Алгоритмическая разрешимость свойств полноты и А - полноты конечных систем автоматных функций с линейной истинностной частью*

Д.Н. Бабин

Рассматриваются системы автоматных функций вида $M = \Phi \bigcup \nu$, где Φ некоторый класс Поста, а ν конечная система автоматных функций. Показано, что если $\Phi = \{x+y+z\}$, то проблема полноты и А - полноты для системы M алгоритмически разрешима, откуда следует ее разрешимость для всех замкнутых классов Φ линейных функций.

1. Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так, в работе [1] установлена континуальность всякой критериальной системы для этой задачи, а позднее в работе [2] установлена ее алгоритмическая неразрешимость для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для систем автоматов, содержащих все булевы функции [3], а также при наличии функции $xy \vee xz \vee yz$, [11] указанная задача алгоритмически разрешима.

Проблема А - полноты для систем автоматных функций алгоритмически неразрешима в общей постановке [4] и разрешима для систем, содержащих все булевы функции [5]. В работе [10] было показано, что

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта Миннауки (020105028)

для классов Поста Ф типа F^{∞}, S, P и O проблема полноты и А - пол- ноты алгоритмически неразрешима. Из результата настоящей работы будет следовать, что для классов Поста $\Phi \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ проблема полноты и А - полноты алгоритмически разрешима.

2. Основные понятия и результаты

Мы будем использовать обозначения из работ [6, 7]. Пусть E_2 = $\{0,1\}$, E_2^* - множество всех слов $a(1)a(2)...a(s)$, где $a(j) \in E_2, j$ = $1, 2, ..s$, E_2^{τ} - множество всех слов $a(1)...a(\tau)$ длины τ. Пусть $f : (E_2^*)^n \to (E_2^*)^m$ -автоматная функция (а - функция), т.е она задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \quad j = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, ..., q_r\}$. Параметр q называется состоянием а - функции f, q_1 - ее начальным состоянием, вектор - буквы $a = (a_1, ..., a_n)$ и $b = (b_1, ..., b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверх слова $a(1)a(2)...$ и $b(1)b(2)...$ - входным и выходным сверхсловами, со ответственно. Класс всех а - функций обозначим через P_a. В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции и обратной связи. Пусть $M \subseteq P_a$, обозначим через $[M]$ множество всех а - функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M] = P_a$. Проблема полноты для P_a состоит в описании всех полных множеств M. Пусть τ - натуральное число, $f^{\tau} : ({E_2}^{\tau})^n \to ({E_2}^{\tau})^m$ - ограничение функции f на множество слов длины τ. Скажем, что а - функции $f(x_1, ..., x_n)$ и $g(x_1, ..., x_n)$ τ -равны, если $f^{\tau} = g^{\tau}$. Обозначим через $[M]_{\tau}$ множество всех а - функций, τ - равных получающимся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Очевидно [7], что результат применения о.с. τ - равен τ применениям суперпозиции. Множество M называется τ - полным, если $[M]_{\tau} = P_a$. Множество M называется А - полным, если $[M]_{\tau} = P_a$ при всех τ. Пусть $[M]_A = \bigcap_{\tau} [M]_{\tau}$. Проблема А - полноты для P_a состоит в описании всех А - полных множеств M. Очевидно, что полное множество M является А - полным. Обозначим через $P_a^{(1)}$ - класс всех а - функций с одним состоянием, назовем такие а-функции истинностными. Пусть Φ - замкнутый класс из $P_a^{(1)}$. Рассмотрим проблемы полноты и А - полноты для систем вида $\Phi \bigcup \nu$, которые назовем проблемами Φ - полноты и $\Phi - A$ -полноты, соответственно. Здесь рассматривается случай, когда Φ является одним из классов Поста: $L_1 = [\{x + y, 1\}]$, $L_2 = [\{x + y + 1\}]$, $L_3 = [\{x + y\}]$, $L_4 = [\{x + y + z\}]$, $L_5 = [\{x + y + z + 1\}]$.

Теорема 1. *Проблема Φ - полноты для каждого класса $\Phi \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ алгоритмически разрешима.*

Теорема 2. *Проблема $\Phi - A$ - полноты для каждого класса $\Phi \in \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ алгоритмически разрешима.*

Заметим, что если проблема Φ - полноты ($\Phi - A$ - полноты) алгоритмически разрешима для $\Phi = F_1$, то она разрешима для всякого замкнутого класса $F_2 \supseteq F_1$ и двойственного к F_1 замкнутого класса F_1^*. Отсюда следует, что для доказательства теорем достаточно установить их справедливость для $\Phi = L_4$.

Автор выражает благодарность академику АТН РФ Кудрявцеву В.Б. за постановку задачи и ценные указания.

3. Основные леммы

Пусть $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $\overline{X}, 1, 0, H, f_{\&}, f_{\vee}$ - автоматные интерпретации соответствующих истинностных функций $\bar{x}, 1, 0, h, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2$. Для $D \in \mathbf{N}_0, N \in \mathbf{N}$ автоматную функцию с уравнениями (1), где $m = n = D + N, Q = \{1, ..., D + N\}$, и для любого $a \in E_2^{D+N}$ $\varphi(i, a) = i + 1$ при $i < D + N$, $\varphi(D + N, a) = D + 1; \psi(i, a) = 0..010..0$, где 1 стоит на i - том месте, назовем (D, N)-счетчиком и обозначим через $B_{D,N}$. Если же при этом $\psi(i, (a_1, ...a_{D+N})) = a_i$, где $a_1, .., a_{D+N} \in E_2$, то назовем ее (D, N) - селектором и обозначим через $C_{D,N}$. Множество всех счетчиков обозначим через $\mathbf{K}$, а всех селекторов - через $\mathbf{C}$. Без ограничения общности, будем исследовать на полноту и А - полноту системы вида $\{H, f\}$, где f задается уравнениями (1).

Последовательность (2)

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), ..., (a(s), b(s)) \tag{2}$$

где $a(1), ..., a(s) \in E_2^n; q(1), ...q(s+1) \in Q; b(1), .., b(s) \in E_2^m; b(i) =$ $\psi(q(i), a(i)); q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), i = 1, .., s; q(1) = q_1$, назовем $s-$ экс-периментом с а-функцией f. Если еще для некоторого $D, 1 \leq D \leq s$ имеем $\varphi(q(s), a(s)) = q(D+1)$, то (2) назовем (D, s) - экспериментом с а-функцией f.

