2^{|S|}$. Однако, мы можем существенно понизить порядок этих оценок, а именно, справедлива следующая

Теорема 2. *$C = 0$ или 1, $T < A|S| + B$, где A и B - некоторые константы.*

Доказательство. Определим следующую функцию $E(f)$ от конфигурации:
$$E = -\langle \Phi f, Wf\rangle + \langle f + \Phi f, p_0\rangle - (p_0 - p_1)\langle f, \Phi f\rangle,$$
где $p_0 = P_0 + 1/2$, $p_1 = P_1 + 1/2$, а $\langle *, *\rangle$ обозначает суммирование по всем ячейкам множества S : $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{\alpha\in S} f(\alpha)\cdot g(\alpha)$. Рассмотрим изменение функции E при применении оператора перехода Φ.

$$\Delta E = -\langle \Phi^2 f, W\Phi f\rangle + \langle \Phi^2 f + \Phi f, p_0\rangle - (p_0 - p_1)\langle \Phi^2 f, \Phi f\rangle +$$
$$+\langle \Phi f, Wf\rangle - \langle f + \Phi f, p_0\rangle + (p_0 - p_1)\langle f, \Phi f\rangle =$$
$$= -\langle \Phi^2 f - f, W\Phi f\rangle + \langle \Phi^2 f - f, p_0\rangle - (p_0 - p_1)\langle \Phi^2 f - f, \Phi f\rangle.$$

Для любого $\alpha \in S$ реализуется одна из следующих возможностей:
При $\Phi^2 f(\alpha) = f(\alpha)$ все слагаемые равны нулю.
При $f(\alpha) = 0,\ \Phi f(\alpha) = 0,\ \Phi^2 f(\alpha) = 1$
$-W\Phi f(\alpha) + p_0 < 0$, т.к. $W\Phi f(\alpha) > p_0$.
При $f(\alpha) = 0,\ \Phi f(\alpha) = 1,\ \Phi^2 f(\alpha) = 1$
$-W\Phi f(\alpha) + p_0 - (p_0 - p_1) = -W\Phi f(\alpha) + p_1 < 0$, т.к. $W\Phi f(\alpha) > p_1$.
При $f(\alpha) = 1,\ \Phi f(\alpha) = 0,\ \Phi^2 f(\alpha) = 0$
$W\Phi f(\alpha) - p_0 < 0$, т.к. $W\Phi f(\alpha) < p_0$.
При $f(\alpha) = 1,\ \Phi f(\alpha) = 1,\ \Phi^2 f(\alpha) = 0$
$W\Phi f(\alpha) - p_0 + (p_0 - p_1) = W\Phi f(\alpha) - p_1 < 0$, т.к. $W\Phi f(\alpha) < p_1$.

Таким образом, при $f \neq \Phi^2 f \quad \Delta E < 0$, и на каждом таком шаге происходит "выброс энергии". Однако, значение E ограничено снизу и сверху:
$$-|V|\cdot|S| - (p_0 - p_1) \leq E(f) \leq 2p_0|S|,$$
т.е. с некоторого $T \quad \Phi^t f \equiv \Phi^{t+2} f\ \forall t \geq T$, а это означает:
$$T \leq \frac{2p_0|S| + |V|\cdot|S| + (p_0 - p_1)}{1/2} = (4p_0 + 2|V|)|S| + 2(p_0 - p_1),\ C = 0 \text{ или } 1,$$
и теорема доказана.

Больше понизить оценки нельзя.

Пример 2. Пусть $P_0 = 4$, $P_1 = 1$, $V = \{(1,0), (-1,0), (0,-1), (0,1)\}$. Конфигурация f показана на Рисунке 1. Здесь $C \approx \frac{1}{2}|S|$, т.к. за один ход "змея" из единичек уменьшается ровно на одну клетку.

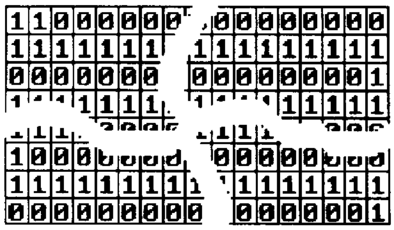

Рис. 1.

