m-M исчисление

С.Б. Прешич

Это обзорная статья, относящаяся к монографии [1] (а также и [2] – второму дополнительному изданию [1]).

Пусть $D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ – данная функция. Такую функцию будем называть m-M функцией, если

> Для любого $\Delta[\alpha_1, \beta_1] \times ... \times [\alpha_n, \beta_n] \subseteq D$ мы можем эффективно найти пару вещественных чисел $m(f)(\Delta)$, $M(f)(\Delta)$, так что для них выполняются следующие условия (*аксиомы* m-M *исчисления*)

$$m(f)(\Delta) \leq f(X) \leq M(f)(\Delta) \quad \text{для всех} \ \ \Delta \subseteq D, \ X \in \Delta, \tag{1}$$

$$\lim_{diam\Delta \to 0} (M(f)(\Delta) \text{-} m(f)(\Delta)) = 0, \text{ где } diam\Delta := \sum(\beta_i \text{-} \alpha_i)^2)^{1/2}. \tag{2}$$

Числа $m(f)(\Delta)$, $M(f)(\Delta)$ называем обобщенным минимумом и максимумом функции f, а пару $\langle m(f)(\Delta),\ M(f)(\Delta)\rangle$ называем ее m-M парой.

Например, для квадратичной функции $k(x) = x^2 - x$, где $D = [a_1, b_1]$ и $a_1 > 0$ одну m-M пару можно определить так:

$$m(k)(\Delta) = \alpha_1^2 - \beta_1, \quad M(k)(\Delta) = \beta_1^2 - \alpha_1.$$

На самом деле, в этом примере мы использовали тот факт, что функция k – разность двух неогибающих функций g и h, где $g(x) = x^2,\ h(x) = x$. По этой причине имеем следующие формулы

$$m(k)(\Delta) = g(\alpha_1) - h(\beta_1), \quad M(k)(\Delta) = g(\beta_1) - h(\alpha_1).$$

Аналогичным образом, учитывая равенство $\sin(x) = (x + \sin(x)) - x$, для функции $f(x) = \sin(x)$ получим следующие формулы

$$m(f)(\Delta) = \alpha_1 + \sin(\alpha_1) - \beta_1, \quad M(f)(\Delta) = \beta_1 + \sin(\beta_1) - \alpha_1. \tag{3}$$

В [1] (также и в [2]) имеется раздел "m-M Algebra в котором описано, как можно эффективно найти m-M пару для разных классов функций. Один из таких классов состоит из функций, задаваемых выражением, построенным из символов $+, \cdot, -, \sqrt[2k+1]{}, \exp, \sin, \cos, \min, \max$ (см. [1, 2, Определение 1.1, Леммы 1.1 - 1.4]).

Теперь на одной задаче рассмотрим некоторые общие идеи m-M исчисления.

Задача 1. *Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ данная m-M функция. Найти все решения уравнения*

$$f(x) = 0, \quad \text{где } x \in D = [a,b]. \tag{4}$$

Решение с помощью m-M исчисления. Пусть $\Delta \subseteq D$ – произвольный отрезок. Вычислим $m(f)(\Delta)$. Если $m(f)(\Delta) > 0$, тогда, очевидно, Δ не содержит никакого решения уравнения (4). То же самое имеем и в случае, когда справедливо неравенство $M(f)(\Delta) < 0$. Учитывая эти факты введем следующее определение.

Определение 1. Отрезок $\Delta \subseteq D$ называется **возможным**, если выполнено условие

$$m(f)(\Delta) \leq 0 \ \text{ и } \ 0 \leq M(f)(\Delta).$$

Из этого определения и аксиом (1), (2) непосредственно вытекают следующие утверждения.

*1. Если $f(x) = 0$ и $x \in \Delta \subseteq D$, тогда Δ возможно.

*2. Если $f(x) \neq 0$, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что все $\Delta \ni x$ с $diam(\Delta) < \varepsilon$ не являются возможными.

Следовательно, в m-M исчислении имеется следующий алгоритм, в котором i, V_i – вспомогательные переменные, а K – число допустимых шагов алгоритма.

