

# Автоматизированное построение реалистичных литофациальных карт методами комбинаторной оптимизации

А. П. Антонов<sup>1</sup> С. А. Афонин<sup>2</sup> А. С. Козицын<sup>3</sup> В. М. Староверов<sup>4</sup>  
А. В. Ступакова<sup>5</sup> А. А. Сулова<sup>6</sup> А. П. Завьялова<sup>7</sup> В. В. Чупахина<sup>8</sup>  
Р. С. Сауткин<sup>9</sup> С. В. Осипов<sup>10</sup>

<sup>1</sup>Антонов Алексей Петрович — доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexey.p.antonov@gmail.com.

Antonov Alexei Petrovich — assoc. prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

<sup>2</sup>Афонин Сергей Александрович — ведущий научный сотрудник лаб. автоматизации экспериментальных исследований НИИ механики МГУ, e-mail: serg@msu.ru

Afonin Sergey Aleksandrovich — leading researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Experimental research automation Laboratory.

<sup>3</sup>Козицын Александр Сергеевич — ведущий научный сотрудник лаб. автоматизации экспериментальных исследований НИИ механики МГУ, e-mail: alexanderkz@mail.ru

Kozitsyn Alexander Sergeevich — leading researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Experimental research automation Laboratory.

<sup>4</sup>Староверов Владимир Михайлович, — доцент каф. вычислительной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: staroverovvl@yandex.ru

Staroverov Vladimir Mihailovich — assoc. prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Numerical Mathematics.

<sup>5</sup>Ступакова Антонина Васильевна — зав. кафедры каф. геологии и геохимии горючих ископаемых геологического ф-та МГУ, e-mail: a.stoupakova@oilmsu.ru

Stupakova Antonina Vasilievna — head of the department, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Geology and Geochemistry of Oil and Gas.

<sup>6</sup>Сулова Анна Анатольевна — ведущий научный сотрудник каф. геологии и геохимии горючих ископаемых геологического ф-та МГУ, e-mail: a.suslova@oilmsu.ru

Suslova Anna Anatolievna — leading researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Geology and Geochemistry of Oil and Gas.

<sup>7</sup>Завьялова Анна Петровна — научный сотрудник каф. геологии и геохимии горючих ископаемых геологического ф-та МГУ, e-mail: a.zavyalova@oilmsu.ru

Zavyalova Anna Petrovna — researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Geology and Geochemistry of Oil and Gas.

<sup>8</sup>Чупахина Виталия Валерьевна — инженер каф. геологии и геохимии горючих ископаемых геологического ф-та МГУ, e-mail: v.chupakhina@oilmsu.ru

Chupakhina Vitalia Valerievna — engeneer, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Geology and Geochemistry of Oil and Gas.

<sup>9</sup>Сауткин Роман Сергеевич — старший научный сотрудник каф. геологии и геохимии горючих ископаемых геологического ф-та МГУ, e-mail: r.sautkin@oilmsu.ru

Sautkin Roman Sergeevich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Chair of Geology and Geochemistry of Oil and Gas.

<sup>10</sup>Осипов Сергей Владимирович — менеджер ДНТРИИ, ПАО «НК «Роснефть» s\_osipov@rosneft.ru

Литофациальные карты отображают пространственное изменение литологического состава пород и направление характера их замещения для определенного геологического времени в зависимости от физико-географических условий их седиментации. Построение литофациальных карт проводится на основании анализа комплексов генетически связанных отложений, обладающих характерными вещественными признаками литофаций. Исходными данным могут быть как *только* точки на плоскости — координаты скважин, в которых встречаются определенные литофации, — так и *дополнительно* карта скоростей накопления осадков. Предполагается, что одинаковые фации должны иметь близкие скорости осадконакопления. Задача построения литофациальной карты заключается в определении границ областей распространения фаций. В работе предлагается сведение задачи построения карты к задаче раскраски графов, которая, в свою очередь, решается методами целочисленного линейного программирования. Такой подход позволяет автоматически строить реалистичные карты — то есть карты, удовлетворяющей экспертным ограничениям и правилам.

**Ключевые слова:** картопостроение; лито-фациальный анализ; палереконструкция; оптимизация; целочисленное программирование

## 1. Введение

В настоящее время литолого-фациальный анализ является одним из наиболее широко распространенных и важных методов геологического анализа в нефтегазовой геологии. Практическое и теоретическое значение литофациальных карт очень велико, с их помощью можно спрогнозировать закономерности распределения фаций в межскважинном пространстве, определить области отсутствия осадконакопления, восстановить историю геологического развития исследуемого региона, а понимание распределения литофаций по площади позволяет выделить районы, благоприятные для накопления нефтегазоматеринских толщ, коллекторов и флюидоупоров [1, 2]. Использование литофациальных карт совместно с другими данными позволяет осуществлять прогноз и поиски залежей нефти и газа. Автоматизация рабочего процесса создания карт позволит сэкономить время на обработке большого количества данных, заменив «ручной труд» на машинный, и исключить системные ошибки.