Будем использовать знак $\sum$ для обозначения покомпанентной суммы произвольного числа векторов из ${E_2}^k$ при произвольном k. Для обо-значения наборов 11...1 и 00...0 произвольной длины, там где это не приводит к недоразумению, будем использовать, соответственно, **1** и **0**. Для $\alpha \in E_2^k$ при всех k и $\delta \in E_2$ определим $\alpha * \delta \in E_2^k$ так: $\alpha * 0 = \mathbf{0}, \alpha * 1 = \alpha$. Для $\alpha \in E_2^{kN}$, вектор $\beta \in E_2^N$, где $\beta(i) = \sum\limits_{t=i|modN} \alpha(t)$, будем обозначать через α/N. Пусть $P_0(D, s)$ и $P_0(s)$ суть множества всех (D, s)- и s-экспериментов, соответственно, с а-функцией f, $P \subseteq P_0(D, s)$ $(P \subseteq P_0(s))$, и пусть $\Delta \in E_2^s$. Скажем, что а-функция f сохраняет в j-тый момент на P *однородные* линейные уравнения с коэффициентами Δ, если для каждого эксперимента (2) из P имеем соотношение (3) при $\Gamma = 0$; f при тех же условиях сохраняет *неоднородные* линейные уравне-ния, если имеем (3) для $\Gamma = 1$.

$$\psi(q(j), a(j) + \sum_1^s a(i) * \Delta(i) + \Gamma) \;=\; b(j) + \sum_1^s b(i) * \Delta(i) + \Gamma \tag{3}$$

Скажем, что f вполне сохраняет на $P \subseteq P_0(D, s)$ однородные линейные уравнения с коэффициентами Δ, если f сохраняет их на $P_0(D, s)$ и, кроме того, для каждого эксперимента (2) из P имеем $\sum a(i) * \Delta(i) = 0$.

Для $s = D + kN$ скажем, что множество экспериментов $P \subseteq P_0(D, s)$ допускает счетчик $B_{D,N}$, если для любого $\Delta \in E_2^s, \Delta = \Delta_1\Delta_2, |\Delta_1| =$ $D, |\Delta_2| = kN$ и любого j выполнено: f не сохраняет на P в j-тый мо-мент линейные неоднородные уравнения с коэффициентами Δ; если f сохраняет на P линейные однородные уравнения с коэффициентами Δ, то f вполне сохраняет их и $\Delta_1 = \mathbf{0}$, а $\Delta_2/N = \mathbf{0}$.

Пусть s натуральное число, скажем, что а.-функция f А-допускает счетчик $B_{0,s}$, если для любого j и любого $\Delta \in E_2^s$ а-функция f не сохра-няет в j-тый момент на $P_0(s)$ никаких линейных уравнений с коэффици-ентами $\Delta \in {E_2}^s$. Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Имеет место включение* $[f,H] \supseteq \mathbf{K}$ *точно тогда, когда для любого натурального* N *найдутся* $s = D + kN$ *и* $P \subseteq P_0(D,s)$, *допускающее счетчик* $B_{D,N}$.

Лемма 2. *Имеет место включение* $[f,H]_A \supseteq \mathbf{K}$ *точно тогда, когда для любого натурального* s *а.-функция* f *A-допускает счетчик* $B_{0,s}$.

Лемма 3. *Отношения включений* $[f,H] \supseteq \mathbf{K}$ *и* $[f,H]_A \supseteq \mathbf{K}$ *алгоритмически проверяемы.*

Последовательность (4)

$$(a(1),b(1),c(1),d(1)),...,(a(s),b(s),c(s),d(s)) \tag{4}$$

где $a(1),...,a(s),c(1),...c(s) \in E_2^n$; $q(1),...q(s+1),p(1),...p(s+1) \in Q$; $b(1),..,b(s),d(1),...d(s) \in E_2^m$; $b(i) = \psi(q(i),a(i)), d(i) = \psi(p(i),c(i))$; $q(i+1) = \varphi(q(i),a(i)), p(i+1) = \varphi(p(i),c(i)), i = 1,...,s$; $q(1) = p(1) = q_1$, назовем кратным s-экспериментом с а-функцией f (рис.1).

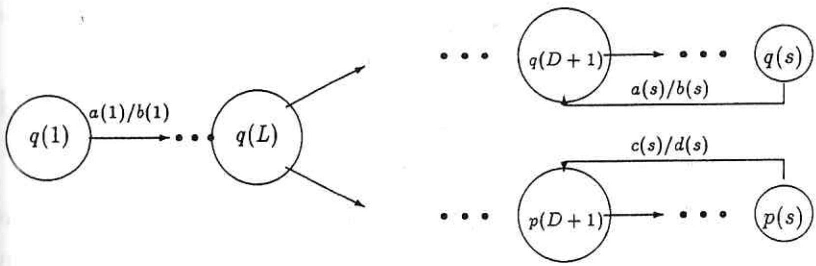

Рис.1

Если при $1 \le D \le s$ в последовательности (4) еще $\varphi(q(s),a(s)) = q(D+1), \varphi(p(s),c(s)) = p(D+1)$, и $q(i) = p(i)$ при $i = 1,2,...L$, то назовем (4) кратным (L,D,s) - экспериментом с а-функцией f.

Пусть $\Delta \in E_2^s$, скажем, что f сохраняет на кратных s (соответственно (L,D,s)) - экспериментах) *однородные* линейные уравнения с коэффициентами Δ в j-тый момент, если для каждого эксперимента (4) имеем соотношение (5) для $\Gamma = 0$; f сохраняет *неоднородные* уравнения, если для каждого (4) имеем (5) при $\Gamma = 1$

$$\psi(q(j),a(j)+\sum_1^s(a(i)+c(i))*\Delta(i)+\Gamma) = b(j)+\sum_1^s(b(i)+d(i))*\Delta(i)+\Gamma \quad (5).$$

Скажем, что f вполне сохраняет однородные линейные уравнения с коэффициентами Δ на кратных (L, D, s) - экспериментах, если f сохраняет их и, кроме того, еще для каждого (4) выполнено $\sum_{1}^{s}(a(i)+c(i)) * \Delta(i) = 0$.

