О распознавании аффинно разных дискретных изображений

В.Н. Козлов

Введение

Под изображением в этой работе понимается конечное множество точек на плоскости. Такое представление может показаться достаточно абстрактным, отвлеченным от того, что на практике понимается под изображением. К нему, однако, приводит рассмотрение широкого класса реальных изображений: газетных фотографий, картинок на экране телевизора и т.п. - все это изображения, составленные из точек, то есть представляющие собой совокупности точек на плоскости. Проецируемое на сетчатку глаза изображение порождает конфигурацию рецепторов, находящихся в возбужденном состоянии, то есть, в конечном счете, тоже точечное изображение.

Применительно к изображениям говорят о зрительных образах. Определения образа нет, и конкретный образ задается, как правило, перечислением примеров изображений, в него входящих. Если исходить из этого, то образ - это совокупность изображений, объединяемых в одну группу, причем по трудноформализуемым критериям. В словесном выражении эти критерии чаще всего звучат так: изображения группы "похожи они "одной формы "одного типа "одинаково устроены"и т.п.

Наиболее наглядный и вследствие этого часто рассматриваемый случай - образы букв и цифр, поэтому будем вести рассуждения на их примере. Возьмем, для конкретности, образ цифры два. Во множество изображений, объединяемых под общим названием "двойка входят очень разные изображения. Это может быть и кривая линия на листе бумаги, и гигантская фигура на рекламном щите, и значок из стандартного шрифта на экране компьютера, и пр. Вопрос в том, как конкретизировать, на чем основывается интуитивно очевидное сходство в форме этих изображений? Можно положить, в качестве первого шага, что нагляднее и очевиднее всего "одинаковость формы"для двух изображений имеет место, если их можно просто наложить друг на друга, и они при этом в точности совпадут. Наложить, очевидно, движениями, то есть, в этом случае, параллельными переносами, поворотами и, может быть, преобразованиями симметрии. Таким образом, если взять пример на рис. 1, то в одну группу с ним попадут все изображения, которые можно получить из этого рисунка переносами и поворотами.

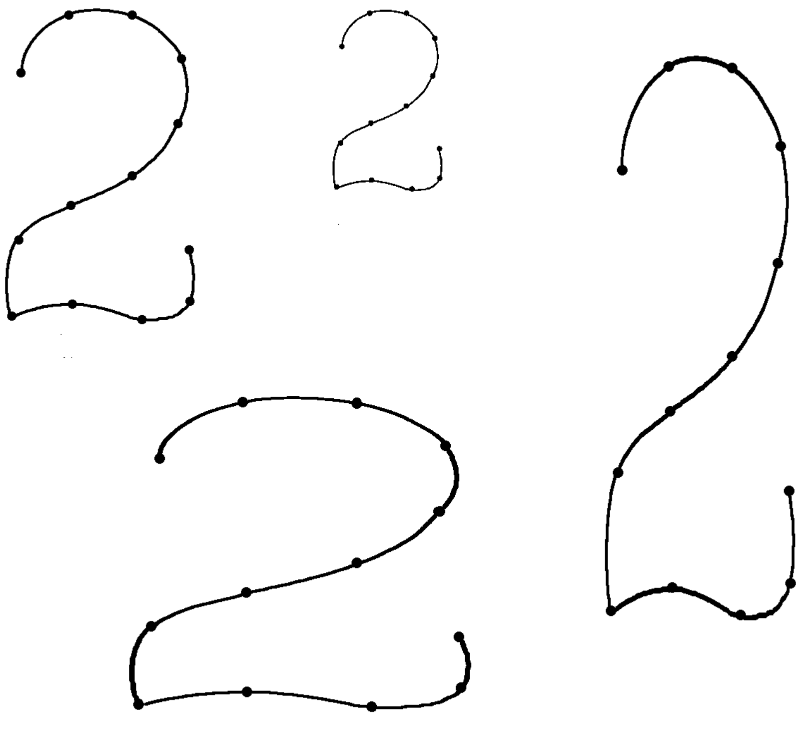

Рис. 1-4.

Конечно, такое определение будет недостаточным хотя бы потому, что в эту группу не попадут изображения, отличающиеся от двойки на рис. 1 размерами. Поэтому на следующем шаге добавим изменение масштаба, и, тем самым, будем рассматривать преобразования подобия (рис. 2). Наконец, добавление возможности растягивать и сжимать изображение (рисунки 3 и 4) по любому направлению приводит к аффинным преобразованиям в целом. Этими преобразованиями из рисунка 1 порождается уже довольно широкий класс изображений, они, очевидно, отличаются друг от друга довольно значительно. Ранее [1, 2, 3] для описания класса изображений, переводимых друг в друга в точности аффинными преобразованиями, был предложен код и описаны некоторые его свойства.

Разумеется, класс изображений, отличающихся друг от друга произвольными аффинными преобразованиями - еще далеко не то, что содержательно понимается под образом. Достаточно обратить внимание на то, что если на рис. 1 какую-либо из точек несколько сдвинуть, оставляя остальные точки неподвижными, то такую фигуру уже никакими аффинными преобразованиями не сделать совпадающей с исходной. А ведь именно своеобразная "инвариантность"по отношению к локальным изменениям формы должна иметь место, если ориентироваться на интуитивные, содержательные представления о том, что есть образ.

В этой работе делается попытка сделать очередной шаг в приближении к понятию зрительного образа на основе следующих соображений. Пусть дано изображение цифры два. Обозначим его через A. Положим, что каждая из точек изображения A - центр круга радиуса r (рис. 5). Отметим в каждом круге по точке (кружочки на рис. 5). В совокупности они тоже составляют точечное изображение (центр кружочка - точка), обозначим его через B. Изображение B смещениями и поворотами можно вынести за пределы изображения A и рассматривать отдельно (рис. 6). Ясно, что в общем случае оно отлично от изображения A в том смысле, что никакими переносами и поворотами нельзя совместить все точки рисунка 6 с точками рисунка 5. Вместе с тем из "происхождения"рисунка 6 следует, что параллельными переносами и поворотами можно его так расположить на рисунке 5, что каждая точка изображения B будет отстоять от соответствующей точки изображения A на расстояние, не большее r. Назовем такое взаиморасположение для A и B искомым. Тогда именно это обстоятельство - возможность искомым образом расположить изображения A и B - и может служить проявлением критерия "одинаковости формы который мы здесь и рассматриваем.

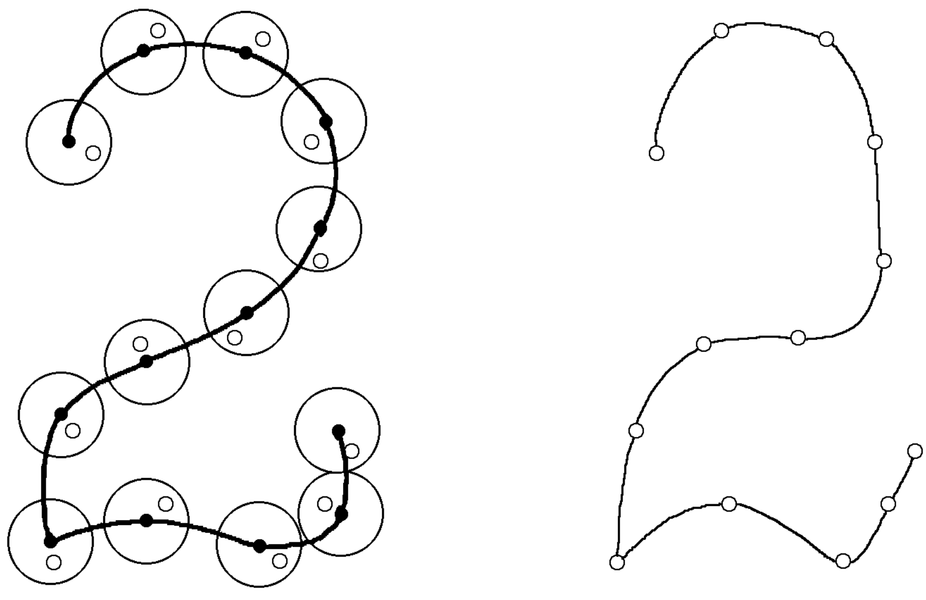

Рис. 5-6.

Если рисунок 6 дан "сам по себе без указания на его "происхождение то априори неизвестно, можно ли A и B расположить искомым образом. Поскольку множество возможных взаиморасположений рисунков 5 и 6, очевидно, континуально по мощности, то эту задачу нельзя решить перебором. Поэтому в первую очередь нужно ответить на вопрос о том, можно ли и как решить эту задачу конечными средствами, то есть использованием некоторой конечной процедуры. Под конечной процедурой понимается здесь решение задачи геометрическим построением или сведением к решению некоторой системы уравнений.