Под термином «литофация» понимается комплекс генетически связанных отложений, обладающих характерными вещественными признаками [3]. По сути данный термин включает в себя два понятия — «лито-» и «фация-», то есть литофация характеризует, во-первых, вещественный

---

Osipov Sergey Vladimirovich — manager, Rosneft, Department of Scientific and Technical Development and Innovation.

состав ассоциации горных пород, которая обладает определенными признаками, отличающими их от соседних или ассоциирующих с ними пород, и, во-вторых, условия их образования.

Построение литофациальных карт — это способ отображения современного распространения пород, со сходными вещественными и структурно-текстурными особенностями, и условия их формирования в пределах определенного стратиграфического уровня. В его основе лежит знание о взаимосвязи литологических особенностей отложений, характера их распространения, взаимопереходов и обстановок осадконакопления [4].

Исходными данными для картопостроения являются точки на плоскости с уже определенными литофациями для каждого возрастного интервала в разрезе скважин. Определение литофаций осуществляется геологом по литологическому описанию кернового материала и выявлению в нем диагностических признаков (состав, структура, текстура, включения, цвет, границы). Дополнительными данными могут выступать карты с изолиниями — мощностей и/или скоростей осадконакопления. Предлагаемые алгоритмы построения реалистичных литофациальных карт методами комбинированной оптимизации позволяют автоматически, без ручного труда геолога, получать реалистичные и достаточно подробные карты, с учетом таких особенностей, как направление углубления бассейна, сохранение последовательности смены литофаций, ограничение распространений некоторых литофаций и особенности конфигурации осадочных тел.

Современные методы автоматического построения литологических и литофациальных карт основаны на применении алгоритмов машинного обучения для определения литологии либо в скважине по данным каротажа и изображений керна, либо в заданной точке пространства по известным значениям геофизических или визуальных параметров. Например, в [5] литология определяется по 16 геофизическим параметрам и данным зондирования поверхности методом случайного леса. В [6] рассматривается задача сегментирования аэрофотоснимков поверхности. Практическая важность таких работ связана с относительной простотой получения исходных данных, в том числе, для труднодоступных районов. Обзор методов анализа данных зондирования можно найти в [7]. Методы классического машинного обучения не тестовых данных показывают точность порядка 75%, однако в большинстве работ речь идёт об определении литологии на поверхности.

В данной работе мы предполагаем, что литофации уже были определены каким-либо методом и требуется определить области распространения этих литофаций в межскважном пространстве. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является использование допустимых последовательностей смены литофаций.

## 2. Постановка задачи

Задача состоит в построении карты распространения литофаций в заданной области. Исходными данными являются:

- множество возможных фаций  $F$ ;
- множество возможных литологий  $L$ ;
- область (полигон) распространения  $\bar{P} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  конечной площади;
- координаты скважин  $W$  с определенными в них фацией и литологией, то есть  $W = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ,  $f : W \rightarrow F$ ,  $l : W \rightarrow L$ ;
- карта скоростей осадконакопления  $z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная в области распространения  $\bar{P}$ ;
- допустимые последовательности фаций  $\mathcal{F} = \{(f_1^k, \dots, f_{n_k}^k)\}_{k=1}^{ncf}$ ,  $f_i^k \in F$ ;
- допустимые последовательности литологий  $\mathcal{L} = \{(l_1^k, \dots, l_{n_k}^k)\}_{k=1}^{ncl}$ ,  $l_i^k \in L$ ;
- допустимые литологии для фаций  $VL \subseteq F \times L$ .

Последовательности фаций определяют, какие фации могут соседствовать на карте. Последовательности литологий, соответственно, определяют возможные границы между областями распространения типов пород.

При построении карты используются следующие принципы:

- скважины считаются подтвержденными данными;
- границы областей распространения фаций выравниваются по линиям уровня карты скоростей  $z$ ;
- запрещается наличие общей границы у областей распространения фаций  $f_1$  и  $f_2$ , если пара  $f_1, f_2$  не встречается хотя бы в одной последовательности из  $\mathcal{F}$ .