Пусть $j \leq s$ натуральные числа. Последовательность

$$(a(1), b(1), c(1)), ..., (a(s), b(s), c(s)) \ , \qquad (6)$$

где $a(i), b(i), c(i) \in E_2^n, q(i), p(i), r(i), \in Q, q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), p(i+1) = \varphi(p(i), b(i)),\ r(i+1) = \varphi(r(i), c(i)), i = 1, ..., s,\ q(1) = p(1) = r(1) = q_1; a(i) = b(i) = c(i), q(i) = p(i) = r(i)$ при $i \leq j$; назовем трехкратным (s, j) -экспериментом с а-функцией f. Если при этом еще для некоторого $D, 1 \leq D \leq s,\ \varphi(q(s), a(s)) = q(D+1),\ \varphi(p(s), a(s)) = p(D+1),\ \varphi(r(s), a(s)) = r(D+1)$, то назовем (6) трехкратным (D, s, j) - экспериментом с а-функцией f (рис.2).

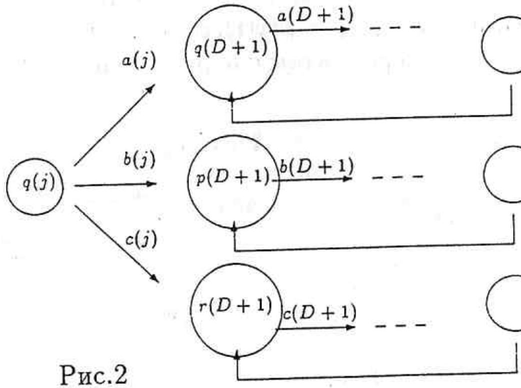

Рис.2

Скажем, что а-функция f линейна на трехкратных (s, j) экспериментах ((D, s, j)-экспериментах), если для каждого эксперимента (6) имеем соотношение (7)

$$\psi(q(j), a(j) + b(j) + c(j)) = \psi(q(j), a(j)) + \psi(q(j), b(j)) + \psi(q(j), c(j)) \quad (7)$$

Предложение 1. *Если $[f, H] \ni f_{\&}$, то для всех D, s, j а-функция f не является линейной на трехкратных (s, j)- и (D, s, j)-экспериментах.*

Предложение 2. *Свойство: найдутся D, s, j такие, что f линейна на трехкратных (D, s, j)-экспериментах ((s, j)-экспериментах) алгоритмически проверяемо.*

Лемма 4. *Если* $[f,H] \supseteq \mathbf{K}$ *и для любых* D,s,j *а-функция* f *не является линейной на трехкратных* (D,s,j)*- и* (s,j)*-экспериментах, то имеет место включение* $[f,H] \supseteq \mathbf{C}$.

Лемма 5. *Если* $[f,H]_A \supseteq \mathbf{K}$ *и для любых* s,j *а-функция* f *не является линейной на трехкратных* (s,j)*-экспериментах, то имеет место включение* $[f,H]_A \supseteq C$.

Лемма 6. *Для* f *такой, что* $[f,H] \supseteq K$ *и* $[f,H] \supseteq C$, *через* f *выразима а-функция* $f_{\&}$ *точно тогда, когда выполнено: для любых натуральных* j,D,s *таких, что* $j,D \leq s$, f *не является линейной на трехкратных* $(s,j)-$ *экспериментах и* f *не является линейной на трехкратных* (D,s,j)*- экспериментах.*

Лемма 7. *Для* f *такой, что* $[f,H]_A \supseteq K$ *и* $[f,H]_A \supseteq C$, *через* f *A-выразима а-функция* $f_{\&}$ *точно тогда, когда для любых натуральных* s *и* j *а-функция* f *не является линейной на трехкратных* $(s,j)-$ *экспериментах.*

4. Доказательство основных лемм

Пусть $U = \{\delta_1\delta_2^r\delta_3 | r \in \mathbf{N}\}$ где $\delta_1,\delta_2,\delta_3 \in E_2^*$ некоторые слова. Для $\alpha,\beta \in E_2^t$, $|\alpha| = |\beta| = t$, определим $(\alpha,\beta) = \sum\limits_1^t \alpha(i)\beta(i)$. Скажем, что множество U допускает слово $\gamma \in E_2^*$, если существует натуральное $l = l(\gamma)$ такое, что

$$\forall k \left((\exists r \ \ (|\delta_1| + |\delta_2|r + |\delta_3| = |\gamma| lk)) \Longrightarrow ((\delta_1\delta_2^r\delta_3, \gamma^{kl}) = 0) \right).$$

Множество U, допускающее все $\gamma \in E_2^*$, назовем универсальным.

Утверждение 1. *Всякое универсальное множество* $U = \{\delta_1\delta_2^r\delta_3 | r \in \mathbf{N}\}$ *является таким, что либо для всех натуральных* r *имеем* $|\delta_1| + |\delta_3| \neq r|\delta_2|$, *либо для некоторого* $\delta \in E_2^*$ *выполнено* $U = \{\delta(\delta^t) | t \in \mathbf{N}\}$.

Доказательство: Пусть $|\delta_1| = d_1, |\delta_2| = d_2, |\delta_3| = d_3, d_1 + d_3 = td_2$, рассмотрим $d = t'd_2 + 1, d > 2(d_1 + d_3)$. Для $\xi \in E_2^d$ найдется $l = l(\xi) > d$ кратное d_2, такое что $d_1 + d_2 r + d_3 = (t+r)d_2 = dl$, тогда получаем

$(\delta_1\delta_2^r\delta_3,\xi^l)=0$. Без ограничения общности, выбрав l кратное всем $l(\xi)$, получим, что $(\delta_1\delta_2^r\delta_3,\xi^l)=0$ для всех $\xi\in E_2^d$. В частности, для $\xi=$ 0...010...0, где 1 стоит на i-том месте, имеем уравнения

$$\begin{cases}\delta_1(i)+\delta_2(i+d-d_1|mod\ d_2)+...+\delta_2(i+d-d_1+l-2|mod\ d_2)=0,\\ i=1...d_1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_2(i-d_1|mod\ d_2)+\delta_2(i+1-d_1)+...+\delta_2(i+l-1-d_1|mod\ d_2)=0,\\ i=d_1+1,...d-d_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{t=2}^{l}\delta_2(i+t-2-d_1|mod\ d_2)+\delta_3(i+l-1-d_1|mod\ d_2)=0,\\ i=d-d_3+1,...d.\end{cases}$$

Сложив подходящим образом эти уравнения получаем:

$\delta_1(i)=\delta_2(i+d_3|mod\ d_2)$ при $i=1...d_1$,

$\delta_3(p)=\delta_2(p|mod\ d_2)$ при $p\le d_3$. Тогда для $\delta=\delta_2(d_3+1|mod\ d_2)...\delta_2(d_3+d_2|mod\ d_2)$ имеем, что $\delta_1\delta_2^r\delta_3=\delta^{r+1}$. Значит, $U=\{\delta(\delta^t)|t\in\mathbf{N}\}$. Утверждение доказано.