Вопрос, связанный с определением искомого положения, можно усилить: каков минимальный возможный радиус r, при котором еще можно так расположить изображения A и B, что их соответствующие точки взаимоудалены на расстояние, не большее r, и какими средствами (конечными) осуществить такое их расположение? Именно этот вопрос и то, что с ним связано, рассматриваются в этой работе.

Ясно, что решение этой задачи может быть положено в основу процедур распознавания изображений. Двойку на рис. 6 расположить на изображении другой цифры так, чтобы соответствующие точки находились на расстоянии, не большем того же r, очевидно, уже не удастся, и на этом можно основывать их различение.

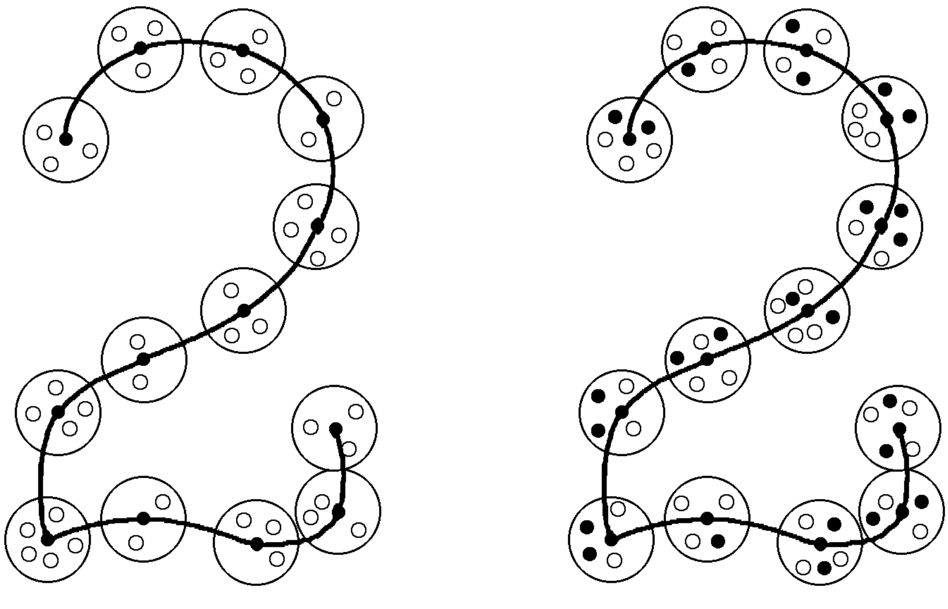

Рис. 7-8.

Везде выше соответствие между точками изображений A и B предполагалось взаимнооднозначным, то есть изображения A и B предполагались состоящими из одинакового числа точек. Это действительно основной, базовый случай, и именно он рассматривается далее. Однако, нетрудно видеть, что решение для этого случая позволит сделать потом естественные его расширения: когда группа точек изображения B сопоставляется одной точке изображения A (рис. 7), и когда сопоставляются друг другу группы точек изображений A и B (рис. 8).

Выше в качестве основного иллюстрирующего примера были выбраны изображения цифр. Однако возможности расширения, представленные рисунками 7 и 8, видны на них недостаточно отчетливо. Суть в том, что количество точек в кругах (оно может быть разным и для изображения A, и для изображения B) есть как бы плотность "краски плотность изображения в этом месте. Это открывает дорогу к рассмотрению полутоновых изображений, а это, в свою очередь, важно при распознавании, например, фотографий.

Наконец, рассмотрение трех полутоновых монохроматических (в основных цветах) изображений эквивалентно рассмотрению цветного изображения. Это, в перспективе, дает возможность выхода в рамках такого подхода и на распознавание цветных изображений.

1 Преобразования параллельного переноса и симметрии изображений

Содержательно задачу этого параграфа можно описать следующим образом. Пусть даны два изображения A и B, и каким-либо образом точки из A и B взаимнооднозначно сопоставлены друг другу. Этим определена взаимоудаленность для каждой пары соответствующих друг другу точек из A и B - она есть длина отрезка, концами которого являются эти точки. Можно считать характеристикой данного взаиморасположения изображений A и B величину наибольшего из этих отрезков и называть ее взаимоудаленностью точек в A и B. Будем теперь двигать A и B (параллельными переносами) всеми возможными способами. Можно ли этим так расположить изображения относительно друг друга, чтобы взаимоудаленность точек в A и B была бы наименьшей? Ясно, что это нельзя сделать простым перебором, поскольку разных положений для A и B при параллельных переносах бесконечное множество. Можно ли найти нужное взаиморасположение конечной процедурой?

Итак, изображением называем конечное (непустое) множество точек на плоскости. Пусть изображение A состоит из n ($n \geq 1$) точек. Перенумеруем некоторым образом точки из A, точку с номером i будем обозначать через a_i ($i = 1, \ldots, n$). Через $\bar{A}$ обозначим множество всех изображений, которые получаются из A параллельными переносами. При этом если $A' \in \bar{A}$, то полагаем, что на нем сохраняется нумерация точек, порожденная A, то есть через a'_i на A' обозначена точка, в которую при соответствующем параллельном переносе переходит точка a_i из A. Изображения A' и A'' из $\bar{A}$ называем эквивалентными.

Любая часть точек $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ $(k \leq n)$ из A может также рассматриваться как изображение. Его называем частью изображения A.

Пусть изображения A и B состоят из точек $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Будем рассматривать все возможные биекции на множествах точек изображений A и B. Зафиксируем какую-либо из них и обозначим ее через ψ. Без ограничения общности можем полагать, что ею точке a_i ставится в соответствие точка b_i $(i = 1, \ldots, n)$. Точки a_i и b_i называем соответствующими, отрезки $(a_i a_j)$ и $(b_i b_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ тоже называем соответствующими.

Введем в рассмотрение изображение C, которое будем называть характеристическим, и которое получается следующим образом. Фиксируем произвольную точку O на плоскости. Параллельным переносом отрезка $(a_i b_i)$ совмещаем точку a_i с точкой O. Точку, в которую переходит при этом b_i, обозначаем через c_i. Точку c_i называем порожденной точками a_i и b_i, а точки a_i и b_i - соответствующими точке c_i. Изображение C, полагаем, состоит из точки O и точек c_i $(i = 1, \ldots, n)$. Точку O называем центром изображения C, а часть, составленную из точек $c_1, \ldots, c_n$ - его ядром.

При таком определении несколько точек $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$ могут при параллельном переносе перейти в одну. Такую точку называем кратной и сохраняем приписанные ей номера, то есть обозначаем ее через $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$. Изображение с кратными точками называем особым. Тем самым, следовательно, C может быть особым изображением.

Взяв вместо центра O иную точку O' на плоскости, описанной процедурой получим характеристическое изображение C' из точки O' и точек c'_i $(i = 1, \ldots, n)$. Очевидно, что C' и C эквивалентны. Точки c_i из C и c'_i из C', порожденные одной и той же парой точек a_i и b_i, называем соответствующими. Класс изображений, получаемых таким образом при всех возможных центрах на плоскости, обозначим через $(B - A)$. Все изображения из $(B-A)$ переводимы друг в друга параллельными переносами.

Поменяв ролями A и B, можно определить $(A - B)$. Изображения из $(B - A)$ и $(A - B)$ переводимы друг в друга параллельными переносами и преобразованиями симметрии.

По A и любому $C \in (B-A)$ построим изображение, которое обозначим через $A+(B-A)$. Берем отрезок (Oc_i) из изображения C и параллельным переносом совмещаем точку O с точкой a_i. Точка, в которую при этом переходит c_i, обозначаем через b_i. Нетрудно видеть, что изображение из точек b_i $(i = 1, \ldots, n)$, возникающее таким образом, есть изображение B.

Пусть $r_\psi(A, B)$ - длина наибольшего из отрезков Oc_i $(i = 1, \ldots, n)$ в изображении C, то есть то, что выше было названо взаимоудаленностью точек в A и B. Очевидно, что эта величина не зависит от конкретного $C \in (B - A)$. Ясно, что и $r_\psi(A, B) = r_\psi(B, A)$, где $r_\psi(B, A)$ определяется по произвольному $C' \in (A - B)$. Отметим, что если на C рассматривать круг с центром в точке O и радиуса $r_\psi(A, B)$, то все точки изображения C будут находиться внутри круга или на окружности.