Особенностью задачи является возможное отсутствие в исходных данных  $W$  скважин с фацией, которая должна быть на результирующей карте. Например, если в  $\mathcal{F}$  есть последовательность  $f_1, f_2, f_3$  (и нет последовательностей, содержащих  $f_1, f_3$ ), а в  $W$  есть только скважины с фациями  $f_1$  и  $f_3$ , то между областями распространения  $f_1$  и  $f_3$  должна появиться область фации  $f_2$ .

Требование выполнения корректности попарных границ является обязательным. При построении карты предпочтения отдаются таким картам, в которых возникают длинные последовательности из  $\mathcal{F}$ .

Результатом работы алгоритма являются фациальная и литофациальные карты (здесь  $Poly$  обозначает множество всех полигонов, а  $2^{Poly}$  — множество всех наборов полигонов)

$$\mathcal{M}_F : F \rightarrow 2^{Poly} \quad (1)$$

$$\mathcal{M} : F \times L \rightarrow 2^{Poly}, \quad (2)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

- полигоны фациальной карты  $\mathcal{M}_F$  не пересекаются:

$$\forall f_1, f_2 \in F \quad f_1 \neq f_2 \rightarrow \mathcal{M}_F(f_1) \cap \mathcal{M}_F(f_2) = \emptyset; \quad (3)$$

- полигоны фациальной карты  $\mathcal{M}_F$  покрывают всю область распространения  $\bar{P}$ :

$$\bigcup_{f \in F} \mathcal{M}_F(f) = \bar{P}; \quad (4)$$

- литофациальная карта  $\mathcal{M}$  является разбиением фациальной карты  $\mathcal{M}_F$ :

$$\forall f \in F \quad \mathcal{M}_F(f) = \bigcup_{l \in L} \mathcal{M}(f, l); \quad (5)$$

- соблюдается корректность границ фациальной карты  $\mathcal{M}_F$ :

$$\forall f_1 \in F, f_2 \in F \quad \text{dist}(\mathcal{M}_F(f_1), \mathcal{M}_F(f_2)) = 0 \rightarrow \exists ch \in \mathcal{F} \langle f_1, f_2 \rangle \in ch; \quad (6)$$

- согласованность карт с исходными данными — скважина  $w$  принадлежит полигону фации  $f(w)$  и полигону литофациальной карты для пары  $f(w), l(w)$ :

$$\forall w \in W \quad w \in \mathcal{M}_F(f(w)) \quad (7)$$

$$\forall w \in W \quad w \in \mathcal{M}(f(w), l(w)). \quad (8)$$

Здесь объединение, пересечение и расстояние  $\text{dist}$  между полигонами естественным образом расширяется на наборы полигонов (мультиполигоны). Выражение  $\langle f_1, f_2 \rangle \in ch$  означает, что цепочке  $ch = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$  найдется индекс  $i$ , такой что либо  $f_1 = x_i$  и  $f_2 = x_{i+1}$ , либо  $f_2 = x_i$  и  $f_1 = x_{i+1}$ .

### 3. Алгоритм построения $\mathcal{M}_F$

На верхнем уровне алгоритма построения фациальной карты разделяется на следующих этапы.

Сначала для каждой скважины  $w \in W$  находится полигон  $P_w$ , ограниченный линиями уровня карты скоростей  $z$ , в который не попадают скважины с другими фациями. Если полигон  $P_w$  содержит скважину  $w'$  той же фации  $f(w) = f(w')$ , то полигоны  $P_w$  и  $P_{w'}$  объединяются, и одна из скважин  $w$  и  $w'$  выбирается в качестве базовой (скважина-представитель) для этого полигона. Полигон  $P_w$  может быть ограничен двумя линиями уровня  $z_{min}, z_{max}$  («полоса»), либо одной линией («остров»). Во втором случае считаем, что одно из значений бесконечно («холм» имеет граничные значения  $z_{min}, +\infty$ ). Линия уровня, разделяющая полигоны скважин  $w_1$  и  $w_2$  разных фаций, выбирается из условия  $z_{div} = (z(w_1) + z(w_2))/2$ .

Далее полигоны  $P_w$  разбиваются на две или три части: «ядро»  $P_w^c$  и области неопределённости  $P_w^{uh}$  и  $P_w^{ul}$ . Ядро определяет ту часть  $P_w$ , для которой фация  $f(w)$  считается достоверной. Области неопределённости — это дополнение ядра. Если  $P_w$  является полосой, то возникает область неопределённости  $P_w^{uh}$  у верхней границы  $z_{max}$ , и область  $P_w^u$  у нижней границы.