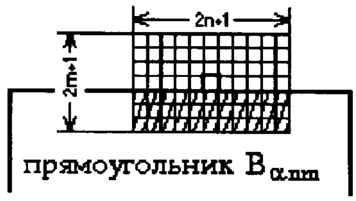

Рис. 2.

В реальных ситуациях большое значение имеет проблема локализации очага социальной напряженности (эпидемии и т.д.). Относительно этого верна следующая

Теорема 3. *Пусть $V \subseteq B_{\alpha nm}$ - прямоугольник шириной $2n+1$ и высотой $2m+1$ клеток; и $P_0 \leq \min(n(2m+1), m(2n+1))$.*

Тогда если $\exists \alpha \in S$, $\exists B_{\alpha nm} \subseteq S$, такие, что $\forall \beta \in S \setminus B_{\alpha nm}$ $f(\beta) = 0$, то $\forall t \in N$, $\forall \beta \in S \setminus B_{\alpha nm}$, $\Phi^t f(\beta) = 0$.

Доказательство. На Рисунке 2 показана окрестность одной из клеток вне прямоугольника $B_{\alpha nm}$. Единички могут лежать только в заштрихованных клетках. На углу прямоугольника $B_{\alpha nm}$ количество заштрихованных клеток еще меньше. Поэтому при $P_0 \leq \min(n(2m+1), m(2n+1))$ - количества заштрихованных клеток при положении ячейки сверху или сбоку от прямоугольника, нулевые состояния клеток вне прямоугольника не смогут перейти в единички. Теорема доказана.

При условиях, определенных в Теореме 3, возбужденные ячейки ограничены прямоугольниками, и возбуждение не может выйти оттуда. При достаточно больших $|V|$ и квадратных окрестностях $P_0 \leq \frac{1}{2}|V|$.

4.2. Смешанное общество

Лемма 2. *При $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$ период $T(f)$в этой модели равен 0 или 1, т.е. модель почти стабилизируется.*

Доказательство. Рассмотрим все α для которых $\Phi^t f(\alpha) = 1$ при некотором $t > 0$. Для них имеем

либо $\Phi^{t-1} f(\alpha) = 0$, тогда $\exists \beta \in S$, $\Phi^{t-1} f(\beta) = 1$, $n(\alpha) \neq n(\beta)$ и на следующем шаге уже $\Phi^{t+1} f(\beta) = 1$ и снова $\Phi^{t+2} f(\alpha) = 1$, т.е. $\Phi^t f(\alpha) = \Phi^{t+2} f(\alpha)$;

либо $\Phi^{t-1} f(\alpha) = 1$, тогда опять же $\exists \beta \in S$, $\Phi^{t-1} f(\beta) = 1$, $n(\alpha) \neq n(\beta)$ и на следующем шаге $\Phi^{t+1} f(\alpha) = 1$, т.е. $\Phi^t f(\alpha) = \Phi^{t+1} f(\alpha)$, и лемма доказана.

Теорема 4. *При* $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$, *если* $\exists B \subset S$ *такое, что* $\forall \alpha, \beta \in V(V(B)) \quad n(\alpha) = n(\beta)$ *и* $\forall \alpha \in S \setminus (V(V(B))) \quad f(\alpha) = 0$, *то* $\forall t \in N \quad \Phi^t f(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in S \setminus B$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\exists t, \alpha \in S \setminus (V(V(B)))$, что $\Phi^t f(\alpha) = 1$. Но в силу $f(\alpha) = 0$, существует такое t_1, что $\Phi^{t_1} f(\alpha) = 0$ и $\Phi^{t_1+1} f(\alpha) = 1$. Т.к. $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$, из этого следует, что $\exists \beta \in V(\alpha)$ с $n(\alpha) \neq n(\beta)$ и $\Phi^{t_1} f(\beta) = 1$. Из-за симметричности V $\alpha \in V(\beta)$ и, отсюда, $\beta \notin B$, т.к. иначе бы $\alpha \in V(B)$. Получаем, что $f(\beta) = 0$ и $t_1 > 0$.

Далее $\exists t_2 < t_1$ такое, что $\Phi^{t_2} f(\beta) = 0$ и $\Phi^{t_2+1} f(\beta) = 1$. Опять же из-за $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$ $\exists \gamma \in V(\beta)$ такое, что $\Phi^{t_2} f(\gamma) = 1$ и $n(\gamma) \neq n(\beta)$.