Рассмотрим бинарное отношение P на декартовом произведении $\bar{A} \times \bar{B}$: полагаем, что пары (A_1, B_1) и (A_2, B_2) из $\bar{A} \times \bar{B}$ находятся в отношении P, если (A_1, B_1) как целое переводится параллельным переносом в пару (A_2, B_2). По отношению P множество $\bar{A} \times \bar{B}$ разбивается на множество P^* классов эквивалентности, и, очевидно, P^* имеет мощность континуума.

Содержательно каждый класс P' из P^* задает один вариант взаиморасположения изображений A и B с точностью до параллельных переносов пары (A, B) как целого на плоскости. Из этого следует, что всеми парами (A, B) из P' задается одно и то же, с точностью до параллельных переносов, характеристическое изображение, то есть класс попарно эквивалентных изображений. Этот класс обозначим через $\bar{C}'$. Очевидно, что $\bar{C}'$ совпадает с классом $(B - A)$, порожденным любой парой (A, B) из P'.

Разным классам P_1 и P_2 из P^* соответствуют разные классы $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ характеристических изображений. Действительно, рассмотрим такие две пары изображений из P_1 и P_2 соответственно, у которых первые элементы совпадают, то есть (A, B') и (A, B''). Это интерпретируется как фиксированное изображение A и сдвинутые по отношению друг к другу параллельным переносом изображения B' и B''. Последнее означает, что все отрезки (a_i, b_i') разнятся с отрезками (a_i, b_i'') $(i = 1, \ldots, n)$ по длине или углу наклона, и, следовательно, параллельными переносами не совмещаются. Но тогда, соответственно, и $\bar{C}_1$ с $\bar{C}_2$ не совпадают.

Множество классов характеристических изображений обозначим через C^*. Каждому классу из P^* соответствует, как показано, один и только один класс из C^*. Все изображения из одного класса C' характеристических изображений имеют одну и ту же величину $r_\psi(A, B)$, которая, тем самым, есть и характеристика соответствующего класса P' из P^*. Пусть на классе P_0 из P^* достигается минимум величины $r_\psi(A, B)$. Если такой класс P_0 существует, то назовем его главным.

Итак, изображения внутри каждого класса в C^* попарно эквивалентны, изображения из разных классов - не эквивалентны. Каждое такое изображение состоит из центра O и точек $c_i, \ldots, c_n$ ядра.

Лемма 1 *Ядра всех характеристических изображений из всех классов* *в C^* эквивалентны.*

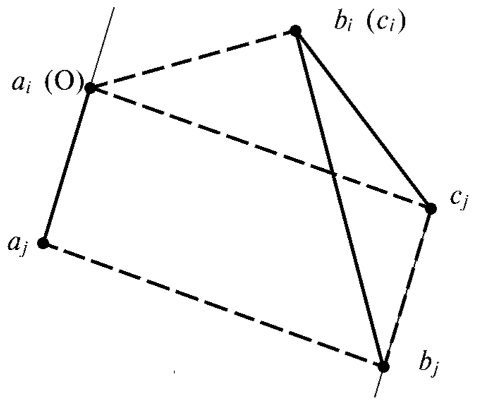

Рис. 9.

Доказательство. Рассмотрим какую-либо пару (A, B) из какого-либо класса в P^*. Зафиксируем некоторую точку изображения A, пусть это будет точка a_i (рис. 9). Рассмотрим характеристическое изображение C пары (A, B). Без ограничения общности можем полагать, что центр O характеристического изображения совпадает с точкой a_i. Тогда точка c_i ядра совпадает с точкой b_i. Определяем остальные точки c_j ($j = 1, \dots, n,\ j \neq i$) ядра. Отрезок (Oc_i) получается параллельным переносом отрезка (a_j, b_j) с совмещением точки a_j с точкой O, то есть с точкой a_i. В параллелограмме $a_i a_j b_j c_j$ сторона $(c_j b_j)$ может рассматриваться как полученная параллельным переносом отрезка $(a_i a_j)$. Рассмотрим треугольник $c_i c_j b_j$. Он определен однозначно: сторона $(c_i b_j)$ есть отрезок $(b_i b_j)$ из изображения B, сторона $(c_j b_j)$ получается параллельным переносом отрезка $(a_i a_j)$ из изображения A с совмещением точки a_j с точкой b_j. Тем самым отрезок $(c_j b_j)$ ($j = 1, \dots, n,\ j \neq i$) определен однозначно, а значит определены и все точки ядра. Нетрудно видеть, что в построении треугольника $c_i c_j b_j$ никак не сказывается конкретное взаиморасположение изображений A и B, что и доказывает лемму.

Замечание. В треугольнике $c_i c_j b_j$ угол, противолежащий стороне $(c_i c_j)$, обозначим через α_{ij} и будем называть углом между соответствующими отрезками $(a_i a_j)$ и $(b_i b_j)$. Угол этот будем считать положительным, если для совмещения со стороной $(c_j b_j)$ сторону $(c_i b_j)$ нужно повернуть на α_{ij} по часовой стрелке, и отрицательным в противном случае. Длина отрезка $(c_i c_j)$ может быть вычислена, поскольку соответствующие отрезки и угол между ними при заданных A и B известны. Тем самым все попарные расстояния между точками ядра можно считать известными.

Поскольку характеристические изображения из разных классов в C^* не эквивалентны, то, следовательно, при совмещении параллельными переносами точек их ядер у них не совпадут именно центры. Таким образом, содержательно различие между не эквивалентными характеристическими изображениями состоит в различии положения центра относительно точек ядра.

Можно ли утверждать, что и произвольно взятая в качестве центра точка вместе с точками ядра есть в совокупности некоторое характеристическое изображение?

Пусть характеристическое изображение C состоит из центра O и точек $c_1, \ldots, c_n$ ядра. Изображение из точек $c_1, \ldots, c_n$ и произвольной точки O_x обозначим через C_x.

Лемма 2 *Изображение C_x является характеристическим.*

Доказательство. Достаточно показать, что существует такая пара из $A \times B$, для которой изображение C_x является характеристическим.

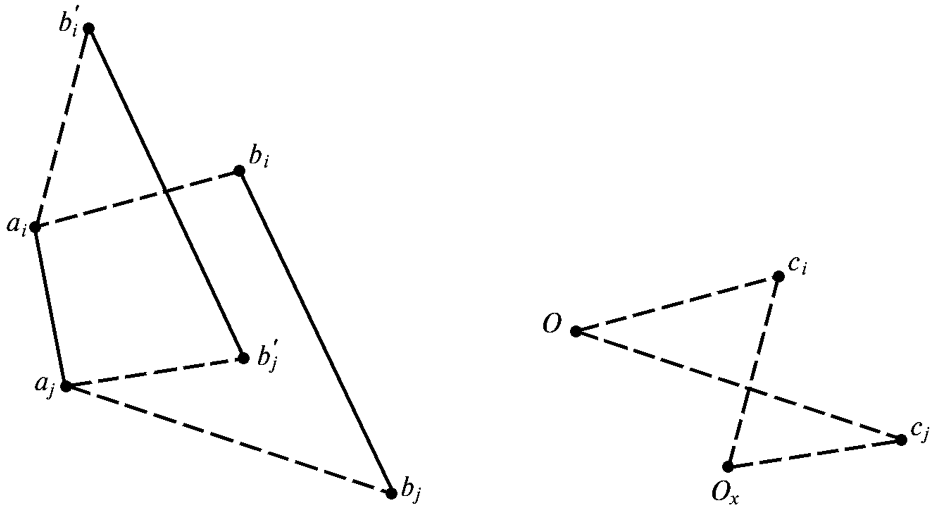

Рис. 10.

На рис. 10 точки a_i и a_j принадлежат изображению A, точки b_i и b_j - изображению B. Строим точки b_i' и b_j', принадлежащие изображению $(A + C_x)$: точку b_i' получаем параллельным переносом отрезка $(O_x c_i)$ с совмещением точки O_x с точкой a_i, и точку b_j' - параллельным переносом отрезка $(O_x c_j)$ с совмещением точки O_x с точкой a_j. Рассмотрим треугольники $b_i' a_i b_i$ и $O c_i O_x$. Стороны $(a_i b_i)$ и $(c_i O)$, $(a_i b_i')$ и $(c_i O_x)$ у них равны и параллельны, углы $b_i' a_i b_i$ и $O a_i O_x$ равны. Отсюда сторона $(b_i' b_i)$ равна и параллельна стороне $(O O_x)$. Из аналогичного рассмотрения для треугольников $b_j' a_j b_j$ и $O c_j O_x$ получаем, что и $(b_j' b_j)$ равна и параллельна $(O O_x)$. Таким образом, $(b_i' b_i)$ равна и параллельна $(b_j' b_j)$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$, и, следовательно, изображение из точек b'_i $(i = 1, \dots, n)$ может быть получено параллельным переносом изображения B. Лемма доказана.