Пример полигонов приведен на рис. 1. Видно, что со стороны больших значений  $z$  область ограничена скважиной в правом верхнем углу, со стороны меньших — скважинами в нижней части рисунка.

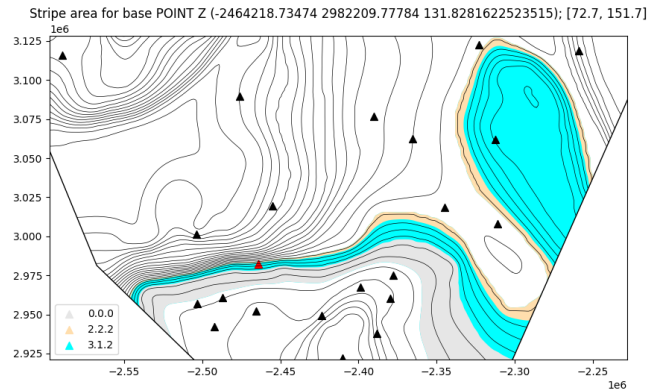


Рис. 1. Пример  $P_w, P_w^c$ . Базовая скважина выделена красным. Ядро области отмечено цветом 3.1.2, верхняя область неопределённости  $P_w^{uh}$  — цветом 2.2.2, нижняя область  $P_w^{ul}$  — цветом 0.0.0. Изолинии поля скоростей  $z$  нарисованы в границах полигона распространения  $\bar{P}$ .

Из полигонов  $P_w^c, P_w^{uh}, P_w^{ul}$ , соответствующих всем скважинам-представителям  $w$ , строится граф  $G$ . Вершина — полигон, ребро — наличие общей границы. Некоторым вершинам графа приписан цвет (название фации). Это вершины, соответствующие ядрам  $P_w^c$ . Остальные вершины цвета не имеют. Задача построения карты сводится к выбору цвета для всех вершин графа.

Наличие области неопределенности позволяет поставить на границу между двумя областями до двух дополнительных фаций, которые могли отсутствовать в исходных данных.

Раскраска графа делается путем решения задачи смешанного целочисленного программирования [9]: найти корректную раскраску (выполняется условие (6)), для которой функция качества окажется максимальной. Функция качества старается минимизировать количество смен цветов, находить длинные последовательности фаций, принадлежащих одной цепочке  $\mathcal{F}$ , окрашивать вершины в один цвет при условии близости значений  $z$ .

### 3.1. Построение полигонов $P_w, P_w^c$

Считаем, что по карте скоростей  $z$ , скважине  $w$  в точке  $(x, y)$  и значениям  $z_{min}, z_{max}$ , таким что  $z_{min} \leq z(x, y) \leq z_{max}$ , можно найти область (полигон), ограниченную линиями уровней  $z_{min}, z_{max}$ , и содержащую точку  $(x, y)$ . Обозначим эту область  $S_w(z_{min}, z_{max})$ , или просто  $S_w$ .

Пусть выбрана опорная скважина  $w$ , для которой требуется построить полигон  $P_w$  и его разбиение на  $P_w^c, P_w^{uh}$  и  $P_w^{ul}$ . Все скважины других фаций разбиваются на два множества (с меньшими и большими значениями  $z$ ):

$$W^- = \{w' \in W : f(w') \neq f(w) \wedge z(w') < z(w)\} \quad (9)$$

$$W^+ = \{w' \in W : f(w') \neq f(w) \wedge z(w') > z(w)\} \quad (10)$$

По множеству  $W^-$  строится множество значений  $z$ , из которых выбирается  $z_{min}$ , для которого выполняются следующие условия:

- полоса  $S_w(z_{min}, z(w))$  не содержит скважин других фаций;
- для меньших значений предыдущее условие нарушается.

$$Z^- = \left\{ \frac{z(w) + z(q)}{2} \right\}_{q \in W^-} \cup \{-\infty\} \quad (11)$$

$$z_{min} = \min \{z \in Z^- : \forall q \in W \ f(q) \neq f(w) \rightarrow q \notin S_w(z, z(w))\}. \quad (12)$$

Аналогично выбирается значение  $z_{max}$ .

$$Z^+ = \left\{ \frac{z(w) + z(q)}{2} \right\}_{q \in W^+} \cup \{+\infty\} \quad (13)$$

$$z_{max} = \max \{z \in Z^+ : \forall q \in W \ f(q) \neq f(w) \rightarrow q \notin S_w(z(w), z)\}. \quad (14)$$

Таким образом, полигон  $P_w = S_w(z_{min}, z_{max})$  имеет максимально возможную ширину по  $z$ , при условии, что уровни выбираются из построенных множеств. Заметим, что  $S_w$  строится с учётом структуры карты скоростей, поэтому на карте могут найтись скважины  $q_i$  других фаций, для которых  $z_{min} < z(q_i) < z_{max}$ , но которые геометрически находятся в другой области.