Алгоритм 1:

Шаг 1. Если D невозможно, переходим к Шагу 3. Иначе, положим $i = 1, V_i = D$ и переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Множество V_i разобьем на объединение некоторых отрезков $\Delta_1, ..., \Delta_k$. Пусть $fis(i)$ означает число всех возможных Δ_j. Если $fis(i) = 0$, переходим к Шагу 3. В противном случае, положим $i = i + 1$. Если $i = K$, переходим к Шагу 4, а иначе обозначим через V_i объединение всех возможных Δ_j и переходим к Шагу 2.

Шаг 3. Алгоритм останавливается с заключением: уравнение (4) не имеет ни одного решения.

Шаг 4. Полученные возможные Δ_j аппроксимативно определяют "возможные"решения уравнения (4) за число шагов K[1].

Основные характеристики этого алгоритма следующие:
Обозначим через S множество всех решений $x \in D$ уравнения (4). Тогда:
1^0. Для всякого $i = 1, 2, \ldots$ имеем $S \subseteq V_i$.
2^0. Если $a \notin S$ и $a \in D$, тогда на некотором шаге – для достаточно большого K – отрезок $\Delta_j \ni a$ станет невозможным.
3^0. Если K стремится к бесконечности, то имеем равенство

$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i. \tag{5}$$

Заметим, что похожие результаты и алгоритмы имеются для систем уравнений (см. [1, 2, Глава 2. System of equations, system of inequalities]).

Далее мы приведем некоторые примеры, в которых, грубо говоря, используется Алгоритм 1 (или очень похожий), и на каждом шаге каждый Δ_j разбивается пополам.

Пример 1. *Найти решения уравнения* $\sin x = 1/x$, *где* $x \in [1, 20]$.

Пусть $[a, b] \subseteq [1, 20]$ – произвольный отрезок. Тогда, используя (3), видим, что для функции $f(x) = \sin x - 1/x$ одна m-M пара определена следующим образом

$$m(f)[a, b] = a + \sin a - b - 1/a, \quad M(f)[a, b] = b + \sin b - a - 1/b.$$

Имеем следующие результаты:
$fis(i)$ - число всех возможных Δ_j на $i-$том шаге, где $i = 1, 2, ..., 25$ изменяется следующим образом

$$\begin{array}{lllll}
fis(1) = 1, & fis(2) = 2, & fis(3) = 4, & fis(4) = 8, & fis(5), \\
fis(6), & fis(7), & fis(8), & fis(9), & fis(10), \\
fis(11), & fis(12), & fis(13), & fis(14), & fis(15), \\
fis(16), & fis(17), & fis(18), & fis(19), & fis(20), \\
fis(21), & fis(22), & fis(23), & fis(24), & fis(25).
\end{array}$$

Как мы видим, с 5-го шага число $fis(i)$ равно около 16. Следовательно, на каждом шаге мы должны рассматривать не больше

[1]Конечно, таким образом полученные "возможные"решения только приближенно соответствуют некоторому действительному решению. В самом деле, с помощью данного алгоритма нельзя найти точные действительные решения.

чем 16·2 (то есть 32) подотрезков. На 25-ом шаге мы получим следующие результаты:

Данное уравнение имеет 7 решений, описываемых так:

$$\begin{array}{llll}
1.11415595 \le x_1 \le 1.11415821; & 2.77260345 \le x_2 \le 2.77260572; \\
6.4391157 \le x_3 \le 6.4391191; & 9.31724286 \le x_4 \le 9.31724399; \\
12.6455307 \le x_5 \le 12.6455341; & 15.6439972 \le x_6 \le 15.6439983; \\
18.9024819 \le x_7 \le 18.9024853. &
\end{array}$$