Теорема 1 *В P^* существует и единственен главный класс.*

Доказательство. Произвольная точка O_x вместе с точками ядра дает характеристическое изображение C_x, которое принадлежит ровно одному классу в C^*. Поскольку классам в C^* взаимнооднозначно соответствуют классы в P^*, то, тем самым, содержательно C_x определяет ровно один вариант взаиморасположения изображений A и B. Взаимоудаленность точек изображений A и B определяется длиной наибольшего из отрезков $(O_x c_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, то есть радиусом окружности с центром в O_x, вмещающей в себя все точки ядра. Ясно, что существует единственная наименьшая по радиусу такая окружность, ее центр и радиус определяются однозначно. Назовем эту окружность ключевой, соответствующий класс из P^* есть, очевидно, то, что выше было названо главным классом. Теорема доказана.

Содержательно теорема 1 означает, что существует единственный вариант взаиморасположения изображений A и B (назовем его тоже главным), при котором взаимоудаленность их точек минимальна.

При заданных изображениях A и B главное их взаиморасположение геометрически строится следующим образом. Выбираем произвольную точку O на плоскости в качестве центра, и параллельными переносами отрезков $a_i b_i$ $(i = 1, \dots, n)$, с совмещением точки a_i с точкой O, строим характеристическое изображение. Этим определяется совокупность точек c_i $(i = 1, \dots, n)$ ядра. Строим ключевую окружность, ее центр O_x вместе с ядром образуют характеристическое изображение C_x. Далее строим $A + C_x$, что дает изображение B', эквивалентное B. Взаиморасположение A и B' - главное.

Рассмотрим в качестве иллюстрации примеры, в которых изображение A состоит из точек a_1, a_2, a_3, изображение B - из точек b_1, b_2, b_3, треугольники $a_1 a_2 a_3$ и $b_1 b_2 b_3$ подобны и стороны их параллельны.

Пример 1. Этот случай можно назвать вырожденным, треугольники $a_1 a_2 a_3$ и $b_1 b_2 b_3$ в нем равны (рис. 11), точки ядра c_1, c_2, c_3 слиты в одну.

Пример 2. В этом примере треугольник $c_1 c_2 c_3$ тупоугольный (рис. 12), поэтому центр O_x располагается на середине наибольшей стороны треугольника. На ключевой окружности находятся две точки ядра, одна точка ядра - внутри круга.

Пример 3. В этом случае треугольник $c_1 c_2 c_3$ остроугольный (рис. 13(а)), центр O_x ключевой окружности - центр описанной окружности треугольника $c_1 c_2 c_3$. На ключевой окружности - три точки ядра. На рис. 13(б) построено главное взаиморасположение изображений A и B.

Радиус ключевой окружности может быть определен не только геометрическим построением, но и вычислением. В соответствии с замечанием к лемме 1 все попарные расстояния между точками ядра можно считать известными. Далее вычисления разбиваются на два случая, иллюстрируемых примерами 2 и 3 выше.

Первый случай. На ключевой окружности находятся две точки, c_{i_1} и c_{i_2}, причем отрезок $(c_{i_1}c_{i_2})$ - диаметр окружности, а все остальные точки ядра находятся внутри круга. Необходимым и достаточным условием этого является то, что отрезок $(c_{i_1}c_{i_2})$ - наибольший по длине, и треугольники $c_{i_1}c_{i_2}c_i$ $(i = 1, \ldots, n, \ i \neq i_1, i_2)$ - тупоугольные (включая случай, когда c_i лежит на отрезке $(c_{i_1}c_{i_2})$). При известных попарных расстояниях между точками ядра это условие проверяется несложно.

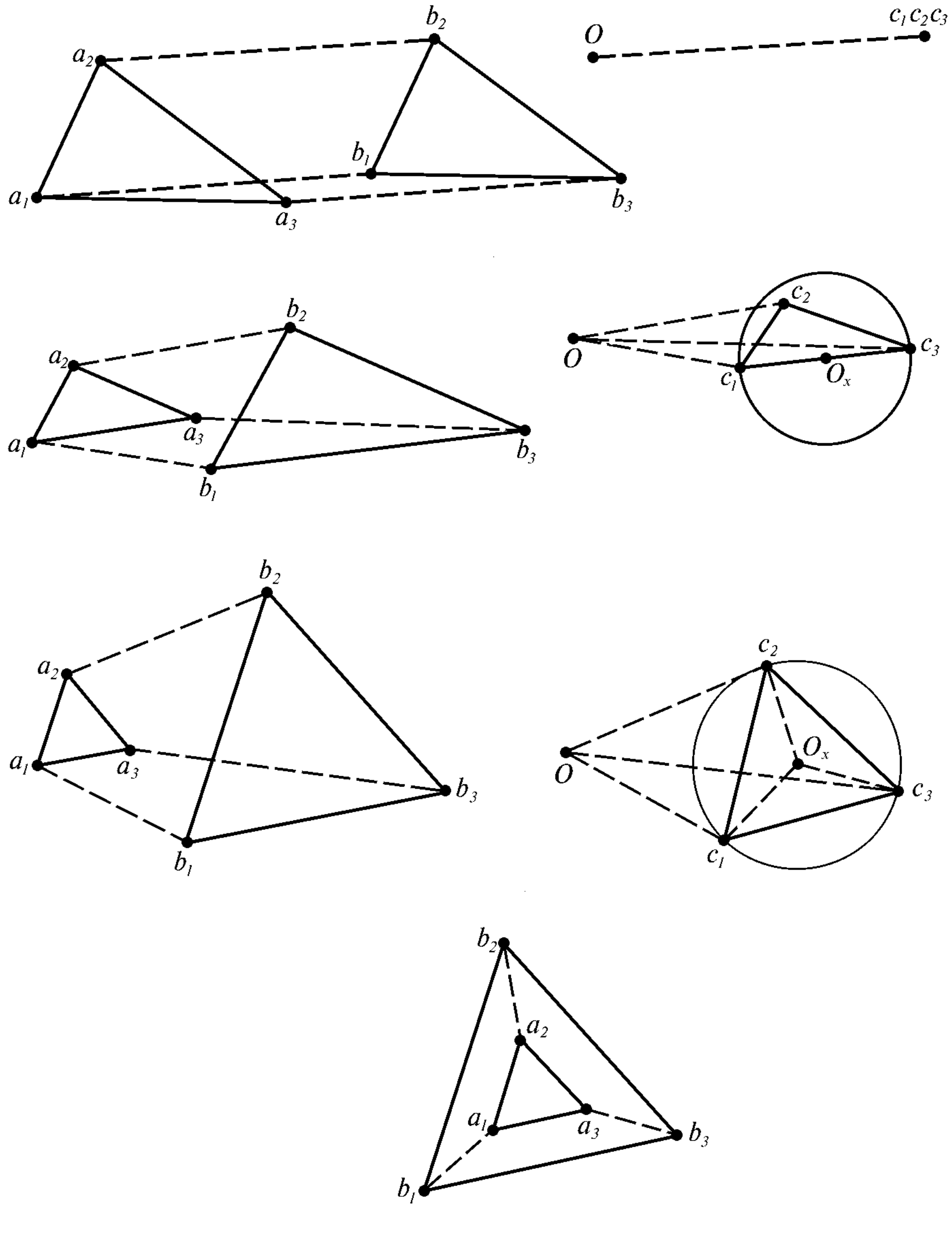

Рис. 11,12,13(а),13(б).

Сюда же отнесем и в некотором смысле пограничный случай, когда на ключевой окружности, помимо точек c_{i_1} и c_{i_2}, есть еще и другие точки ядра. В этом случае они должны с точками c_{i_1} и c_{i_2} образовывать прямоугольный треугольник.

Второй случай. Положим, что первый случай уже исключен. Это значит что на ключевой окружности лежат три и больше точек, причем никакая пара из них не образует диаметр окружности. В этом случае ключевая окружность является описанной окружностью треугольника из точек, лежащих на окружности, и этот треугольник - остроугольный. Для нахождения радиуса ключевой окружности надо перебрать все остроугольные треугольники с вершинами в точках ядра и определить треугольник с наибольшей по радиусу описанной окружностью. Она и будет ключевой, все остальные точки ядра будут содержаться внутри круга (или, в крайнем случае, на самой окружности, когда остроугольных треугольников с наибольшим радиусом описанной окружности несколько).

Предшествующее описание относилось к случаю, когда биекцией ψ точки $a_1, \ldots, a_n$ изображения A сопоставлялись точкам $b_1, \ldots, b_n$ изображения B. Обозначим через $r'(A, B) = \min\limits_{\psi}\{r_\psi(A, B)\}$, где минимум берется на множестве всех величин $r_\psi(A, B)$, полученных при всех возможных биекциях на множествах точек изображений A и B.