Пусть $Q_t\subseteq Q$ множество состояний а-функции f, достижимых из начального состояния q_1 за t тактов. Для $p_1,p_2\in Q$ и натурального s обозначим через $L(p_1,p_2,s)$ множество слов $\beta\in(E_2^{m+n})^s$ вида $\beta=\beta(1)\beta(2)...\beta(s)$, $\beta(i)=(a(i),b(i))$, $a(i)\in E_2^n, b(i)\in E_2^m$ таких, что $\varphi(p_1,a(1),...,a(s))=p_2$, $b(1),b(2),...,b(s)=\bar\psi(p_1,a(1),a(2),...,a(s))$.

Для $\Delta\in E_2^s$ определим

$$X(p_1,p_2,\Delta)=\{\sum_1^s\beta(i)*\Delta(i)\ \mid\ \beta(1))...\beta(s)\in L(p_1,p_2,s)\}$$

Пусть $G(\Delta)$ полный граф с множеством вершин Q, ребро (p_1,p_2) кото- рого имеет отметку $X(p_1,p_2,\Delta)$. Заметим, что число R разных пол- ных помеченных графов $G(\Delta)$ таково, что $\log\log R<2^{m+n+1}\log\log|Q|$. Пусть $\widehat{G}=\{G(\Delta)|\Delta\in E_2{}^*\}$. Автомат без выхода $\widehat{A}=(E_2,\widehat{G},\phi,G_\emptyset)$, где $\phi(G(\Delta),x)=G(\Delta x), x\in E_2, G_\emptyset$ - полный граф с пустыми отмет- ками, назовем предсказывающим автоматом а.-функции f. Заметим, что функция ϕ определена корректно. Состояние автомата $\widehat{A}$ назовем основным, если оно достижимо из начального словом длины выше лю- бой наперед заданной. Будем обозначать через Δ' слово $\Delta+10...0$, где $|\Delta|=|\Delta'|=|10...0|$.

Замечание 1. Пусть $\widetilde{j},\widetilde{D},\widetilde{s}\in\mathbf{N},\widetilde{j}<\widetilde{D}$, а-функция f на $(\widetilde{D},\widetilde{s})$ - экспе- риментах сохраняет в $\widetilde{j}$ - тый момент однородные линейные уравнени с коэффициентами $\widetilde{\Delta}_1\widetilde{\Delta}_2\widetilde{\Delta}_3, |\widetilde{\Delta}_1| = \widetilde{j}-1, |\widetilde{\Delta}_2| = \widetilde{D}-\widetilde{j}+1, |\widetilde{\Delta}_3| = \widetilde{s}-\widetilde{D}$, а другие коэффициенты $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, таковы, что $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_1)$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2') = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_2')$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3) = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_3)$, $|\Delta_1| = j-1, |\Delta_2| = D-j+1, |\Delta_3| = s-D$, тогда по построению автомата $\widehat{A}$ а-функция f сохраняет однородную линейную зависимость с коэффициентами $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ на (D, s) -экспериментах в j-тый момент.

Замечание верно и для случая $\widetilde{j} \geq \widetilde{D}$ и $|\widetilde{\Delta}_1| = \widetilde{D}, |\widetilde{\Delta}_2| = \widetilde{j}-\widetilde{D}-1, |\widetilde{\Delta}_3| = \widetilde{s}-\widetilde{j}+1$ при $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_1)$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2) = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_2)$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3') = \phi(G_\emptyset, \widetilde{\Delta}_3')$, а также для случаев неоднородных линейных уравнений.

Тройку (G_1, G_2, G_3) состояний автомата $\widehat{A}$, где G_2, G_3 - основные состояния, назовем вырожденной тройкой первого рода, если а-функция f сохраняет однородные линейные уравнения для любых $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \in E_2^*$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = G_1$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2') = G_2$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3) = G_3$ на $(|\Delta_1\Delta_2|, |\Delta_1\Delta_2\Delta_3|)$ экспериментах в $(|\Delta_1|+1)$ момент. Тройку (G_1, G_2, G_3), где G_1 основное состояние и хотя бы одно из G_2, G_3 основное состояние, назовем, вырожденной тройкой второго рода, если $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = G_1$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2) = G_2$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3') = G_3$, и а-функция f сохраняет однородные линейные уравнения с коэффициентами $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ на $(|\Delta_1|, |\Delta_1\Delta_2\Delta_3|)$ экспериментах в $(|\Delta_1\Delta_2|+1)$ -тый момент. Множество вырожденных троек первого рода обозначим через $Ro1(f)$, второго рода - через $Ro2(f)$.

Тройку (G_1, G_2, G_3) назовем резонансной первого рода, если найдется $\delta \in E_2^*$ такое, что для любых $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \in E_2^*$, где $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = G_1$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2') = G_2$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3) = G_3$ имеем $\Delta_1 = 0...0, \Delta_2 = 0...0$, и найдется натуральное t, такое что $\Delta_3 = (\delta)^t$. Тройку (G_1, G_2, G_3) назовем резонансной второго рода, если найдется $\delta \in E_2^*$ такое, что для любых $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \in E_2^*$, где $\phi(G_\emptyset, \Delta_1) = G_1$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_2) = G_2$, $\phi(G_\emptyset, \Delta_3') = G_3$ имеем $\Delta_1 = 0...0$, и найдется натуральное t, такое что $\Delta_2\Delta_3 = (\delta)^t$. Для а-функции f обозначим множество резонансных троек первого рода через $GR_1(f)$, второго - через $GR_2(f)$.