Пример 2. *Комплексное уравнение относительно* $z = x + iy$

$$z^8 + (A_7 + iB_7)\, z^7 + ... + (A_0 + iB_0) = 0, \qquad (*3)$$

где $A_7, B_7, ..., A_0, B_0$ *– данные действительные числа.*

Все решения находятся в области $[-r, r] \times [-r, r]$, где

$$r = 1 + \max_{0 \le i \le n-1} (|a_i|/|a_n|)\,.$$

Несколько уравнений вида (∗3) решено до 25 шага[2]. Число $fis(i)$ было около 15. Например, в случае

$$\begin{array}{ll}
A_7 = -0.628871968 & B_7 = -0.90620273 \\
A_6 = 0.655487601 & B_6 = 0.109498452 \\
A_5 = 0.794467662 & B_5 = 0.145832495 \\
A_4 = 0.677786328 & B_4 = 0.862459254 \\
A_3 = -0.623235982 & B_3 = 0.945879881 \\
A_2 = 0.552867495 & B_2 = -0.164039785 \\
A_1 = 0.658555102 & B_1 = 0.618662189 \\
A_0 = 0.934256145 & B_0 = 0.147878684
\end{array}$$

получены следующие решения $x_j + iy_j$ $(j = 1, ..., 8)$:

$$\begin{array}{ll}
-0.34072429 \le x_1 \le -0.34072414, & -0.79305351 \le y_1 \le -0.79305336; \\
-0.89744046 \le x_3 \le -0.89744031, & -0.30877218 \le y_2 \le -0.30877203; \\
0.38592756 \le x_3 \le 0.38592771, & -0.95440849 \le y_3 \le -0.95440819; \\
1.11732647 \le x_4 \le 1.11732662, & -0.46066165 \le y_4 \le -0.46066150; \\
-0.31065032 \le x_5 \le -0.31065017, & 0.52192032 \le y_5 \le 0.52192062; \\
-0.70770741 \le x_6 \le -0.70770711, & 0.78685761 \le y_6 \le 0.78685775; \\
0.64331293 \le x_7 \le 0.64331308, & 0.49212873 \le y_7 \le 0.49212888; \\
0.73882684 \le x_8 \le 0.73882699, & 1.62219122 \le y_8 \le 1.62219137.
\end{array}$$

Пример 3. *Комплексное уравнение относительно* z*:* $e^z = z$.

[2] m-M пара определена по формуле (1.21) из [1] (или [2]).

В области $[-20, 20] \times [-20, 20]$ это уравнение имеет 6 решений $x_j + iy_j$ $(j = 1, ..., 6)$:

$$\begin{array}{ll} 2.65319109 \le x_1 \le 2.65319228, & -13.94920826 \le y_1 \le -13.94920731; \\ 2.06227660 \le x_2 \le 2.06227899, & -7.58863215 \le y_2 \le -7.58863020; \\ 0.31813025 \le x_3 \le 0.31813264, & -1.33723736 \le y_3 \le -1.33723497; \end{array}$$

$$x_4 + iy_4 = x_3 - iy_3; \quad x_5 + iy_5 = x_2 - iy_2; \quad x_6 + iy_6 = x_1 - iy_1.$$

Вычисления проведены до 25-го шага. С 6-го шага $fis(i)$ было около 16.

Пример 4. *Рассмотрим систему уравнений относительно* $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{l} e^x + x + \sin y + \cos z = p \\ x^3 + e^{\sin y} - z - e^z = q \\ \sin(x - z) + (x + y)^5 - x - y - z = r \end{array}$$

(p, q, r – данные действительные числа).

Случай 1: $p = 2$, $q = 0$, $r = 0$, $D = [-1, 2] \times [-2, 1] \times [-3, 2]$. Существует ровно одно решение $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. С 6-ого шага число $fis(r)$ было между 40 и 50. На 24-ом шаге имеем следующий результат

$$\begin{array}{lcl} -0.0000152587891 & \le x \le & 0.0000247955322, \\ -0.0000247955322 & \le y \le & 0.0000324249268, \\ -0.00000762939453 & \le z \le & 0.0000114440918. \end{array}$$

Случай 2: $p = 2$, $q = 0$, $r = 0$, $D = [-5, 5] \times [1, 5]$. Шаг за шагом число $fis(r)$ равно 1, 8, 21, 32, 24, 0. Итак, мы заключаем, что система не имеет решений.

Отметим, что в части 4 главы 2 "System of equations, system of inequalities"в [1] обсуждается вопрос о числе $fis(i)$, то есть вопрос конвергенции.