Повторяя таким образом процесс, мы получаем последовательность $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\alpha_n \in B$, причем в этой последовательности есть как минимум три члена. $\alpha_{n-1} \in V(\alpha_n)$, $\alpha_{n-1} \in V(B)$ и $\alpha_{n-1} \in V(V(B))$. Аналогично, $\alpha_{n-2} \in V(\alpha_{n-1})$ и $\alpha_{n-2} \in V(V(B))$, но $n(\alpha_{n-2}) \neq n(\alpha_{n-1})$, и мы получаем противоречие с условиями теоремы.

Теорема 4 показывает, что нужно для локализации конфликта - двойное "кольцо" из однородных индивидуумов. Однако, при других P_0 и P_1 этого кольца может и не хватить, т.к. в этом случае возбуждение распространяется и по однородному сообществу (см. выше).

Для этой модели также справедлива Теорема 1 о мажорантности.

Доказательство Теоремы 1.

Если $\forall \beta \in V(\alpha)\ n(\beta) = n(\alpha)$, то доказательство не меняется.

Если же $\exists \beta \in V(\alpha)$, что $n(\beta) \neq n(\alpha)$ и $f(\beta) = 1$, то $\Phi f(\alpha) = 1$, и $g(\beta)$ должно равняться 1 (из-за $f \leq g$), откуда получаем $\Phi g(\alpha) = 1$, и все верно.

Если при всех $\beta \in V(\alpha)$ $n(\beta) \neq n(\alpha)$, но $g(\beta) = 0$, то для тех же β получаем $f(\beta) = 0$ и, применяя старое доказательство, приходим к $\Phi f \leq \Phi g$.

5. Статистические исследования

5.1. Однородное общество

Пусть теперь множество конфигураций $\mathbf{K}(S)$ представляет из себя вероятностное пространство $\mathbf{K}(S) = \underbrace{Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{|S|\text{раз}}$, где $\omega \in Z_2 = \{0, 1\}$ - элементарные случайные величины с $\mathbf{P}(\xi = 0) = q$, $\mathbf{P}(\xi = 1) = p$, $p + q = 1$ - состояния клеток.

Определение 6. Пусть $\mathbf{P}(f)$ - вероятность конфигурации f. Величину $\mathbf{M}f = \frac{1}{|S|} \sum\limits_{\alpha \in S} f(\alpha)$ назовем *средней величиной активности конфигурации* в пересчете на одну ячейку.

$\mathbf{MK} = \sum\limits_{f \in \mathbf{K}(S)} \mathbf{M}f \cdot \mathbf{P}(f)$, $\mathbf{DK} = \sum\limits_{f \in \mathbf{K}(S)} (\mathbf{M}f)^2 \cdot \mathbf{P}(f)$ - математическое ожидание и дисперсия средней величины активности. Мы также будем пользоваться обозначениями: $\mathbf{M}\Phi^t\mathbf{K} = \sum\limits_{f \in \mathbf{K}(S)} \mathbf{M}\Phi^t f \cdot \mathbf{P}(f)$ - математическое ожидание средней величины активности на шаге t, $\mathbf{M}C = \sum\limits_{f \in \mathbf{K}(S)} C(f) \cdot \mathbf{P}(f)$, $\mathbf{D}C = \sum\limits_{f \in \mathbf{K}(f)} (C(f))^2 \cdot \mathbf{P}(f)$ - математическое ожидание и дисперсия периода.

При больших S $\mathbf{M}f$ есть гауссова случайная величина с математическим ожиданием np и дисперсией npq, где $n = |S|$. Вычислим $\mathbf{M}\Phi f$.

$$\mathbf{M}\Phi f = \frac{1}{|S|} \sum_{\alpha \in S} \Phi f(\alpha) = p\{\Phi f(\beta) = 1 | f(\beta) = 1\} + q\{\Phi f(\beta) = 1 | f(\beta) = 0\} =$$

$$= p \sum_{i=P_1+1}^{m} C_m^i p^i q^{m-i} + q \sum_{i=P_0+1}^{m} C_m^i p^i q^{m-i},$$

где β - какая-либо ячейка из S. Переход к одной ячейке сделан в силу независимости случайных величин, определяющих состояние ячеек, $m = |V|$. Обозначим эту функцию за $L(p)$, $p \in [0, 1]$ и назовем ее *функцией изменения средней активности.* Исследуем вид графика $L(p)$.