Утверждение 2. *Если имеет место включение* $[f, H] \supseteq \mathbf{K}$, *то* $Ro1(f) \subseteq RG_1(f)$ *и* $Ro2(f) \subseteq RG_2(f)$.

Доказательство утверждения 2. Пусть найдется вырожденная однородная тройка первого рода (G_1, G_2, G_3), такая что для бесконечного числа разных D и разных k найдутся $j = j(D,k) \leq D$, $\Delta_1 = \Delta_1(D,k), \Delta_2 = \Delta_2(D,k)$, $\Delta_3 = \Delta_3(D,k) \in E_2^*$, $|\Delta_1| = j-1, |\Delta_2| =$

$D - j + 1, |\Delta_3| = k$, $\phi(G_0, \Delta_1) = G_1$, $\phi(G_0, \Delta_2) = G_2$, $\phi(G_0, \Delta_3) = G_3$
и на всех (D, s) экспериментах а-функция f сохраняет однородные ли-
нейные уравнения с коэффициентами $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ в j-тый момент. Следо-
вательно, в автомате $\widehat{A}$ найдутся определяющие простые пути слова
$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in E_2^*$, зависящие от D, k, такие что $\Delta_3(r) = \beta_1\beta_2^r\beta_3$. Для
произвольных $\gamma', \gamma \in E_2^*$ рассмотрим константную а-функцию $g(\gamma', \gamma)$
с выходным сверхсловом $\gamma'\gamma\gamma....$ Поскольку $g(\gamma', \gamma) \in [\{ f, H \}]$, то по
утверждению 1 имеем $(\beta_1\beta_2^r\beta_3, \gamma^{\,l}) = 0$ при совпадении длин этих слов,
следовательно, найдется $\delta \in E_2^*$ такое что $\{\beta_1\beta_2^r\beta_3 \mid r \in \mathbf{N}\} = \{\delta^t | t \in \mathbf{N}\}$.
Если предположить, что найдутся еще какие-нибудь $\beta_1', \beta_2', \beta_3' \in E_2^*$ со
свойством $\phi(G_0, \beta_1'(\beta_2')^r\beta_3') = G_3$ для всех $r \in \mathbf{N}$, то получим совпадение
множеств $\{\delta^r | r \in \mathbf{N}\} = \{(\delta')^r | r \in \mathbf{N}\}$. Так как $(\Delta_1(D, k)\Delta_2(D, k), \gamma') = 0$
при всех γ', имеем $\Delta_1(D, k)\Delta_2(D, k) = 00...0$. Следовательно, (G_1, G_2, G_3)
резонансная тройка 1 рода. Аналогично, в случае троек второго рода
имеем $\Delta_2^{(r)} = \alpha_1(\alpha_2)^r\alpha_3$, $\Delta_3^{(r)} = \beta_1(\beta_2)^r\beta_3$ и получаем, что множество
$\{\alpha_1(\alpha_2)^r\alpha_3\beta_1(\beta_2)^t\beta_3 | t, r \in \mathbf{N}\}$ универсально, а, стало быть, (G_1, G_2, G_3)
резонансная тройка второго рода. Утверждение доказано.

Доказательство леммы 1. Необходимость. Пусть через H, f
выражена а-функция g, равная $(0 \times B_{0,N})$, значит, найдутся k, D, s
$D + kN$ и множество $P(D, s)$ (в данном случае одноэлементное) (D, s)
экспериментов с а-функцией g, допускающее счетчик $B_{D,N}$ в j-тый
момент при $j = 1, 2, ...s$. Пусть а-функция g получилась операцией
обратной связи из а-функции $\widetilde{g}$ и пусть $\widetilde{P}(D, s)$ множество (D, s)
экспериментов с а-функцией $\widetilde{g}$, из которого при применении обратной
связи получается множество $P(D, s)$. Покажем, что $\widetilde{P}(D, s)$ допускает
счетчик $B_{D,N}$ в j-тый момент при $j = 1, 2, ...s$. В самом деле: пусть
эксперимент (2), получившийся из эксперимента (8), нарушал линейную
зависимость с коэффициентами $\Delta \in E_2^s$ в j-тый момент.

$$((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \dots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))) \quad (8)$$

Это означает, что для $a = a(j) + \sum a(i) * \Delta(i)$, $b = b(j) + \sum b(i) * \Delta(i)$
имеем $\psi(q(j), a) \neq b$. Пусть входная буква a в диаграмме g получилась
из входной буквы (a, e) в диаграмме $\widetilde{g}$. Пусть $E = e(j) + \sum\limits_1^s e(i) * \Delta(i)$
$\psi_{\widetilde{g}}(q(j), (a, e)) = (b, e)$, $\psi_{\widetilde{g}}(q(j), (a, E)) = (b', e')$. По свойству о.с. имеем
$e = e'$ и, если есть сохранение уравнений с коэффициентами Δ в j-тый
момент для $\widetilde{g}$, то $E = e'$, значит, $b = b'$ и это сохранение было для g, что

противоречит нашему предположению.

Пусть теперь на эксперименте (2) выполнено вполне сохранение уравнений с коэффициентами Δ, а на эксперименте (8) лишь сохранение таковых, тогда $\psi_{\tilde{g}}(q(j),(a,E)) = (b,E)$, $\sum a(i) * \Delta(i) = 0$, $\sum b(i) * \Delta(i) = 0, a = a(j), b = b(j)$. Пусть от противного $E \neq e(j)$. По определению обратной связи $\psi_{\tilde{g}}(q(j),(a(j),e(j))) = (b(j),e(j))$, $\psi_{\tilde{g}}(q(j),(a,E)) = (b,E) = (b,e(j))$, следовательно, $E = e(j)$ и $\sum e(i) * \Delta(i) = 0$. Таким образом, $\tilde{g}$ также допускает счетчик $B_{D,N}$ на $P(\widetilde{D},s)$.