Обозначим через $\hat{B}$ изображение, полученное из B преобразованием симметрии, и через $r''(A, B)$ - величину, определяемую как $r''(A, B) = r'(A, \hat{B})$.

Наконец, через $r(A, B)$ обозначим $r(A, B) = \min(r'(A, B), r''(A, B))$. Содержательно $r(A, B)$ определяет наименьшую взаимоудаленность точек изображений A и B при всех возможных параллельных переносах и преобразованиях симметрии изображений и при всех возможных вариантах сопоставлений их точек друг другу.

2 Изометрические преобразования изображений

Содержательно задача для этого параграфа повторяет задачу для параграфа предшествующего, но с добавлением возможности поворачивать изображения относительно друг друга. Таким образом, для двух изображений нужно параллельными переносами, преобразованиями симметрии и поворотами, то есть изометрическими преобразованиями, так расположить их, чтобы взаимоудаленность их точек была бы наименьшей.

Через $\tilde{A}$ обозначим множество всех изображений, получаемых из изображения A параллельными переносами и поворотами. Углы поворота считаем положительными при вращении против часовой стрелки, и отрицательными - в противном случае. При этом для $A' \in \tilde{A}$ полагаем, что сохраняется нумерация точек, порожденная изображением A, то есть через a'_i обозначена та точка на A', в которую переходит точка a_i $(i = 1, \ldots, n)$ при соответствующем вращении и переносе изображения A. Изображения A' и A'' из $\tilde{A}$ называем эквивалентными по переносу и повороту (далее, для краткости, просто эквивалентными), точки a'_i и a''_i $(i = 1, \ldots, n)$ - тоже эквивалентными. Части изображений A' и A'', состоящие из эквивалентных точек, называем эквивалентными.

Рассматриваем биекцию ψ, которая точкам $a_1, \ldots, a_n$ изображения A ставит в соответствие точки $b_1, \ldots, b_n$ изображения B. Для изображений $A' \in \tilde{A}$ и $B' \in \tilde{B}$ точки a'_i и b'_i $(i = 1, \ldots, n)$ называем соответствующими. Части изображений A' и B', состоящие из соответствующих точек, называем соответствующими. Угол между соответствующими отрезками $(a_i a_j)$ из A и $(b_i b_j)$ из B обозначаем через α^0_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$.

Рассматриваем декартово произведение $\tilde{A} \times \tilde{B}$. Без ограничения общности можно полагать, что среди углов α^0_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$ есть угол α^0_{uv}, равный нулю. Далее через φ будем обозначать угол α_{uv}, если $\alpha_{uv} \geq 0$, и угол $(2\pi + \alpha_{uv})$, если $\alpha_{uv} < 0$. Отсюда $0 \leq \varphi < 2\pi$. Угол φ будем называть углом между изображениями A и B.

На множестве $\tilde{A} \times \tilde{B}$ рассматриваем бинарное отношение P: пары $(A_1 B_1)$ и $(A_2 B_2)$ находятся в отношении P, если углы между соответствующими отрезками у них одинаковы, то есть $\alpha^1_{ij} = \alpha^2_{ij}$ при всех $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$. Это отношение порождает разбиение множества $\tilde{A} \times \tilde{B}$ на классы эквивалентности. Каждому классу соответствует свое значение угла φ между изображениями A и B, поэтому класс обозначим через P'_φ, множество классов - через $\{P'_\varphi\}_{0 \leq \varphi < 2\pi}$.

Пусть Q' и Q'' - ядра характеристических изображений произвольных пар (A', B') и (A'', B'') из P'_φ, c'_i и c'_j - точки из Q', c''_i и c''_j - соответствующие точки из Q'' $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$. Длины отрезков $(c'_i c'_j)$ и $(c''_i c''_j)$

определяются только длинами соответствующих отрезков $(a_i'a_j')$, $(b_i'b_j')$ и $(a_i''a_j'')$, $(b_i''b_j'')$ и углом между ними, и потому одинаковы. Множество ядер всех характеристических изображений всех пар (A, B) из P_φ' обозначим через Q_φ. Из сказанного следует, что все изображения из Q_φ переводятся друг в друга преобразованиями параллельного переноса и поворота. Поэтому можно говорить об общей для всех ядер из Q_φ величине радиуса ключевой окружности, обозначим ее через R_φ. Через P_φ обозначим подкласс класса P_φ', состоящий из всех таких пар, у которых центр характеристического изображения совпадает с центром ключевой окружности.

Величина R_φ есть функция от φ. Минимальное значение R_φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ обозначим через $R_\psi^{\min}$. Угол φ_0 такой, что $R_{\varphi_0} = R_\psi^{\min}$ назовем искомым. Взаиморасположение A и B в парах (A, B) из P_{φ_0} тоже назовем искомым. Содержательно искомое взаиморасположение A и B означает, что их точки взаимоудалены на минимальное расстояние, какого можно добиться параллельными переносами и поворотами изображений A и B.

Мы используем далее эквивалентное прежнему, но более наглядное и удобное представление о множестве классов $\{P_\varphi\}_{0\leq\varphi<2\pi}$ и об искомом взаиморасположении. Зафиксируем какое-либо изображение из $\tilde{A}$, пусть, для определенности, это будет исходное изображение A. Из каждого класса P_φ возьмем ту пару (A, B_φ), у которой первый элемент совпадает с A. Если проделывать это последовательно для всех φ от 0 до 2π, то наглядно это можно представить как неподвижное изображение A и последовательно поворачивающееся относительно A изображение B, причем в каждый момент взаиморасположение A и B - главное.

Точки, из которых состоит B_φ, обозначим через $b_1^\varphi, \ldots, b_n^\varphi$. Для пары (A, B_φ) строится характеристическое изображение, состоящее из точек $c_1^\varphi, \ldots, c_n^\varphi$ ядра и центра O, совпадающего с центром ключевой окружности. Точка O фиксирована и центры всех ключевых окружностей (при разных φ) совпадают с точкой O. При таком представлении величина R_φ и изображение из точек $c_1^\varphi, \ldots, c_n^\varphi$ - функции от угла φ. Вопрос в том, при каких углах поворота величина R_φ наименьшая?

Рассмотрим сначала для примера частный случай, в котором поставленная задача решается просто. Пусть изображения A и B таковы, что они переводимы друг в друга преобразованием подобия. Положим для конкретности, что B получено из A увеличением или уменьшением в размерах с коэффициентом k и поворотом на угол α^*. При повороте B на произвольный угол φ попарные расстояния между точками c_i^φ и c_j^φ ядра $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$ вычисляются по формуле $(c_i^\varphi c_j^\varphi)^2 = (a_i a_j)^2 + (b_i b_j)^2 - 2(a_i a_j)(b_i b_j)\cos(\alpha^* + \varphi)$. Поскольку $(b_i b_j) = k(a_i a_j)$, то $(c_i^\varphi c_j^\varphi)^2 = (a_i a_j)^2(1 + k^2 - 2k\cos(\alpha^* + \varphi))$. Это значит, что при вращении изображения B ядро характеристического изображения пары (A, B) меняется, оставаясь подобным самому себе (и, заметим, изображениям A и B). Наименьшими все попарные расстояния между точками ядра, а следовательно и радиус ключевой окружности, будут при $(\alpha^*+\varphi) = 0$. Таким образом, искомое взаиморасположение для A и B характеризуется тем, что все соответствующие отрезки на этих изображениях (то есть (a_ia_j) и (b_ib_j), $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$) параллельны друг другу.

В рассмотренном примере ядро, меняясь в размерах, остается подобным себе, и потому на ключевой окружности при всех углах поворота находятся одни и те же точки (то есть те точки, которые выше были названы соответствующими). В общем случае точки ядра меняют расположение относительно друг друга, и потому при разных φ на ключевой окружности могут оказываться разные точки.

Итак, имеем изображения A из точек $a_1, \ldots, a_n$, B_φ из точек $b_1^\varphi, \ldots, b_n^\varphi$ и C_φ из точек $c_1^\varphi, \ldots, c_n^\varphi$; R_φ - радиус ключевой окружности для C_φ. Пусть изображение A_i есть часть A из точек $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, B_i^φ есть часть B_φ из точек $b_{i_1}^\varphi, \ldots, b_{i_k}^\varphi$, C_i^φ есть часть C_φ из точек $c_{i_1}^\varphi, \ldots, c_{i_k}^\varphi$ $(1 \leq k \leq n)$. Изображение C_i^φ называем порожденным изображениями A_i и B_i^φ, а сами изображения A_i и B_i^φ называем соответствующими C_i^φ. Через r_i^φ обозначим радиус ключевой окружности изображения C_i^φ.

