Представление СФЭ

М. В. Носов[1]

В работе получено представление всех схем из функциональных элементов с одинаковым числом элементов в базисе из штриха Шеффера для булевской функции в виде натурального числа. Расшифровка этого числа позволяет построить все схемы.

Ключевые слова: булевская функция, схема из функциональных элементов.

В данной работе используются описания СФЭ и задаваемой булевской функции, которые даны в статье автора "Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера" (Интеллектуальные системы. Теория и приложения.21:2 (2017), 193-196).

Рассмотрим СФЭ в базисе из Штриха Шеффера, схема должна задавать булевскую функцию $f(y_1, \dots, y_n)$. Элементов в схеме L, они пронумерованы числами $n+1, \dots, n+L$; k-ый элемент схемы имеет входами и (или) входы схемы, и (или) выходы элементов с меньшими номерами, таким образом, появляются двойки $(i_k, j_k), 1 \le i_k \le k-1, 1 \le j_k \le k-1$. Пусть Y- матрица $2^n \times (n+L)$, у которой первые n столбцов есть вектора E_2^n, а остальные элементы – свободные переменные, принимающие значения 0 или 1. Определим функцию

$$\Xi((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f) = \\ \sum_Y g((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f, Y),$$

где

$$g((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f, Y) = \\ \prod_{m=1}^{2^n} \prod_{k=n+1}^{n+L} (1-(y_{mk}-(1-y_{mi_k} y_{mj_k}))^2) \cdot \prod_{m=1}^{2^n} (1-(y_{mn+L}-f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2)$$

Функция $g(\cdot)$ равна 1, если выходы каждого элемента совпадают с соответствующими значениями элементов матрицы Y и последний столбец матрицы есть столбец функции f, в противном случае, равна 0.Так как по заданной схеме выходы определяются однозначно, то функция Ξ равна 1, если схема реализует f и 0, в противном случае, т.е. только на одной матрице Y функция g может равняться 1. Определим число

[1] *Носов Михаил Васильевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

$$N(f,L)=\sum_{(i_{n+1},j_{n+1}),\ldots,(i_{n+L},j_{n+L})} 2^{m((i_{n+1},j_{n+1}),\ldots,(i_{n+L},j_{n+L}))}\cdot\Xi(\cdot),$$

где

$$m((i_{n+1},j_{n+1}),\ldots,(i_{n+L},j_{n+L}))=$$
$$\sum_{k=1}^{L}(i_{n+k}(n+L)^{2(k-1)}+j_{n+k}(n+L)^{2(k-1)+1})$$

Число $N(f,L)$ – искомое. Зная это число, надо разложить его по степеням 2, каждую степень разложить по основанию $(n+L)$, коэффициенты разложения будут задавать соответствующую схему.

Произведём преобразования

$$\prod_{m=1}^{2^n}\prod_{k=n+1}^{n+L}(1-(y_{mk}-(1-y_{mi_k}y_{mj_k}))^2)=$$

$$\prod_{m=1}^{2^n}\prod_{k=n+1}^{n+L}(y_{mk}+y_{mi_k}y_{mj_k}-2y_{mk}y_{mi_k}y_{mj_k})=$$

$$\prod_{m=1}^{2^n}\prod_{k=n+1}^{n+L}(y_{mk}+(1-2y_{mk})y_{mi_k}y_{mj_k})=$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot\prod_{t\notin S}(1-2y_{tk})y_{ti_k}y_{tj_k})=$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot\prod_{t\notin S}(-1)^{y_{tk}}y_{ti_k}y_{tj_k})=$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot(-1)^{\sum\limits_{t\notin S}y_{tk}}\cdot\prod_{t\notin S}y_{ti_k}y_{tj_k})=$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot(-1)^{\sum\limits_{m=1}^{2^n}y_{mk}+|S|}\cdot\prod_{t\notin S}y_{ti_k}y_{tj_k})=$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}(-1)^{||Y_k||}\cdot(-1)^{|S|}\cdot\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot\prod_{t\notin S}y_{ti_k}y_{tj_k})=$$

$$(-1)^{||Y||}\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S,S\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}\cdot(-1)^{|S|}\cdot\prod_{s\in S}y_{sk}\cdot\prod_{t\notin S}y_{ti_k}y_{tj_k}),$$

где $\|\, Y_k \,\|$ – число единиц в k-ом столбце матрицы Y, $\|\, Y \,\|$ – число единиц в матрице Y (число единиц в первых n столбцах чётное).