Из Леммы 1 $1-\tilde{\Phi}f = \Phi(1-f)$, где $\tilde{\Phi}$ - оператор перехода сопряженной ОС,

$$\tilde{L}(p) = \mathbf{M}\tilde{\Phi}f = 1 - \mathbf{M}\Phi(1-f) = 1 - L(1-p),$$

откуда получаем связь между функциями изменения средней активности прямой и сопряженной ОС.

При $p \to 0$

$$L(p) = p\sum_{i=P_1+1}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + (1-p)\sum_{i=P_0+1}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} = Ap^s + o(p^s),$$

где $A \geq 1$, $s = \min(P_0+2, P_1+1)$. При $P_0+2 \geq 2$, $P_1+1 \geq 2$, т.е. при $P_0 \geq 0$ получаем, что при $p \to 0$ $L(p) = o(p)$. Это означает, что при p близких к нулю, график $L(p)$ лежит ниже графика функции $y = p$.

Применяя полученный результат к сопряженной ОС, получаем при

$$\tilde{P}_0 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m-1-P_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 \leq m-1$$

$\tilde{L}(p) = 0(p) \Rightarrow \tilde{L}(1-p) = o(1-p) \Rightarrow L(p) = 1 - \tilde{L}(1-p) = 1 + o(p)$, т.е. при $p \to 1$ функция изменения средней активности ведет себя так же, как и аналогичная функция сопряженной ОС, и при $P_1 \leq m-1$ график функции $L(p)$ лежит выше графика функции $y = p$.

$L'(p) = L'_p(p,q) - L'_q(p,q)$, полагая p и q независимыми переменными.

$$L'(p) = \sum_{i=P_1+1}^{m}\Big[(i+1)C_m^i p^i q^{m-i} - (m-i)C_m^i p^{i+1} q^{m-i-1}\Big] +$$

$$+\sum_{i=P_0+1}^{m}\Big[iC_m^i p^{i-1} q^{m-i+1} - (m-i+1)C_m^i p^{i+1} q^{m-i}\Big] =$$

$$= \sum_{i=P_1+1}^{m}\Big[(i+1)q-(m-i)p\Big]C_m^i p^i q^{m-i-1} + \sum_{i=P_0+1}^{m}\Big[iq-(m-i+1)p\Big]C_m^i p^i q^{m-i} =$$

$$= \sum_{i=P_1+1}^{m}\Big[(i+1)-(m+1)p\Big]C_m^i p^i q^{m-i-1} + \sum_{i=P_0+1}^{m}\Big[i-(m+1)p\Big]C_m^i p^i q^{m-i}$$

при $(P_1+2) \geq (m+1)p$, $(P_0+1) \geq (m+1)p$, т.е. при $p \leq (m+1)^{-1}\min(P_0+1, P_1+2)$ $\quad L'(p) \geq 0$ и $L(p)$ не убывает.

Применяя полученный результат к сопряженной ОС, получаем: $L'(p) = \tilde{L}'(1-p)$, и при

$$1 - p \le (m+1)^{-1} \min(\tilde{P}_0 + 1, \tilde{P}_1 + 2)$$

$$(m+1)(1-p) \le \min(m - P_1, m - P_0 + 1)$$

$$(m+1) - \min(m - P_1, m - P_0 + 1) \le p(m+1)$$

$$m - m + 1 + \max(P_1, P_0 - 1) \le p(m+1)$$

$$p \ge (m+1)^{-1} \max(P_0, P_1 + 1)$$

$L'(p) \ge 0$ и $L(p)$ возрастает.

Теорема 5. *При $P_0 \ge 0$, $P_1 \le |V| - 1$, $P_0 - P_1 = 0, 1, 2$ график функции изменения средней активности имеет вид как на Рисунке 3 и существует ровно одна точка x_0 пересечения графика функции $L(p)$ с графиком функции $y = p$, причем $L(p)$ пересекает прямую $y = p$ снизу.*

Доказательство. Пусть $P_1 = P_0 + h$, тогда

$$\min(P_0 + 1, P_0 + 2 + h) = \begin{cases} P_0 + 1 & h \ge -1 \\ P_0 + 2 + h & h < -1 \end{cases},$$

$$\max(P_0, P_0 + 1 + h) = \begin{cases} P_0 + 1 + h & h \ge -1 \\ P_0 & h < -1 \end{cases},$$

и при $h = 0, -1, -2$ $\min = \max$ и $L'(p) \ge 0$ $\forall p \in [0, 1]$.