Изображение C_i^φ назовем монотонным в точке φ, если существует такое $\triangle\varphi > 0$, что в промежутке от $\varphi - \triangle\varphi$ до $\varphi + \triangle\varphi$ радиус r_i^φ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. В противном случае C_i^φ называем немонотонным в точке φ. Значения углов φ, в которых C_i^φ немонотонно, называем критическими для C_i^φ, взаиморасположения соответствующих C_i^φ изображений B_i^φ и A_i при критических углах тоже называем критическими.

Пусть угол φ_0 - искомый. Тогда ядро C_φ - немонотонное изображение в точке φ_0, следовательно, угол φ_0 для C_φ - критический.

Идея дальнейших построений состоит в выделении на C_φ особых частей, минимальных по количеству точек, для которых φ_0 - тоже критический угол. Эти особые части назовем ключевыми изображениями и определим следующим образом.

Пусть для C_i^φ - части изображения C_φ - выполняется условие: угол φ_0 для C_i^φ - критический, и $r_i^\varphi = R_{\varphi_0}$. Пусть для C_j^φ - любой части изображения C_i^φ - это условие не выполняется. Тогда C_i^φ называем ключевым изображением, а соответствующие C_i^φ изображения A_i и B_i^φ тоже называем ключевыми.

Из последнего определения следует, что искомый угол может находиться только среди критических углов ключевых изображений. Все возможные ключевые изображения разобьем на три класса: 1) из двух точек, 2) из трех точек, 3) из четырех и более точек.

Рассмотрим последовательно эти три случая.

Первый случай. Ключевые изображения состоят из двух точек: $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$ из C_{φ_0}, a_{i_1}, a_{i_2} из A и $b_{i_1}^{\varphi_0}$, $b_{i_2}^{\varphi_0}$ из B_{φ_0}. В этом случае отрезок $(c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0})$ должен быть диаметром ключевой окружности, и $(c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0})^2 = (a_{i_1}a_{i_2})^2 + (b_{i_1}^{\varphi_0}b_{i_2}^{\varphi_0})^2 - 2(a_{i_1}a_{i_2})(b_{i_1}^{\varphi_0}b_{i_2}^{\varphi_0})\cos(\alpha_{i_1i_2}+\varphi_0)$. Отсюда следует, что критические углы для рассматриваемых ключевых изображений определяются необходимым условием: $|\cos(\alpha_{i_1i_2}^0 + \varphi)| = 1$. Это значит, что соответствующие отрезки $(a_{i_1}a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^{\varphi_0}b_{i_2}^{\varphi_0})$ должны быть параллельными, то есть угол между ними равен нулю или π. Ясно, что φ_0 определяется равенством угла между соответствующими отрезками нулю. При этом R_{φ_0} равен половине модуля разности длин отрезков $(a_{i_1}a_{i_2})$ и $(b_{i_1}b_{i_2})$.

Обозначим через U_1 множество значений угла φ, при которых углы между соответствующими отрезками (a_ia_j) и (b_ib_j) $(i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$ равны нулю.

Второй случай. Ключевые изображения состоят из трех точек: $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$, $c_{i_3}^{\varphi_0}$ из C_{φ}, a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} из A и $b_{i_1}^{\varphi_0}$, $b_{i_2}^{\varphi_0}$, $b_{i_3}^{\varphi_0}$ из B_{φ_0}. Положим сначала, что никакие две из точек $c_{i_j}^{\varphi_0}$ $(j = 1, 2, 3)$ не сливаются в одну, то есть $c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0}c_{i_3}^{\varphi_0}$ - остроугольный треугольник (рис. 14).

Длины отрезков $(a_{i_1}b_{i_1}^{\varphi_0})$, $(a_{i_2}b_{i_2}^{\varphi_0})$, $(a_{i_3}b_{i_3}^{\varphi_0})$ одинаковы и равны R_{φ_0}. Отрезки будем полагать направленными с направлением от точек a_{i_j} к $b_{i_j}^{\varphi_0}$ или наоборот. Пусть, для определенности, отрезки направлены от a_{i_j} к $b_{i_j}^{\varphi_0}$ $(j = 1, 2, 3)$. Рассмотрим направленные прямые L_1, L_2, L_3, на которых лежат эти отрезки, с направлениями для всех трех прямых, совпадающими с направлениями отрезков или противоположными им. Пусть, для определенности, направления прямых L_j совпадают с направлениями отрезков $(a_{i_j}b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$, лежащих на них.

Лемма 3 *Для того, чтобы взаиморасположение изображений из точек a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} и $b_{i_1}^{\varphi_0}$, $b_{i_2}^{\varphi_0}$, $b_{i_3}^{\varphi_0}$ было критическим, необходимо, чтобы прямые L_1, L_2, L_3 пересекались в одной точке.*

Доказательство. Заметим сначала, что в треугольнике $c_{i_1}^{\varphi}c_{i_2}^{\varphi}c_{i_3}^{\varphi}$ длины его сторон являются непрерывными функциями от угла φ. В точке φ_0 треугольник $c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0}c_{i_3}^{\varphi_0}$ по условию остроугольный, поэтому существует окрестность точки φ_0 такая, что при углах из этой окрестности он остается остроугольным.

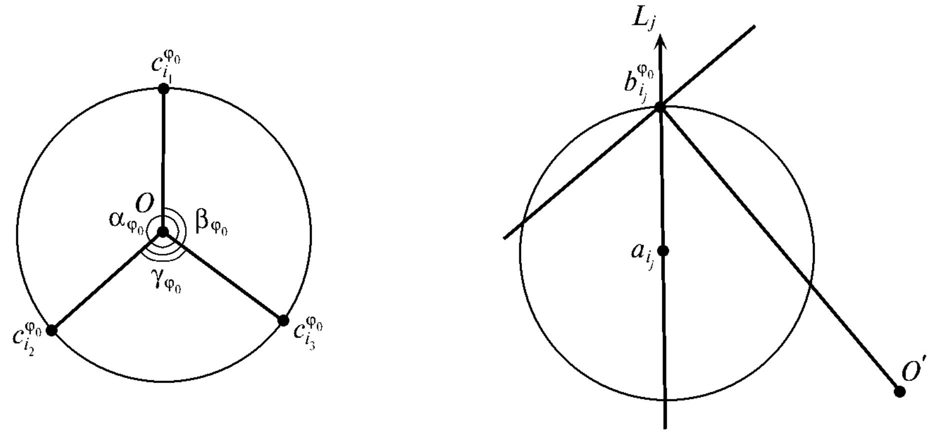

Рис. 14-15.

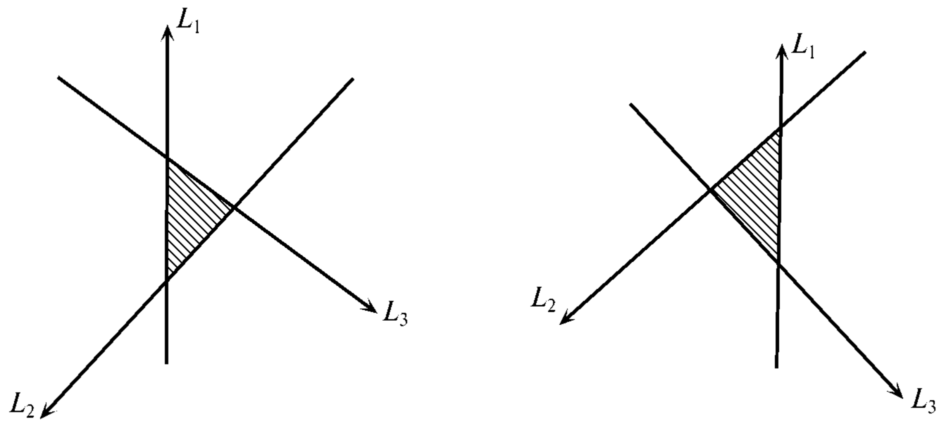

Рис. 16(а),(б).

Прямая L_j $(j = 1, 2, 3)$, если смотреть по ее направлению, делит плоскость на правую и левую полуплоскости. Пусть O' - произвольная точка в правой полуплоскости (рис. 15). Правая часть перпендикуляра к отрезку $(O'b_{i_j}^{\varphi_0})$ в точке $b_{i_j}^{\varphi_0}$ находится вне круга радиуса R_{φ_0} с центром в точке a_{i_j}, для левой части перпендикуляра участок, примыкающий к $b_{i_j}^{\varphi_0}$, находится внутри круга. Поэтому существует угол $\triangle\varphi > 0$ такой, что поворот вправо точки $b_{i_j}^{\varphi_0}$ с центром вращения в O' на угол, не больший $\triangle\varphi$, удаляет точку $b_{i_j}^{\varphi_0}$ от a_{i_j}, а поворот влево на такой же угол - приближает. Аналогично для любого центра вращения O'' в левой полуплоскости поворот вправо приближает точку $b_{i_j}^{\varphi_0}$, поворот влево - удаляет ее от a_{i_j}.