В случае, когда в область  $S_w$  попадают другие скважины фации  $f(w)$ , вычисления (11)-(14) повторяются с заменой значения  $z(w)$  в формулах (11) и (13) на минимальное и максимальное значение скорости по этим скважинам. Пусть  $Q = \{q \in W : f(q) = f(w) \wedge q \in S_w(z_{min}, z_{max})\}$ . Тогда в (11) значение  $z(w)$  заменяется на  $\min_{q \in Q} z(q)$ , а в (13) — на  $\max_{q \in Q} z(q)$ .

Ядро  $P_w^c$  ограничено  $z_{min}^c, z_{max}^c$ , где  $z_{min} \leq z_{min}^c = (z_{min} + z(w))/2$ , а  $z_{max} \geq z_{max}^c = (z_{max} + z(w))/2$ . Пропорция, в которой диапазон скоростей разделяется на область ядра и области неопределенности, а также количество областей неопределенности с каждой стороны, могут быть произвольными.

### 3.2. Оптимизационная задача

Задачу о раскраске графа можно сформулировать в терминах смешанного целочисленного программирования (MILP). Пусть требуется раскрасить граф  $G = \langle V, E \rangle$  цветами  $K$ , то есть найти отображение  $C : V \rightarrow K$ , с соблюдением ограничений корректности. Рассмотрим для наглядности случай, когда заданы только пары некорректных цветов  $I \subseteq K \times K$ . В графе не может быть смежных вершин  $u$  и  $v$ , для которых  $(C(u), C(v)) \in I$ . Требуется найти корректную раскраску с минимальным количеством используемых цветов.

Введем следующие бинарные переменные, определенные для  $u, v \in V$ ,  $k \in K$ :

- $x_{uk}$ : принимает значение 1 если вершина  $u$  покрашена в цвет  $k$ , и 0 иначе;
- $z_{uvk}$ : принимает значение 1 тогда и только тогда, когда  $(u, v) \in E$ , вершина  $u$  покрашена в цвет  $k$ , а  $v$  покрашена в другой цвет;
- $w_k$ : равная 1, если цвет  $k$  используется, и 0 иначе.



Тогда искомая раскраска может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи, где минимум ищется по всем значениями переменных  $x_{uk}$ ,  $z_{uvk}$  и  $w_k$ .

$$\text{minimize } \sum_{k \in K} w_k + \sum_{u, v \in V, k \in K} z_{uvk} \quad (15)$$

$$\text{при усл. } \sum_{k \in K} x_{vk} = 1 \quad \forall v \in V \quad (16)$$

$$x_{vi} + x_{uj} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in E, (i, j) \in I \quad (17)$$

$$z_{uvk} \geq \sum_{k' \in K, k' \neq k} x_{vk'} - \sum_{k' \in K, k' \neq k} x_{uk'} \quad \forall (u, v) \in E, k \in K \quad (18)$$

$$x_{vk} \leq w_k \quad \forall v \in V, k \in K \quad (19)$$

$$x_{vk}, z_{uvk} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, k \in K, u, v \in E \quad (20)$$

Условие (16) означает, что каждая вершина должна быть покрашена в какой-то один цвет. Корректность раскраски обеспечивается условием (17): если смежные вершины будут покрашены в несовместимые цвета, то сумма переменных в левой части соотношения будет равна двум.

Условия (18) задаются для каждого ребра. Переменная в левой части должна быть равна 1, если вершина  $u$  покрашена в цвет  $k$ . Первая сумма в правой части обращается в 1 только в том случае, когда  $v$  покрашена в цвет, отличный от  $k$ . Вторая сумма равна нулю только при условии, что  $u$  покрашена в цвет  $k$ . Таким образом, выражение справа имеет значение 1 тогда и только тогда, когда  $u$  покрашена в  $k$ , а  $v$  — в любой другой цвет. В этом случае  $z_{uvk}$  обязательно будет равно единице. Избежать тождественного равенства единице всех переменных  $z$  — в этом случае ограничения (18) выполняются — позволяет второе слагаемое целевой функции (15).

Условие (19) требует, чтобы переменная  $w_k$  была равна единице, если цвет присутствует в раскраске. Случай тождественного равенства единице всех переменных  $w$  исключается первым слагаемым целевой функции.