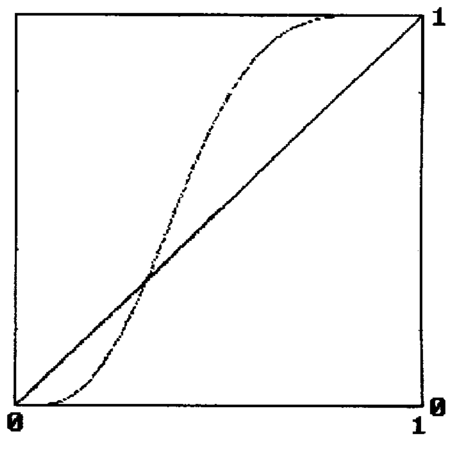

Рис. 3.

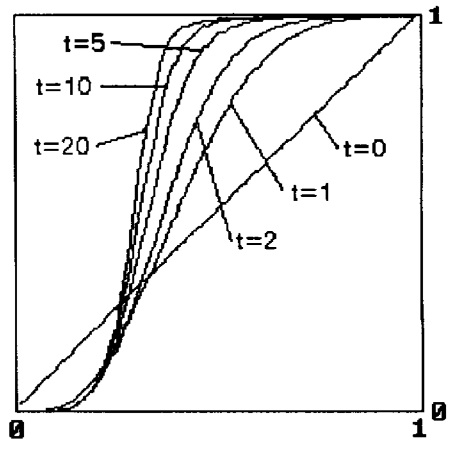

Рис. 4.

В силу того, что уже на первом шаге случайные величины - состояния ячеек становятся зависимыми, точный математический анализ эволюционирования ОС чрезвычайно затруднен. Но в первом приближении можно считать состояния ячеек на каждом шаге независимыми случайными величинами. Тогда особое значение приобретают точки пересечения графика функции $L(p)$ с графиком $y = p$ и их характер (пересечение снизу-вверх и наоборот). При выполнении условий Теоремы 5 существует ровно одна такая точка пересечения x_0 и при $p \leq x_0$ $\mathbf{M}\Phi^t\mathbf{K} \to 0$, а при $p \geq x_0$ $\mathbf{M}\Phi^t\mathbf{K} \to 1$ при $t \to \infty, |S| \to \infty$. Экспериментальные данные показаны на Рисунке 4 при $P_0 = 5$, $P_1 = 4$, $V = B_{nm} \setminus \{(0,0)\}$. Все экспериментальные данные здесь и ниже получены методом Монте-Карло.

Хотя условия Теоремы 5 и достаточно общие, для всех V, P_0, P_1 Теорема 5 не верна.

Пример 3. $V = B_{11} \setminus \{(0,0)\}$, $P_0 = 4$, $P_1 = 7$. График $L(p)$ в данном случае изображен на Рисунке 5, а результаты эксперимента на Рисунке 6.

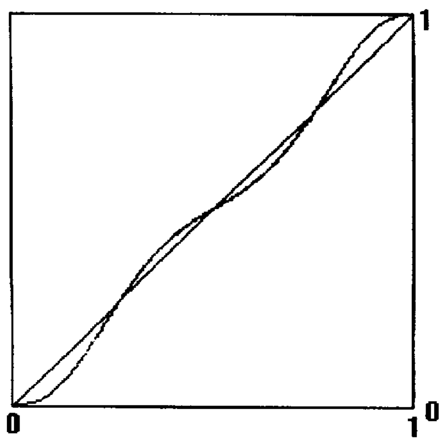

Рис. 5.