Пусть теперь g получилась суперпозицией а-функций g_1 и g_2 и вполне сохраняет уравнения с коэффициентами Δ. Пусть эксперимент (2) получился из экспериментов $\xi_1(\Delta) = (a(1),c(1)),...,(a(s),c(s))$, $\xi_2(\Delta) = (c(1),b(1)),...,(c(s),b(s))$ а-функций g_1 и g_2, соответственно. $\sum a(i) * \Delta(i) = 0$, $\sum b(i) * \Delta(i) = 0$. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют указанные уравнения, то получим, что $\sum \Delta(i) * c(i) = 0$. Очевидно, что А.-функция H не допускает ни одного счетчика, повторяя эти рассуждения мы получим, что а-функция f допускает счетчик $B_{D,N}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Для фиксированных $N, D, k, s = D + kN$ и некоторого j рассмотрим множество (D,s)-экспериментов P с а-функцией f, допускающее в j-тый момент счетчик $B_{D,N}$. Пусть $|P| = t$ и g_j параллельное соединение t копий а-функции f. Пусть g_j описывается уравнениями (1), $\alpha_l \in P$, $\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1))\ (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), ...(a^{(l)}(s), b^{(l)}(s))$ $l = 1,2,...t$, $a(i) = (a^{(1)}(i)...a^{(t)}(i))$, $b(i) = (b^{(1)}(i)...b^{(t)}(i))$. Рассмотрим (D,s)-эксперимент (2) с а-функцией g_j. Для $a \in E_2^m$ определим линейную функцию $h : E_2^{m+n} \to E_2^m$, $h_{j,a} \in [H]$, такую что $h_{j,a}(a(i),b(i)) = a(i), h_{j,a}(a,b) = a(j)$, где $\psi(q(j),a) = b$. Ввиду допустимости $B_{D,N}$ это возможно. В состоянии $q(j)$ выходная функция а-функции $f_{j,a}(x) = h_{j,a}(x, g_j(x))$ принимает значение $a(j)$ для входных букв $a(j)$ и a, если для входной буквы a'' она дает на выходе a', то $f_{j,a'}(f_{j,a}(x))$ имеет в состоянии $(q(j),q(j))$ выходную функцию, принимающую значение $a(j)$ не менее, чем на трех входных буквах: $a, a(j), a''$. Продолжая таким образом, можно построить а-функцию f_j, имеющую (D,s)- эксперимент (2), выходная функция которой принимает в состоянии $(q(j),...,q(j))$ лишь одно значение $a(j)$. После применения о.с. к $F_{N,D,k}(x) = f_1(f_2(...f_s(x))$ получится а-функция, равная $B_{D,N}$. Достаточность доказана.

Доказательство леммы 2 аналогично.

Доказательство леммы 3. Если среди троек состояний автомата $\widehat{A}$ нет вырожденных, то выполнено условие леммы 1. Проверка этого факта производится перебором троек состояний автомата $\widehat{A}$ и (по замечанию 1) представителей путей, в них ведущих. При наличии вырожденной тройки перебором можно установить отсутствие ее резонансности и, следовательно, по утверждению 2, неполноту системы $\{f, H\}$. Пусть $T = (G_1, G_2, G_3)$ -вырожденная резонансная тройка (б.о.о. единственная) с образующей $\delta, |\delta| = d$. Пусть $P(k)$ множество всех $(D, D + kN)$ экспериментов. Если kN не кратно d, то уравнение, определенное тройкой T, не может быть выполнено на $P(k)$, и по лемме 1, $P(k)$ допускает счетчик $B_{D,N}$. Заметим, что $P(k) \neq \emptyset$ для всех $k > k_0$. Пусть теперь $N = dl$ и на $P(k)$ имеет место сохранение однородных линейных уравнений с коэффициентами $\Delta_k = 0...0(\delta)^{lk}$ в j-тый момент. Пусть $P(k)^{(1)} \subset P(k)$ множество тех экспериментов (2), где $\sum\limits_1^s a(i) * \Delta(i) = 0$. Существует автоматная функция f_1 с числом состояний не большим, чем $2^D|Q|2^{m+n+1}$, равная f и имеющая $P(k)^{(1)}$ в качестве множества всех $(D, D + kN)$ экспериментов при произвольном $k \geq k_0$. В худшем случае для f_1 найдется вырожденная резонансная тройка $(G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_3^{(3)})$ с образующей δ_1, где $|\delta_1|$ кратно N. Если $|\delta_1| > |\delta|$, то для некоторых $k > k_0$, kN не будет кратно $|\delta_1|$ и, следовательно, $P_k^{(1)}$ допускает счетчик $B_{D,N}$. Если $|\delta_1| \leq |\delta|$, то для f_1 проделаем ту же процедуру, что и для f. Так как число слов длины, не превосходящей $|\delta|$, равно 2^d, процесс закончится через 2^d шагов. Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $\Delta \in E_2^s, 1 \leq D, L \leq s$ $[f, H] \supseteq K$, f сохраняет на кратных (L, D, s) экспериментах в j-тый момент однородные уравнения (5) с коэффициентами Δ точно тогда, когда f вполне сохраняет в j-тый момент на (D, s) экспериментах уравнения (3) с коэффициентами Δ.

Доказательство. В самом деле, зафиксируем $c(1), ...c(s)$, тогда для переменных $a(1), ...a(s)$ имеет место сохранение уравнений

$$\psi(q(j), a(j) + \sum_1^s a(i) * \Delta(i) + \Gamma_1) = b(j) + \sum_1^s b(i) * \Delta(i) + \Gamma_2,$$

где

$$\sum_1^s \Delta(i) * c(i) = \Gamma_1, \sum_1^s d(i) * \Delta(i) = \Gamma_2.$$

А-функция H сохраняет эти уравнения лишь в случае $\Gamma_1 = \Gamma_2$, а по лемме 1 получаем $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. Следовательно, $\sum_1^s \Delta(i) * c(i) = 0$ для произвольного (D, s) эксперимента. Обратное очевидно. Замечание доказано.