В главе 3 "n-Dimensional integrals, infinite sums; their m-M pairs"в [1] рассматривается применение m-M исчисления для нахождения n-мерного интеграла и суммирования рядов.

Пример 5. *Найти* $\iint\limits_{Cond(x,y)} xy\,dxdy$, *где* $Cond(x, y)$:

$$0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, \quad 2 + e \cdot (x + y + 2) \ge e^{x+1} + e^{y+1}.$$

Решение. Пользуясь на каждом шаге разбиением на 4 (равных) подотрезка, получим следующие результаты:

Шаг 1: $0.0000000000000000 \le I \le 0.5625000000000000$,

Шаг 2: $0.0278320312500000 \leq I \leq 0.2424316406250000$,
Шаг 3: $0.0950307846069336 \leq I \leq 0.1581497192382812$,
Шаг 4: $0.1179245151579380 \leq I \leq 0.1341890022158623$,
Шаг 5: $0.1239582093403442 \leq I \leq 0.1281216432544170$,
Шаг 6: $0.1255188694198068 \leq I \leq 0.1265613023800256$,
Шаг 7: $0.1259090350460332 \leq I \leq 0.1261702301487544$,
Шаг 8: $0.1259090350460332 \leq I \leq 0.1259090350460332$,
Шаг 9: $0.1259090350460332 \leq I \leq 0.1259090350460332$.

В главе 3 в [1] также рассматриваются следующие задачи.

Пример 6. ([1, 2, Пример 3.2.]) Функция $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x+2^i}$.
Для уравнения $f(x) = c$, где $a \leq x \leq b$, a, b, c – некоторые константы, имеем следующие результаты.
1) Случай $c = 1.5, a = 0, b = 1$: На шаге 20 получим $0.54416 \leq x \leq 0.54417$. Числа $fis(r)$ $(r = 1, 2, ..., 20)$ такие:

$$1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3.$$

2) Случай $c = 1.5, a = 0.6, b = 1$:
Шаг 1: $fis(1) = 1$; Шаг 2: $fis(2) = 1$; Шаг 3: $fis(3) = 0$.
Заключение: $f(x) = c$ не имеет решений.

Пример 7. ([1, 2, Пример 3.3]) Функция $f(x) = \int\limits_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$.

Решено несколько примеров уравнений вида $f(x) = c$, где $a \leq x \leq b$ и a, b, c – константы.

До сих пор мы имели дело с понятием m-M пары только для функций. Но как быть в случае такой задачи:
Задача 2. *Найти $x \in D = [a, b]$, такое что*

$$(\forall y \in D)\ f(x) \leq f(y), \tag{6}$$

где f – данная m-M функция.

Иными словами, как найти точки x, в которых f достигает минимума. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subseteq D$ – произвольный отрезок. Основная идея рассуждения следующая: в каком случае в таком Δ не находится ни одного искомого значения x? Обозначим (6) через $\varphi(x)$. Это φ – не функция, а формула, условие. Поэтому мы будем определять понятие m-M пары $m(\varphi)$, $M(\varphi)$ так, чтобы импликация

$$M(\varphi)(\Delta) \Longrightarrow \varphi(x) \Longrightarrow m(\varphi)(\Delta) \qquad \text{для } x \in \Delta \tag{7}$$

была верна. Тогда, естественно, Δ будет возможным в случае, когда условие $m(\varphi)(\Delta)$ удовлетворено.

Пусть отрезок D разбит на некоторое объединение $\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_k$. Введем следующие обозначения.

$$\begin{array}{rcl} m(\varphi)(\Delta_i) & := & (\forall Y \in \{\Delta_1, ..., \Delta_k\}\; m(f)(\Delta_i) \leq M(f)(Y)), \\ M(\varphi)(\Delta_i) & := & (\forall Y \in \{\Delta_1, ..., \Delta_k\}\; M(f)(\Delta_i) \leq m(f)(Y), \end{array} \tag{8}$$

где $i = 1, ..., k$. Тогда не так сложно проверить, что условие (7) выполнено.

В связи с этим введем следующее определение.