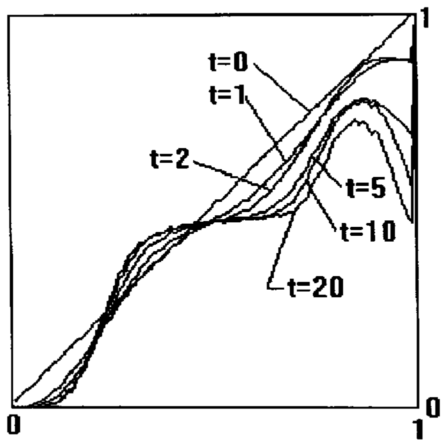

Рис. 6.

Обобщим результаты Теоремы 5.

Теорема 6. *При любых ОС σ, моделирующих возрастание социальной напряженности в однородном обществе существует конечное число точек пересечения графика функции изменения средней активности $L(p)$ для данной ОС и графика $y = p$ на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. $L(p)$ - непрерывная функция. При $P_0 \geq 0,\ P_1 \leq |V| - 1$ $L(0) = 0$ и $L(1) = 1$, а при остальных значениях $P_0,\ P_1$ в силу свойств сопряженной ОС $L(0) = 1$ и $L(1) = 0$, поэтому множество точек пересечения не пусто. Конечность следует из того, что $L(p)$ - многочлен.

Важное эмпирическое следствие, вытекающее из Теоремы 6, состоит в том, что $\exists a_1, \ldots, a_s,\ a_i \in [0,1],\ \mathbf{M}\Phi^t\mathbf{K} \to a_i,\ t \to \infty,\ |S| \to \infty$, где i - некоторый номер от 1 до s.

Однако, здесь мы рассматривали только математическое ожидание средней величины активности. Следует заметить, что формула изменения дисперсии средней величины активности очень громоздка, а по экспериментальным данным видно, что дисперсия всегда возрастает. Результаты эксперимента для $P_0 = 4,\ P_1 = 7,\ V = B_{nm} \setminus \{(0,0)\}$ приведены на Рисунке 7.

Эксперимент показывает, что распределение средней величины активности эмпирически нормальное.

Выше было показано, что предпериод $T(f) \leq o(|S|)$, и поэтому $\mathbf{M}T \leq o(|S|)$, однако при p, близких к 0 и 1, значения $\mathbf{M}T$ значительно меньше. Результаты эксперимента при $P_0 = 5,\ P_1 = 4,\ V = B_{11} \setminus \{(0,0)\}$ приведены на Рисунке 8.

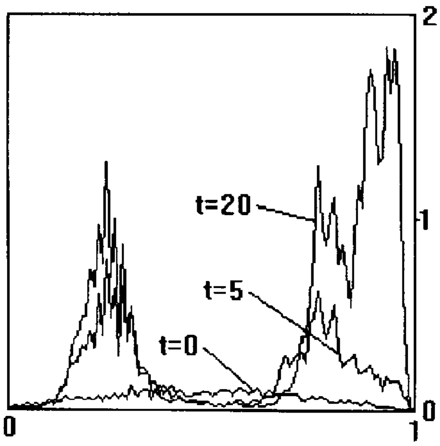

Рис. 7.

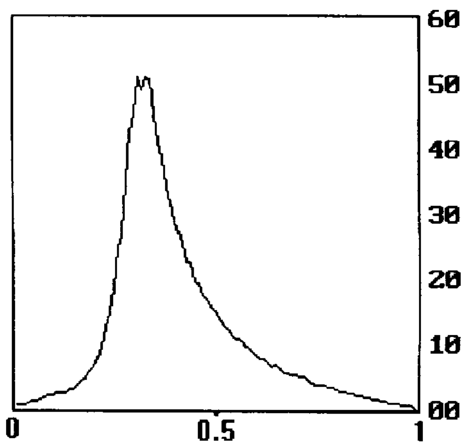

Рис. 8.

5.2. Смешанное общество

Выберем какую-либо ячейку α_0 в середине множества S. Будем изучать поведение модели неоднородного общества с начальной конфигурацией $f(\alpha_0) = 1$ и $\forall \beta \in S,\ \beta \neq \alpha_0,\ f(\beta) = 0$.

Вероятностное пространство $N(S) = \underbrace{Z^2 \times \cdots \times Z^2}_{|S| \text{раз}}$ есть совокупность независимых случайных величин, определяющих национальность в каждой ячейке с $\mathbf{P}\{n(\beta) = 1\} = p$ и $\mathbf{P}\{n(\beta) = 0\} = q$ для любого $\beta \in S$. Чтобы не загромождать анализ побочными факторами, будем исследовать модели с $P_0 \geq |V|,\ P_1 \geq |V|$.