Фиксированные цвета вершин (вершин, соответствующих полигонам  $P_w^c$ ) могут быть заданы ограничениями вида

$$x_{vk} = 1 \quad \forall (v, k) \in Fix \subseteq V \times K, \quad (21)$$

где  $Fix$  — начальная (частичная) раскраска графа.

**Направления углубления бассейна.** Некоторые вершины могут быть объединены в последовательности, соответствующие направлениям углубления бассейна. Вычисление этих направлений описано в разделе 3.3.

**Критерии качества.** Задача (15)-(20) позволяет находить корректные раскраски с минимальным количеством цветов. Множества  $K$  и  $I$  могут быть построены из цепочек  $\mathcal{F}$ :

$$K — \text{все фации}, I = \{(f_1, f_2) \in K \times K \mid \forall ch \in \mathcal{F} \langle f_1, f_2 \rangle \notin ch\},$$

то есть  $I$  состоит из пар фаций, которые не встречаются в цепочках подряд. Среди множества корректных раскрасок требуется выбрать «хорошую». Используются следующие критерии качества.

- Минимизация количества смен цветов.
- Минимизация количества цепочек, цвета которых используются для раскраски вдоль направления углубления бассейна.
- Сохранение площади, занятой некоторым цветами (фациями-исключениями).
- Выбор цветов вершины из некоторого множества («подсказок»).

Следует отметить, что формального определения «хорошей» раскраски нет. Оценка качества определяется экспертом, и возможный сценарий использования алгоритма построения карты предполагает её дальнейшую модификацию пользователем. Перечисленные формальные критерии для набора тестовых примеров приводят к построению карт, требующих минимальной коррекции.

**Структура целевой функции.** Для оптимизации с упорядоченным по важности набором критериев  $g_1, \dots, g_k$  целевая функция может быть задана в виде  $c_1g_1 + c_2g_2 + \dots + c_kg_k$ , где весовые коэффициенты выбраны таким образом, что оптимальное решение будет иметь минимальное значение  $g_1$ . Если с таким значением существует несколько корректных раскрасок, то из них будет выбрана раскраска с минимальным значением  $g_2$ , и так далее.

### 3.3. Направления углубления бассейна

Последовательности скважин, свидетельствующие о предполагаемом направлении углубления бассейна, строятся следующим образом. По исходным скважинам  $W$  строится граф  $G_w$ , вершинами которого служат

скважины, и каждая вершина соединена с  $h = 3$  ближайшими. Весом ребра является геометрическое расстояние между вершинами. Из множества скважин выделяются фациальные метки с наименьшими и наибольшими значениями скорости осадконакопления (в реализации используется фиксированная последовательность углубления, от меток с меньшими номерами к меткам с большими номерами). Далее в графе  $G_w$  выбираются пары вершин  $(u, v)$ , для которых выполняются следующие условия:

- вершина  $v$  имеет метку наибольшей скорости осадконакопления;
- геометрическое расстояние  $\text{dist}(w(u), w(v))$  «мало отличается» от длины кратчайшего пути  $\text{len}(sp(u, v))$ ;
- геометрическое расстояние  $\text{dist}(w(u), w(v))$  «сравнимо» с диаметром графа.

То есть направление углубления представляет собой достаточно длинную и прямую цепочку скважин.

Условия на расстояния определяются пороговым значением  $F_\beta$  меры ( $\beta = 2$ ) между отклонением длины пути от расстояния и отношения длины пути к максимальному расстоянию между вершинами графа:

$$st = \frac{\text{len}(sp(u, v))}{\text{dist}(u, v)} \quad (22)$$

$$d = \frac{\text{dist}(u, v)}{\max_{u', v' \in V} \text{dist}(u', v')} \quad (23)$$

$$f_2 = \frac{(1 + \beta^2)st \cdot d}{\beta^2 st + d} \quad (24)$$

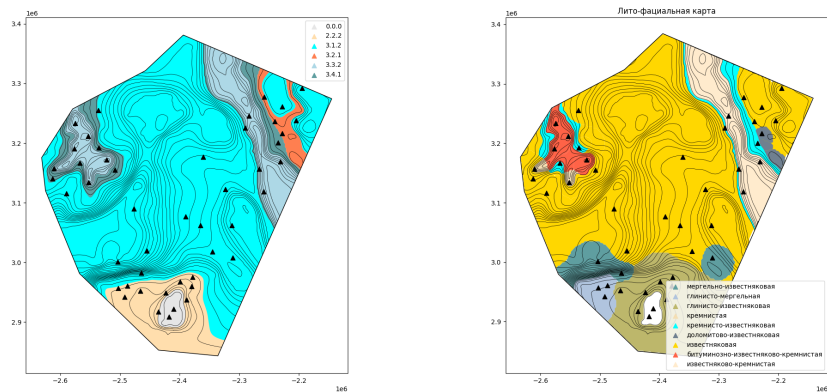
На карту добавляется  $k = 5$  лучших (по значению  $f_2$ ) путей, которые образуют потенциальные направления углубления бассейна.