Определение 2. *В случае задачи 2 отрезок $\Delta \subseteq D$ называется* **возможным**, *если выполнено условие*

$$m(\varphi)(\Delta). \tag{9}$$

Чтобы решить задачу 2 мы можем воспользоваться алгоритмом, подобным Алгоритму 1. Теперь $\Delta_1, ..., \Delta_k$ образуют разбиение множества V_i, и квантор $(\forall Y)$ относится к ним. Очень важно, что в этом случае также справедливо равенство вида (5).

Заметим, что в [1, 2] к задачам оптимизации (условной и безусловной) относятся Задача 5.1, Задача 5.2, Задача 5.3. Подчеркнем также, что в [2, Замечание 5.1] описана линейная процедура, с помощью которой можно найти точку локального минимума или седла в случае задачи безусловной оптимизации.

Пусть теперь *выраж*$_1$, *выраж*$_2$ обозначают некоторые выражения, построенные из символов действительных чисел, переменных и символов некоторых m-M функций. Далее, обозначим через

$$For(<, \leq, \vee, \wedge, \neg, \forall, \exists) \tag{10}$$

множество всех формул φ, построенных из формул вида

$$\text{выраж}_1 < \text{выраж}_2, \quad \text{выраж}_1 \leq \text{выраж}_2,$$

логических связок $\vee$, $\wedge$, $\neg$ и логических кванторов $\forall$, $\exists$, присутствующих в виде $(\forall x \in [a, b])$, $(\exists x \in [c, d])$. Формула

$$(\forall x \in [0, 4])(\exists y \in [3, 5])\; y^2 - x^2 = z$$

– один из примеров таких формул. Если формула φ вида (10) не содержит символов $<$, $\neg$, тогда будем говорить, что это *позитивная $\leq$ - формула.*

В главе 4 в [1] "m-M pairs of the first order formulas; set-theoretical interpretation"для формулы φ из множества (10) определены $m(\varphi)$ и $M(\varphi)$ (см. Определение 4.1), дано общее определение возможных n-мерных промежутков (Определение 4.2), доказана двойная импликация вида (7)

([1, 2, 4.4]). Далее, в случае позитивных формул доказано равенство вида (5) (см. [1, 2, Теорема 4.3]). Это самая главная теорема m-M исчисления. В [2, 7. Приложение] дано очень простое доказательство этой теоремы.

Грубо говоря, благодаря этой теореме, с помощью алгоритма, похожего на Алгоритм 1 (см. [1, 2, 5.1, 5.2]), можно решить всякую математическую задачу, выраженную некоторой позитивной формулой φ. Подчеркнем, что с одной стороны к таким задачам принадлежат большинство задач вычислительной математики, интервальной математики, и т.д., а с другой стороны m-M исчисление дает возможность решить многие новые, до сих пор нерешенные задачи.

Теперь, для иллюстрации, приведем некоторые примеры из [1] и [2].

Пример 8. (это Пример 5.3) *Найти* $x \in [1,2]$ *такое, что справедливо равенство* $x^2 = c$*, где* c *– константа, про которую известно только, что* $c \in [1.69,\ 1.96]$.

Основная идея решения. Эта задача логически эквивалентна следующей.

Найти $x \in [1,2]$ такое, что выполняется следующая формула $(\exists c \in [1.69, 1.96]\ x^2 = c$

Замечание 1. Эта задача относится к интервальной математике (см. [1, 2, Задача 5.5]). Но она также дает идею, с помощью которой в главе 6 "Finding functions as solutions of a given m-M condition"между прочим, описан метод для нахождения решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 9. (это [1, 2, Пример 5.1]) *Найти*

$$\min_{x_1 \in [a_1,b_1]} \max_{x_2 \in [a_2,b_2]} f(x_1, x_2),$$

где $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *– данная m-M функция.*

Пример 10. *Найти* $z \in [-7, 25]$ *такое, что выполняется условие*

$$(\forall x \in [0,4])(\exists y \in [3,5])\ y^2 - x^2 = z.$$

Список литературы

[1] Prešić S.B. *m-M Calculus.* Matematiqki Institut. Beograd. 1996.

[2] Prešić S.B. *m-M Calculus. Second revised edition.* Matematiqki Institut. Beograd. 1997.