Рассмотрим следующую булеву случайную величину $\xi : N(S) \to Z_2$. Она определяется так:

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } \{\beta \in S : \Phi^t f(\beta) = 1\} \subseteq B \\ 1, & \text{если } \beta \in S \setminus B,\ \Phi^t f(\beta) = 1 \end{cases},$$

т.е. ξ показывает, вышел ли конфликт за пределы некоторого блока или нет. Здесь $t \to \infty$, однако с некоторого момента, согласно Лемме 2, наступает стабилизация, поэтому ξ определена корректно.

Теорема 7. *Если* $V = B_{nm} \setminus \{(0,0)\}$ *и* $P_0 \geq |V|,\ P_1 \geq |V|$, *то* $\mathbf{P}\{\xi = 0\} \geq p^s + q^s$, *где* $s = 4nm + 2(n+m) + 1$.

Доказательство. $\{\xi = 0\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Big[\{\beta \in S : \Phi^t(\beta) = 1\} = B_i\Big]$, где $B_i \subseteq B$ - различные блоки внутри B. Как следует из Теоремы 4, для каждого такого B_i существует некоторый блок $\tilde{B},\ B_i \subseteq V(\tilde{B})$, что $\forall \alpha, \beta \in V(V(\tilde{B})) \setminus \tilde{B},\ n(\alpha) = n(\beta)$.

Но вероятность такого события достаточно мала: $\mathbf{P}\{\forall \alpha, \beta \in V(V(\tilde{B})) \setminus \tilde{B},\ n(\alpha) = n(\beta)\} = p^s + q^s$, где $s = |V(V(\tilde{B})) \setminus \tilde{B}|$. Эти события не независимы, но $\forall i\ \mathbf{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right\} \geq \mathbf{P}(A_i)$. Наибольшую вероятность имеет событие $A_0 = \{\forall \alpha, \beta \in V(\alpha_0),\ n(\alpha) = n(\beta)\},\ \mathbf{P}(A_0) = p^s + q^s$, где $s = 4nm + 2(n+m) + 1$ - размер $V(\alpha_0)$. Таким образом, $\mathbf{P}\{\xi = 0\} \geq p^s + q^s$, и теорема доказана.

В действительности, другие события A_i имеют ту же вероятность $\mathbf{P}(A_i) = p^s + q^s$, но здесь s существенно больше, и практически вероятность события A_i существенно меньше вероятности события A_0, т.е. A_0 - наиболее вероятное событие.

График $1 - \mathbf{P}\{A_0\}$ при $n = m = 1$ $(s = 9)$ показан на Рисунке 9, а результаты эксперимента с теми же параметрами – на Рисунке 10, где приведен полученный в ходе статистических испытаний график средней величины активности при различных t.

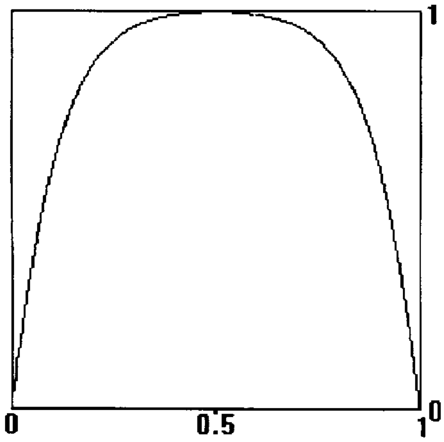

Рис. 9.

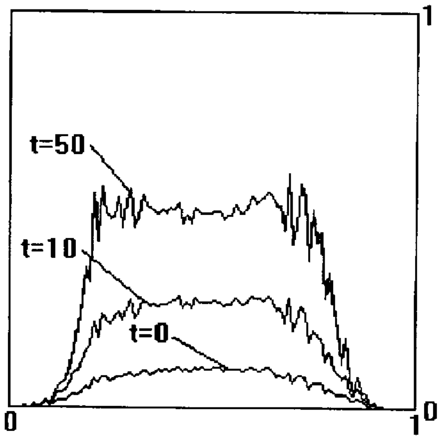

Рис. 10.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, М., 1985.

[2] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. Наука, М., 1990.