## 4. Построение литофациальных карт $\mathcal{M}$

Карта  $\mathcal{M}$  получается разбиением карты  $\mathcal{M}_F$ . Пример литофациальной карты приведен на рис. 2.

По скважинам с литологией методом радиальных базисных функций строится карта распространения литологий  $\mathcal{M}_L : L \rightarrow 2^{Poly}$ . Эта карта дает разбиение полигона распространения  $\bar{P}$ . Далее производится измельчение карты  $\mathcal{M}_F$ , то есть вычисляются все полигоны, для которых однозначно задана фация и литология:

$$\mathcal{P}_{lf} = \{P \in Poly \mid \exists f \in F, l \in L, P_f \in \mathcal{M}_F(f), P_l \in \mathcal{M}_L(l) \quad P = P_f \cap P_l\}, \quad (25)$$



(a) Карты распространения фаций. (b) Карта распространения литологий.

Рис. 2. Пример литофациальной карты (отражены области распространения литологии).

то есть все полигоны литологий пересекаются с всем полигонами фаций. По построению, в каждом полигоне этого множества могут встречаться скважины только с одной комбинацией фация-литология, поэтому  $P$  будем называть  $lf$ -полигоном.

Каждому литофациальному  $lf$ -полигону  $P \in \mathcal{P}_{lf}$  требуется сопоставить литологическую метку — скорректировать границы распространения литологий. Используются следующие критерии:

- если в  $P$  есть скважина с меткой  $l$ , то эта метка приписывается полигону;
- если в  $P$  нет скважин, но он граничит с полигоном, которому приписана метка  $l$ , и литология  $l$  является допустимой для фации  $f$ , то метка  $l$  «продлевается» на  $P$ ;
- в остальных случаях полигону приписывается значение литологии из ближайшей скважины фациального полигона  $P_f$ , содержащего  $P$  (в обозначениях (25)).

Назначение меток производится в три просмотра полигонов из  $\mathcal{P}_{lf}$ .

## 5. Техническая реализация

Для решения задач смешанного целочисленного программирования существует целый ряд программных систем, как коммерческих (например,

Gurobi и CPLEX), так и свободно распространяемых. Для реализации использовался язык Python и следующее программное обеспечение:

- `contourpy`: библиотека построения изолиний;
- `shaply`: библиотека для работы с полигонами и другими геометрическими объектами;
- `ruomo`: среда алгебраического моделирования, позволяющая формулировать задачи целочисленного программирования без привязки к конкретному пакету их решения;
- `highs`: пакет для решения задач смешанного целочисленного программирования.

Тестирование проводилось на данных нескольких реальных объектов, для которых известны литофациальные карты, подготовленные экспертами-геологами. Каждый объект содержал несколько десятков скважин, что, в свою очередь, приводит к графам с несколькими десятками вершин. При решении оптимизационной задачи использовалось ограничение по времени равное 60 секундам — по истечении этого времени пакет `Highs` возвращает лучшее решение, которое было найдено. В рассматриваемых примерах за отведённый интервал времени на персональном компьютере пользовательского уровня удавалось найти оптимальное решение задачи. Ограничение в 60 секунд считается допустимым с прикладной точки зрения.

## 6. Заключение

Задача построения литофациальных карт сводится к задаче раскраски графа, которая в данной работе решается методами целочисленного программирования. При построении карт по реальным данным этот подход показал высокую эффективность. В случае, когда особенность карты скоростей приводит к большому числу полигонов  $P_w$  и сложной топологической структуре графа, более эффективными могут оказаться методы раскраски на основе отложенной генерации столбцов [8].

Следует отметить, что предложенный подход имеет ряд ограничений, среди которых можно отдельно выделить полноту и качество исходных данных, масштаб картопостроения и реконструкции в складчато-надвиговых областях. Данное ограничения связано с заложенным в алгоритм принципом распределения литофаций вдоль направления углубления бассейна. В складчато-надвиговых зонах происходит деформационные процессы, которые изменяют первичное положение пород в пространстве и нарушают их взаимное расположение, заложенное в процессе осадконакопления.