Предположим, что L_1, L_2, L_3 не пересекаются в одной точке. Тогда они образуют треугольник, все внутренние точки которого являются точками их правых полуплоскостей (рис. 16(а)), или левых полуплоскостей (рис. 16(б)). В любом из этих случаев вращение B_{φ_0} с центром вращения в любой из внутренних точек этого треугольника в одну сторону удаляет одновременно все точки $b_{i_j}^{\varphi_0}$ от соответствующих точек a_{i_j} $(j = 1, 2, 3)$, в другую - одновременно приближает их к ним. Длины отрезков $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ и углы между ними при таком вращении являются непрерывными функциями от угла φ (в некоторой окрестности точки φ_0). Следовательно, изображение из точек $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$, $c_{i_3}^{\varphi_0}$ монотонно в точке φ_0 - пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пересекающиеся в одной точке прямые L_1, L_2, L_3 назовем трехосником, сами прямые - осями, точку O_L пересечения - центром трехосника. На каждой оси часть ее от центра в направлении оси называем положительной полуосью, оставшуюся часть - отрицательной полуосью.

Все возможные варианты расположения точек a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} и $b_{i_1}^{\varphi_0}$, $b_{i_2}^{\varphi_0}$, $b_{i_3}^{\varphi_0}$ на трехоснике можно представить четырьмя классами.

1. Класс S_1: отрезки $(a_{i_j}^{\varphi_0} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ все одновременно лежат в положительных полуосях (рис. 17(а)), или все одновременно - в отрицательных полуосях (рис. 17(б)).

2. Класс S_2: один из отрезков $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ лежит в положительной полуоси, два других - в отрицательных полуосях (рис. 18(а)), или наоборот, один отрезок лежит в отрицательной полуоси, два других - в положительной (рис. 18(б)).

Классами S_1 и S_2 исчерпываются такие варианты размещения точек на осях, когда каждый из отрезков $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ целиком лежит либо в положительной полуоси, либо в отрицательных.

3. Класс S_3: для всех трех отрезков $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ центр трехосника расположен между точками a_{i_j} и $b_{i_j}^{\varphi_0}$ (рис. 19).

4. Класс S_4: у одного или двух отрезков из $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ центр трехосника лежит на отрезке, остальные целиком лежат в отрицательной или положительной полуосях (два примера на рис. 20).

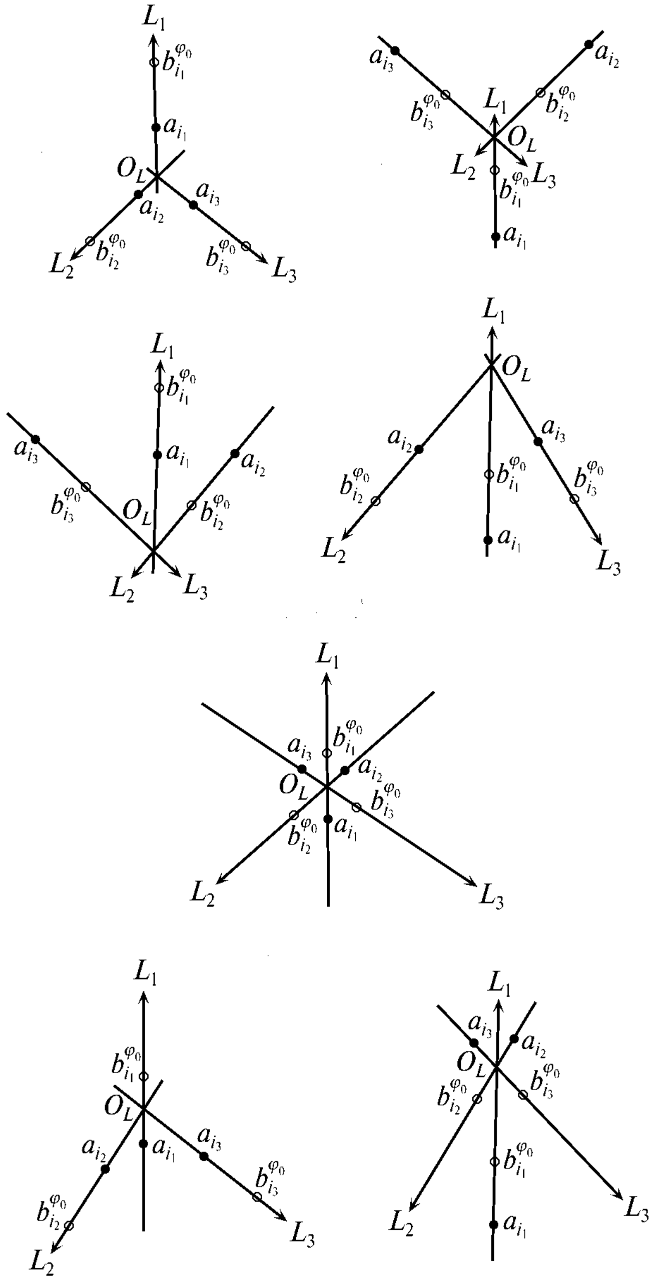

Рис. 17-20.

Классы S_1 и S_2 представляют варианты искомого взаиморасположения: нетрудно видеть, что вращение B_{φ_0} относительно центра трехосника в любую сторону (на угол, не превышающий некоторый $\triangle\varphi$) удаляет точки $b_{i_j}^{\varphi_0}$ от соответствующих точек a_{i_j} $(j = 1, 2, 3)$. В S_3 взаиморасположение точек критическое, но не искомое: вращение B_{φ_0} относительно центра трехосника в любую сторону приближает соответствующие точки друг к другу. В классе S_4 только часть взаиморасположений искомые.

Итак, искомое взаиморасположение находится среди взаиморасположений изображений из точек a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} и $b_{i_1}^{\varphi_0}$, $b_{i_2}^{\varphi_0}$, $b_{i_3}^{\varphi_0}$, представленных классами S_1 - S_4. Следующий вопрос: как найти эти взаиморасположения при конкретных изображениях A и B?

Условимся о следующих обозначениях. Отрезки $(a_{i_j} b_{i_j}^{\varphi_0})$ $(j = 1, 2, 3)$ будем представлять величиной R, где $|R| = R_{\varphi_0}$, причем будем считать R положительным, если направление отрезка совпадает с направлением оси, на которой он лежит, и отрицательным в противном случае.

Отрезки $(O_L a_{i_1})$, $(O_L a_{i_2})$, $(O_L a_{i_3})$ считаем направленными от O_L к a_{i_j} $(j = 1, 2, 3)$, и представляем их величинами x, y, z соответственно. Длину отрезка $(O_L a_{i_1})$ полагаем равной $|x|$, x полагаем положительным, если направление $(O_L a_{i_1})$ совпадает с направлением оси L_1, и отрицательным в противном случае. Аналогично полагаем и для y и z. Углы (положительные, меньшие π, в сумме составляющие 2π) между осями L_1 и L_2, L_1 и L_3, L_2 и L_3 обозначим через α, β, γ соответственно. На рис. 21 для двух примеров показаны соответствующие обозначения.

Ясно, что задание конкретных значений для x, y, z, α, β, γ, R определяет конкретное взаиморасположение точек a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} и b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, а значит и конкретное значение угла φ между изображениями A и B.

Лемма 4 *Все варианты взаиморасположения точек a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} и b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, представленные в классах S_1, S_2, S_3, S_4, находятся среди решений следующей системы уравнений:*

$$\begin{cases} (a_{i_1} a_{i_2})^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \\ (b_{i_1} b_{i_2})^2 = (x+R)^2 + (y+R)^2 - 2(x+R)(y+R)\cos\alpha \\ (a_{i_1} b_{i_3})^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\beta \\ (b_{i_1} b_{i_3})^2 = (x+R)^2 + (z+R)^2 - 2(x+R)(z+R)\cos\beta \\ (a_{i_2} a_{i_3})^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma \\ (b_{i_2} b_{i_3})^2 = (y+R)^2 + (z+R)^2 - 2(y+R)(z+R)\cos\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{cases}$$

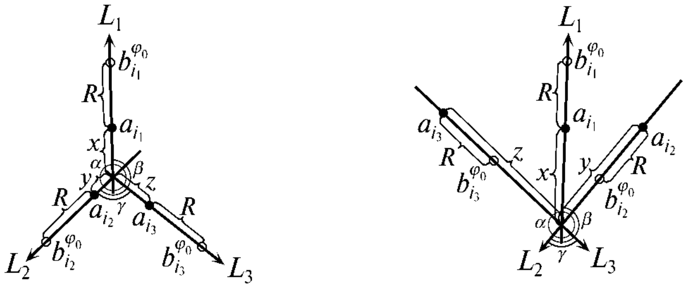

Рис. 21.