Доказательство леммы 4. Без ограничения общности, можно считать, что $L = D$. Для фиксированных D, s и всех j в j-тый момент рассмотрим множество всех кратных (D, s)- экспериментов с а-функцией f, пусть их t штук. Пусть

$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1)), c^{(l)}(1), d^{(l)}(1))...(a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)), c^{(l)}(s), d^{(l)}(s))$ l -тый кратный эксперимент, $l = 1, 2, ...t$. Пусть

$a(i) = (a^{(1)}(i)...a^{(t)}(i)),\ b(i) = (b^{(1)}(i)...b^{(t)}(i)),$
$c(i) = (c^{(1)}(i)...c^{(t)}(i)),\ d(i) = (d^{(1)}(i)...d^{(t)}(i)).$

Поскольку все константные а-функции имеются в нашем распоряжении, можно считать, что

$c(1) = c(2) = ...c(s) = 0...0,\ d(1) = ...d(s) = 0...0$. Случай линейной зависимости $a(1), ..., a(s)$, по замечанию 2, соответствует вполне сохранению уравнений и никак не мешает последующим конструкциям. Поэтому для простоты изложения можно считать, что $a(1), a(2), ...a(s)$ линейно независимы и таковы, что $a(L) = 10...0, a(L+1) = 010...0, ...a(s) = 00...10...0$, где 1 стоит на $s - L + 1$ месте. Применив конструкпию из доказательства достаточности леммы 1, получим а-функцию $g(x)$, имеющую кратный эксперимент, выходная функция в каждом из его состояний $(q(i), p(i)), i = 1, 2, ...L-1, L+1, ...s$ является константой: в состояниях $p(1) = q(1), ...p(L-1) = q(L-1)$ - константа 0...0, в состояниях $p(L+1), ...p(s)$ -константа 0...0 в состоянии $q(L+i)$ константа 0...1...0, где 1 стоит на $i+1$ месте (рис. 3).

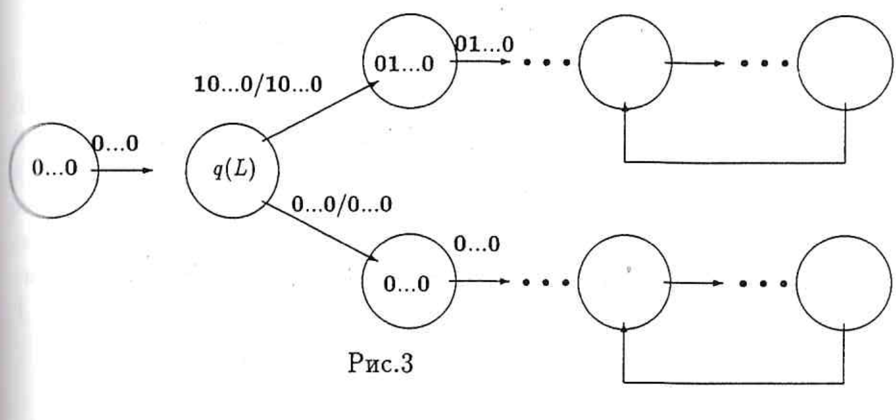

Рис.3

Пусть $E^i = \{ix | x \in E_2^n\}, i = 0, 1$. Для $a \in E_2^n$ определим линейную функцию $h_a : (E_2^n, E_2^m) \to E_2^n$ со свойствами: $h_a(0...01_i0...0, b(i)) = 0...01_i0...0$, $h_a(0...0, 0...0) = 0...0$. Поскольку f не является линейной на трехкратных экспериментах, получаем, что нет линейных зависимостей, связывающих $(a, \psi(q(L), a))$ и $(a(i), b(i)), i = 1, 2, ...s$, и можно определить

$$h_a(a, \psi(q(L), a)) = \begin{cases} 10...0 & \text{при} \quad a \in E^1 \\ 0...0 & \text{при} \quad a \in E^0 \end{cases}$$

Частично определенная линейная функция h_a сохраняет множества E^0 и E^1, после ее полного определения она будет также сохранять эти множества. Функция h_a существенно зависит от своей первой переменной. Зафиксируем $a \in E^1$. Если $g' = h_a(x, g(x))$, и для $a'' \in E^1$ *выполнено* $h_a(a'', \psi(q(L), a'')) = a'$, то функция $h_{a'}(g'(x), g(g'(x)))$ имеет кратный (L, D, s) эксперимент (4) и, кроме того, в состоянии $(q(L), q(L))$ ее выходная функция уже для $a, a'' \in E^1$ принимает значение 10...0 (Если бы $a'' \in E^0$, то для a'' принималось бы значение 0...0, а для a - значение 10...0). Продолжая этот процесс, мы получим а-функцию $f_L(x)$, имеющую кратный (D, s) -эксперимент (4), во всех состояниях которого, кроме L-того, реализуются указанные константы, а в L-том состоянии - выходная функция, принимающая значения 100...0 на E^1 и 0...0 на E^0. Применив к f_L операцию обратной связи, мы получим а-функцию F_L (рис.4)

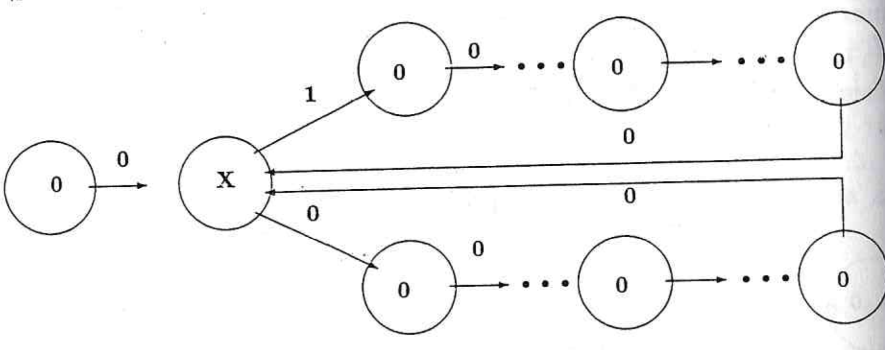

Рис.4

Рассмотрим теперь другие значения L. Без ограничения общности, можно считать, что разность $s - L$ не зависит от s, L и равна l. Для $i \neq j$

построим схему, задаваемую формулой $F_{i,j}^{L,l}(x_1,x_2) = F_{L+j}(F_{L+i}(x_1+x_2)+F_{L+j}(x_1)+x_1+x_2)$. После применения о.с. из нее получится $F_i^{L,j,l}(x)$, имеющая в диаграмме циклический фрагмент длины l (рис.5)