Полученные результаты могут быть использованы для палеогеографических реконструкций, прогнозирования распространения различных элементов УВ-систем, в качестве входных параметров для бассейнного моделирования, а также для определения поисковых признаков.

## Список литературы

- [1] Кузнецов, В.Г., *Фацции и фациальный анализ в нефтегазовой геологии*, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012.
- [2] Наливкин Д.В., *Учение о фациях*, 1-2, 1955–56.
- [3] Алексеев В.П., *Литолого-фациальный анализ*, 2002.
- [4] Тимофеев П.П., Рединг Х., *Обстановки осадконакопления и фацции*, 1990.
- [5] Kuhn, S., Cracknell, M. J., Reading, A. M., “Lithologic mapping using Random Forests applied to geophysical and remote-sensing data: A demonstration study from the Eastern Goldfields of Australia”, *Geophysics*, **83**:4 (2018), B183–B193.
- [6] Vasuki, Y., Holden, E. J., Kovesi, P., Micklethwaite, S., “An interactive image segmentation method for lithological boundary detection: A rapid mapping tool for geologists”, *Computers & Geosciences*, 2017, №100, 27–40.
- [7] Peyghambari, S., Zhang, Y., “Hyperspectral remote sensing in lithological mapping, mineral exploration, and environmental geology: an updated review”, *Journal of Applied Remote Sensing*, **15**:3 (2021), 031501.
- [8] Gualandi S., Malucelli F., “Exact solution of graph coloring problems via constraint programming and column generation”, *INFORMS Journal on Computing*, **24**:1 (2012), 81–100.
- [9] Jabrayilov A., Mutzel P., “New integer linear programming models for the vertex coloring problem”, LATIN 2018: Theoretical Informatics: 13th Latin American Symposium (Buenos Aires, Argentina, April 16-19, 2018, Proceedings 13), 2018, 640–652.

**Automated construction of realistic lithofacies maps using  
combinatorial optimization methods**

**Antonov A.P., Afonin S.A., Kozitsyn A.S., Staroverov V.M.,  
Stupakova A.V., Suslova A.A., Zavyalova A.P., Chupakhina V.V.,  
Sautkin R.S., Osipov S.V.**

Lithofacies maps display spatial changes in the lithological composition of rocks and the direction of their replacement characteristics for a certain geological time depending on the physical and geographical conditions of their sedimentation. Lithofacies maps are constructed based on the analysis of complexes of genetically related deposits with characteristic material features of lithofacies. The initial data can be either *only* points on a plane — well coordinates where certain lithofacies occur — or *additionally* a map of sediment accumulation rates. It is assumed that identical facies should have similar sedimentation rates. The task of constructing a lithofacies map is to determine the boundaries of facies distribution areas. The paper proposes to reduce the map construction problem to the graph coloring problem, which in turn is solved using integer linear programming methods. This approach allows us to automatically construct realistic maps — that is, maps that satisfy expert constraints and rules.

**Keywords:** paleo-reconstruction; lithofacial mapping; optimization; integer programming

## References

- [1] Kuznetsov V.G., *Facies and facies analysis in petroleum geology*, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, 2012 (In Russian).
- [2] Nalivkin D.V., *The doctrine of facies*, 1955–56 (In Russian).
- [3] Alekseev V.P., *Lithofacies analysis*, 2002 (In Russian).
- [4] Timofeev P.P., Reading H., *Depositional environments and facies*, 1990 (In Russian).
- [5] Kuhn, S., Cracknell, M. J., Reading, A. M., “Lithologic mapping using Random Forests applied to geophysical and remote-sensing data: A demonstration study from the Eastern Goldfields of Australia”, *Geophysics*, **83**:4 (2018), B183–B193.
- [6] Vasuki, Y., Holden, E. J., Kovesi, P., Micklethwaite, S., “An interactive image segmentation method for lithological boundary detection: A rapid mapping tool for geologists”, *Computers & Geosciences*, 2017, № 100, 27–40.
- [7] Peyghambari, S., Zhang, Y., “Hyperspectral remote sensing in lithological mapping, mineral exploration, and environmental geology: an updated review”, *Journal of Applied Remote Sensing*, **15**:3 (2021), 031501.

- [8] Gualandi S., Malucelli F., “Exact solution of graph coloring problems via constraint programming and column generation”, *INFORMS Journal on Computing*, **24**:1 (2012), 81–100.
- [9] Jabrayilov A., Mutzel P., “New integer linear programming models for the vertex coloring problem”, *LATIN 2018: Theoretical Informatics: 13th Latin American Symposium (Buenos Aires, Argentina, April 16-19, 2018, Proceedings 13)*, 2018, 640–652.