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой: написанием системы уравнений для каждого из вариантов, представленных классами S_1 - S_4.

Рассмотрим произвольную тройку точек $\tilde{a}$ из A и тройку соответствующих точек $\tilde{b}$ из B. Для изображений $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ при определении для них искомого взаиморасположения возможны только первый и второй случаи. Если имеет место первый случай, то определяемое им значение угла φ между изображениями A и B находится среди углов из множества U_1. Во втором случае искомый угол находится среди набора $\tilde{u}$ углов, определяемых решениями системы уравнений из леммы 4. Обозначим через U_2 объединение множеств $\tilde{u}$, полученных для всех возможных троек точек из A и соответствующих троек точек из B.

Везде выше предполагалось, что точки $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$, $c_{i_3}^{\varphi_0}$ - разные. Рассмотрим теперь вырожденный случай, когда две из этих точек, для определенности $c_{i_2}^{\varphi_0}$ и $c_{i_3}^{\varphi_0}$, сливаются в одну (рис. 22). Поскольку длина отрезка $(c_{i_2}^{\varphi_0} c_{i_3}^{\varphi_0})$ в этом случае равна нулю, то необходимым условием для этого является равенство по длине отрезков $(a_{i_2}a_{i_3})$ и $(b_{i_2}b_{i_3})$ и равенство нулю угла $\alpha_{i_2 i_3}$. Отсюда следует, что определяемые необходимым условием для всех возможных вырожденных случаев углы между изображениями A и B находятся среди углов множества U_1.

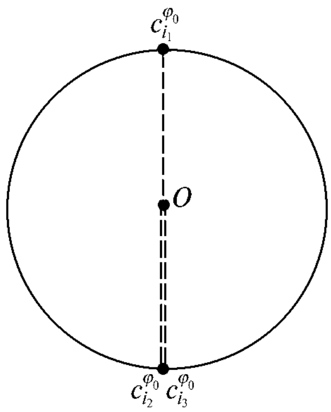

Рис. 22.

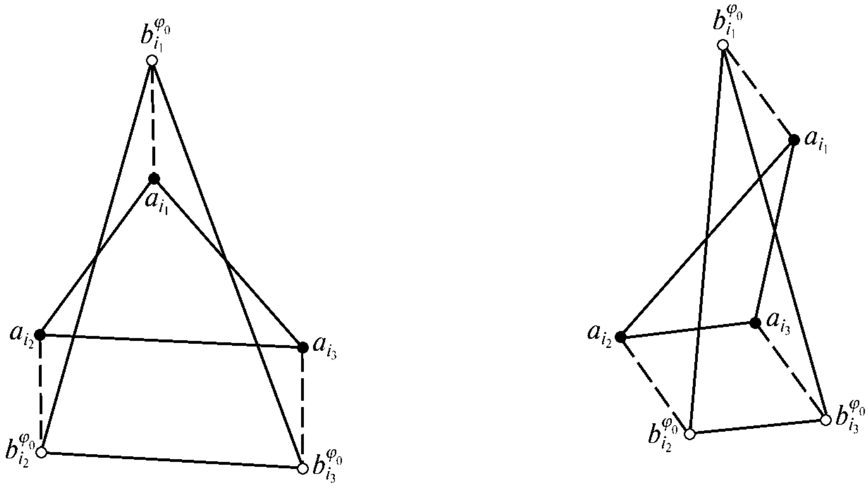

Рис. 23.

На рисунке 23 представлены примеры, относящиеся к вырожденному случаю и выполнению для него необходимого условия: на (а) - искомое взаиморасположение, на (б) - не искомое.

Третий случай. Ключевые изображения состоят из четырех и более точек. Рассмотрим четыре из них: $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$, $c_{i_3}^{\varphi_0}$, $c_{i_4}^{\varphi_0}$. Полагаем, что никакие две из них не сливаются в одну. Из теоремы Птолемея следует, что для того, чтобы точки $c_{i_1}^{\varphi_0}$, $c_{i_2}^{\varphi_0}$, $c_{i_3}^{\varphi_0}$, $c_{i_4}^{\varphi_0}$ находились на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех равенств:

$$\pm(c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0})(c_{i_3}^{\varphi_0}c_{i_4}^{\varphi_0}) \pm (c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_3}^{\varphi_0})(c_{i_4}^{\varphi_0}c_{i_2}^{\varphi_0}) \pm (c_{i_1}^{\varphi_0}c_{i_4}^{\varphi_0})(c_{i_2}^{\varphi_0}c_{i_3}^{\varphi_0}) = 0.$$

Величина каждого из отрезков в этих уравнениях есть функция от угла φ между изображениями A и B. Следовательно, задача нахождения возможных критических углов для этого случая сводится к решению этих уравнений, неизвестным в которых является угол φ. Такие уравнения составляем для всех четверок точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$ из A и соответствующих четверок точек b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4} из B. Множество углов φ, являющихся решениями получаемых уравнений, обозначим через U_3.

Обозначим через U объединение множеств U_1, U_2, U_3.

Теорема 2 *Искомый угол φ_0 находится среди углов множества U.*

Доказательство. Следует из того, что, по построению, U включает все возможные критические углы для всех возможных ключевых изображений.

Итак, пусть определен угол φ_0, следовательно, найдено значение $R_{\varphi_0} = R_\psi^{\min}$. Обозначим через $R'(A,B) \min\limits_{\psi} R_\psi^{\min}$, где минимум берется на множестве величин $R_\psi^{\min}$, полученных при всех возможных биекциях на множествах точек изображений A и B.

Обозначим через $\hat{B}$ изображение, полученное из B преобразованием симметрии, и пусть $R''(A,B) = R'(A,\hat{B})$.

Наконец, через $R(A,B)$ обозначим $\min(R'(A,B), R''(A,B))$. Величина $R(A,B)$ определяет наименьшую взаимоудаленность точек изображений A и B при всех возможных сопоставлениях этих точек друг другу и при всех возможных изометрических преобразованиях этих изображений.

Нетрудно видеть, что алгоритм нахождения $R(A,B)$, если прямо следовать описанному выше, в значительной мере переборный, и потому довольно трудоемок. Это происходит из того, что цель настоящей работы состояла, в первую очередь, в доказательстве существования конечной процедуры нахождения $R(A,B)$. Задача нахождения на основе этой процедуры эффективного при использовании на практике алгоритма - следующая по очередности задача. Возможности к ее решению есть и здесь будет обозначен только один момент, с этим связанный. Наиболее чревато трудоемкостью то обстоятельство, что нужно рассматривать все биекции между точками изображений A и B, и для каждой находить искомый угол φ_0. Таких биекций $n!$, где n - количество точек в изображениях A и B. Воспользуемся, однако, тем, что конкретное взаиморасположение любых двух частей $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ изображений A и B определяет и некоторый угол φ между самими изображениями A и B. Рассмотрим все возможные части $\tilde{a}_2$ из двух точек изображения A и все варианты сопоставления им частей $\tilde{b}_2$ из двух точек изображения B. Таких пар $(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$ будет $2(C_n^2)^2$. Обозначим через $\tilde{U}_1$ множество критических углов для этих пар. Аналогично рассмотрим пары $(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)$ частей изображений A и B из трех точек, их будет $6(C_n^3)^2$. Множество их критических углов обозначим через $\tilde{U}_2$. Наконец, через $\tilde{U}_3$ обозначим множество критических углов пар $(\tilde{a}_4, \tilde{b}_4)$ частей из четырех точек изображений A и B, таких пар будет $24(C_n^4)^2$. Искомый угол будет находиться среди углов объединения $\tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2 \cup \tilde{U}_3$. При такой процедуре от перебора $n!$ биекций мы избавлены.

Автор глубоко благодарен Ю.И. Журавлеву и В.Б. Кудрявцеву за внимание к работе.

Работа поддерживалась грантом РФФИ 98-01-00652.

Список литературы

[1] Козлов В.Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М. Наука. 1996. С. 321-338.

[2] Козлов В.Н. О кодировании дискретных фигур // Дискретная математика. 1996. Т. 8. N 6. С. 57-61.

[3] Kozlov V.N. Image Coding and Recognition and Some Problems of Stereovision // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V. 7. N 4. P. 448-466.