Для удобства введём обозначения

$$u_{i_{n+k}} = 2^{i_{n+k}(n+L)^{2(k-1)}}, \qquad v_{j_{n+k}} = 2^{j_{n+k}(n+L)^{2(k-1)+1}}$$

Тогда

$$N(f,L) = \sum_{Y} \sum_{(i_{n+1},j_{n+1}),\ldots,(i_{n+L},j_{n+L})} (-1)^{||Y||} u_{i_{n+1}} v_{j_{n+1}}, \ldots, u_{i_{n+L}} v_{j_{n+L}} \cdot$$

$$\sum_{S_{n+1},\ldots,S_{n+L} \subseteq \{1,\ldots,2^n\}} ((-1)^{|S_{n+1}|} \cdot \prod_{s \in S_{n+1}} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_{n+1}} y_{ti_k} y_{tj_k}) \cdot \ldots \cdot ((-1)^{|S_{n+L}|} \cdot$$

$$\prod_{s \in S_{n+L}} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_{n+L}} y_{ti_k} y_{tj_k}) \cdot \prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \ldots, y_{mn}))^2) =$$

$$\sum_{Y} (-1)^{||Y||} \prod_{k=n+1}^{n+L} (\sum_{S_k} \sum_{i_k, j_k} (-1)^{|S_k|} \cdot u_{i_k} v_{j_k} \prod_{s \in S_k} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_k} y_{ti_k} y_{tj_k}) \cdot$$

$$\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \ldots, y_{mn}))^2) =$$

$$\sum_{Y} (-1)^{||Y||} \prod_{k=n+1}^{n+L} (\sum_{S_k} (-1)^{|S_k|} \cdot \prod_{s \in S_k} y_{sk} \cdot (\sum_{l_k=1}^{k-1} u_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k})(\sum_{l_k=1}^{k-1} v_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k})) \cdot$$

$$\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \ldots, y_{mn}))^2)$$

Преобразуем последнее произведение

$$\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \ldots, y_{mn}))^2) =$$

$$\prod_{m=1}^{2^n} ((1 - y_{mn+L}) + (2y_{mn+L} - 1) f(y_{m1}, \ldots, y_{mn})) =$$

$$\sum_{U, U \subseteq \{1,\ldots,2^n\}} \prod_{m, m \notin U} (1 - y_{mn+L}) \cdot \prod_{m \in U} (2y_{mn+L} - 1) \cdot \prod_{m \in U} f(y_{m1}, \ldots, y_{mn}) =$$

$$\sum_{U, U \subseteq \{1,\ldots,2^n\}} ((-1)^{|U|} \prod_{m, m \notin U} (1 - y_{mn+L}) \cdot (-1)^{\sum\limits_{m \in U} y_{mn+L}}) \cdot \prod_{m \in U} f(y_{m1}, \ldots, y_{mn})$$

Окончательно

$$N(f,L)=\sum_{U,U\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}(\sum_{Y}(-1)^{||Y||}$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L}(\sum_{S_k,S_k\subseteq\{1,\ldots,2^n\}}(-1)^{|S_k|}\cdot\prod_{s\in S_k}y_{sk}\cdot(\sum_{l_k=1}^{k-1}u_{l_k}\prod_{t\notin S_k}y_{tl_k})(\sum_{l_k=1}^{k-1}v_{l_k}\prod_{t\notin S_k}y_{tl_k}))\cdot$$

$$(-1)^{|U|}\prod_{m,m\notin U}(1-y_{mn+L})\cdot(-1)^{\sum\limits_{m\in U}y_{mn+L}})\cdot\prod_{m\in U}f(y_{m1},\ldots,y_{mn})$$

Наименьшее L, начиная с которого имеет смысл искать схемы, – минимальная сложность схемы, реализующая f, в базисе из штриха Шеффера, поиск минимальной сложности описан в указанной статье.

Вычисление коэффициентов при $\prod\limits_{m\in U}f(y_{m1},\ldots,y_{mn})$ наталкивается на проблему "большой размерности".

Representation of the SFE
Nosov M.V.

In this paper, we obtain a representation of all schemes of functional elements with the same number of elements in the basis from the Schaeffer stroke for a Boolean function in the form of a natural number. Decoding this number allows you to build all the schemes.

Keywords: Boolean function, a scheme of functional elements.