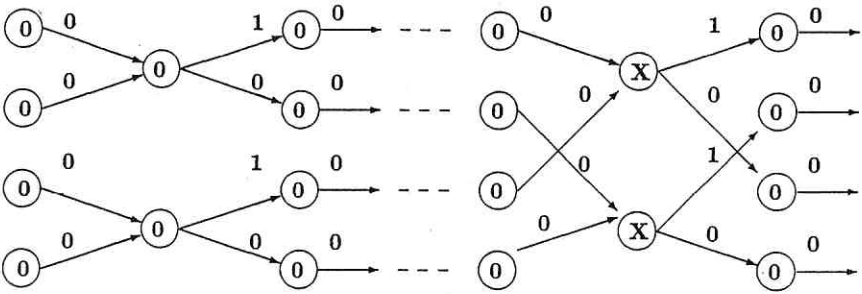

Рис.5

Далее рассмотрим $F_{i,j,k}^{(L,l)}(x_1,x_2) = F_{L+j}(F_{L+k}(x_1+x_2)+F_i^{(L,j,l)}(x_1)+x_1+x_2)$ и применим обратную связь к ее первому входу. Применив эту процедуру l раз, мы получим фрагмент длины l и высоты 2^l, после приведения подобных состояний в котором получится а-функция $G_{L,i}(x)$, имеющая диаграмму, где в i- том состоянии реализуется функция x (рис.6).

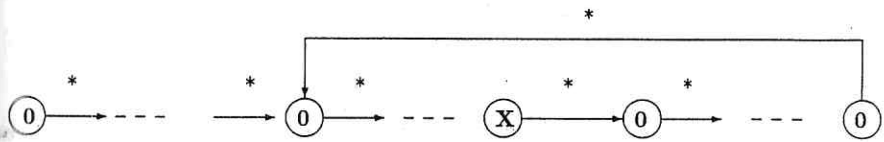

Рис.6

Селектор $C_{L,s}$ получается сложением функций $G_{L,i}$ при подходящих i. Лемма доказана.

Доказательство леммы 6. Необходимость следует из Предложения 1.
Достаточность. Для произвольных $a(1),...,a(s),b(1),...,b(s),c(1),...,c(s) \in E_2^2$, используя линейные функции и функцию $g(G_{L,i}(x))$ (см. рис.6), можно получить а-функцию g_1 с двумя входами и двумя выходами, имеющую диаграмму (рис.7)

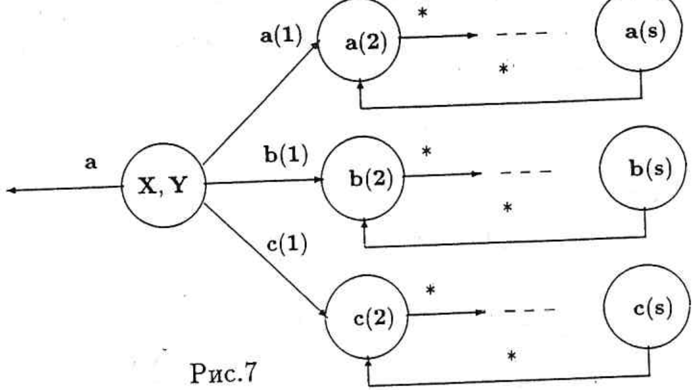

Рис.7

Здесь в состояниях помеченных $a(i), b(i), c(i)$, реализуются, соответственно, константы $a(i), b(i), c(i) i = 2, ..., s; a(1), b(1), c(1)$ попарно различны, $a = a(1) + b(1) + c(1)$, при этом а знак * означает безусловный переход. Используя свойство нелинейности функции f на трехкратных D, s, j -экспериментах, из а-функций f, g_1 можно получить а-функцию g_2 имеющую диаграмму (рис.8)

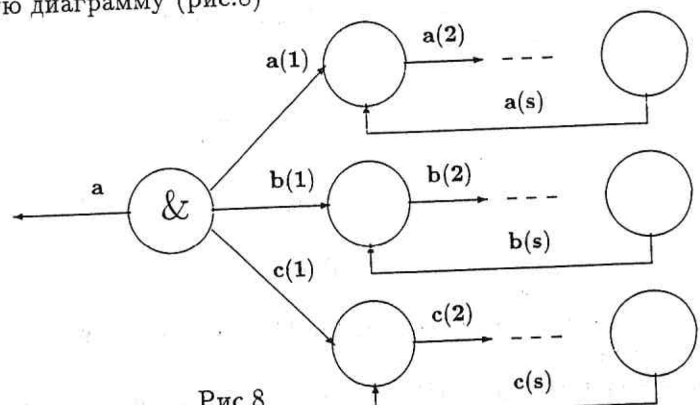

Рис.8

Функция $K_a(x, y) = g_2(g_1(x, y))$ имеет такую же диаграмму, что и (рис.8), но с безусловными переходами в состояниях $a(i), b(i), c(i)$. Обозначим через V_{00} а-функцию с диаграммой (рис.8), где $a = 00$, а вместо $x \& y$ реализуется $x \vee y$. Непосредственной проверкой можно убедиться, в том что схема, задаваемая формулой $K_{00}(V_{00}(x_1, x_2), V_{00}(x_2, x_3)) + x_2 + 1$ +

$K_{11}(K_{00}(x_1, x_2), x_3)$, после применения обратной связи ко второму входу будет иметь безусловные переходы и нелинейную функцию в начальном состоянии. Построив такие же схемы для других моментов времени и используя селекторную функцию, построенную ранее мы получим нелинейную булеву функцию. Лемма 6 доказана.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Проблемы кибернетики (1965) 13, 45-74.

[2] Кратко М.И. Алг. неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. ДАН СССР (1964) 155, N1, 35-37.

[3] Бабин Д.Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. Дискр.мат.(1992) 4, N4, 41-45.

[4] Буевич В.А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты, Мат. заметки. 1972, 12, N6 687-697.

[5] Буевич В.А. Условия А-полноты для конечных автоматов, изд. МГУ,1986.

[6] Кудрявцев В.Б., Гаврилов Г.П., Яблонский С.В., Функции алгебры логики и классы Поста. Наука, М., 1966.

[7] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, М., 1985.

[8] Мальцев А.И., Итеративные алгебры Поста. Изд. ИМСО АН СССР, Новосибирск, 1976.

[9] Мальцев А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции. Наука, М., 1986.

[10] Бабин Д.Н. Неразрешимость проблемы полноты и А-полноты некоторых систем а-функций. Дискр. мат. (1995) V 7 вып. 1 52-65.

[11] Бабин Д.Н. О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций. Дискретная математика. (1996) V 8, N 4 с.79-91.