Быстрые алгоритмы умножения и деления натуральных чисел с помощью клеточных автоматов с локаторами

Э. Э. Гасанов[1], Б. Ф. Хайбуллин[2]

Для умножения и деления n-значных натуральных чисел известны алгоритмы со сложностью порядка $n^{\log_2 3}$ и даже порядка $n^{\log n}$. В данной работе предложен алгоритм умножения n-значных натуральных чисел за $2n+2$ такта. Здесь под значностью числа a понимается число $]\log_2 a[$. Для деления натуральных чисел с остатком предложен алгоритм с временем работы $3n+8$ тактов, где n — значность частного. Предложенные алгоритмы в качестве вычислителей используются двумерные клеточные автоматы с локаторами.

Ключевые слова: умножение натуральных чисел, деление натуральных чисел, клеточные автоматы с локаторами.

Введение

Пусть a и b два натуральных числа, двоичная запись которых содержит по порядку n разрядов. Наиболее известный и быстрый алгоритм умножения таких чисел был предложен А.А.Карацубой [1], и он имеет сложность $O(n^{\log_2 3})$. Более быстрым по порядку алгоритмом умножения, является алгоритм Шёнхаге-Штрассена [2]. Его сложность $O(n \cdot \log n \cdot \log\log n)$. Но на практике алгоритм Шёнхаге-Штрассена быстрее алгоритма Карацубы, только если значность числа более 10 тысяч. Еще более быстрым по порядку является алгоритм Фюрера [3], но его преимущество может проявится при значности чисел более 10^{13}. Относительно недавно появился алгоритм Харвея-Хоевена [4] со сложностью $O(n \log n)$.

Для деления натуральных чисел с остатком известен алгоритм Бурникеля-Циглера [5]. Он использует внутри себя алгоритм умножения. Если в качестве алгоритма умножения взять алгоритм Карацубы, то вычислительная сложность алгоритма Бурникеля-Циглера будет $O(n^{\log_2 3})$, а если использовать алгоритм Шёнхаге-Штрассена, то сложность алгоритма Бурникеля-Циглера будет $O(n \cdot \log^2 n \cdot \log\log n)$.

[1] *Гасанов Эльяр Эльдарович* — зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru.

Gasanov Elyar Eldarovich — Head of Chair Mathematical Theory of Intellegent Systems, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

[2] *Хайбуллин Бакир Фаридович* — ведущий программист в ООО "Elius", г. Ташкент, Узбекистан, e-mail: bakir_k@mail.ru.

Khaybullin Bakir Faridovich — lead programmer at Elius LLC, Tashkent, Uzbekistan.

В данной работе предлагаются алгоритмы решения задач умножения и деления с остатком n-значных натуральных чисел с помощью клеточных автоматов с локаторами.

Приведем неформальное описание двумерного клеточного автомата с локаторами.

Расположим в каждой клетке плоской решетки $\mathbb{Z}^2$ один и тот же автомат с локаторами. Понятие локатора определим чуть позже, сейчас важно, что каждый локатор в каждый момент принимает некоторое значение. Автомат имеет функцию перехода, которая по состоянию соседей автомата и по значениям локаторов в текущей момент определяет состояние автомата в следующий момент. Кроме того, у автомата есть функция вещания, которая по состояниям соседей автомата и по значениям локаторов вычисляет сигнал вещания, который передается в эфир. Сигналы вещания образуют конечную аддитивную коммутативную полугруппу, а эфир представляет собой потенциально бесконечный сумматор сигналов элементарных автоматов, где в качестве оператора суммы выступает определяющая операция данной полугруппы. Каждый локатор представляет собой некоторый телесный угол с вершиной в позиции автомата, а значением локатора в текущий момент является сумма сигналов вещания всех автоматов, попадающих в этот телесный угол. Отметим, что в область суммирования локатора не входит вершина телесного угла. т.е. мы сигнал вещания, посылаемый данным автоматом, не включаем в сумму.

В наших алгоритмах будут использоваться один полный локатор, который представляет собой двумерную плоскость с выколотым началом координат, и 8 локаторов, представляющих собой лучи, направленные на север, северо-восток, восток, юго-восток, юг, юго-запад, запад и северо-запад.

В работе показано, что с помощью таких двумерных клеточных автоматов с локаторами можно решить задачу умножения и деления n-разрядных чисел за время порядка n.

Ранее похожий алгоритм умножения был доложен на конференции [6].

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Понятие клеточного автомата с локаторами введено в работе Э. Э. Гасанова [7]. В работе Г. В. Калачева [8] были выявлены некоторые неточности, приведенного в [7] определения. Точное формальное определение клеточного автомата с локаторами можно найти в работах Д. Э. Ибрагимовой [9] и Э. Э. Гасанова [10]. Здесь мы не будем приводить это определение, а дадим определение двумерного клеточного автомата с

9 локаторами, с помощью которого задачу умножения и деления чисел можно решить за линейное время.

В общем случае локатор — это телесный угол, границы которого являются частями гиперплоскостей, задаваемых линейными уравнениями с целыми коэффициентами. В нашем случае мы будем рассматривать множество из 9 телесных углов

$$L = \{\Omega, \mathcal{N}, \mathcal{NE}, \mathcal{E}, \mathcal{SE}, \mathcal{S}, \mathcal{SW}, \mathcal{W}, \mathcal{NW}\}, \tag{1}$$

где $\Omega = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — называется полным, $\mathbb{Z}^2$ — множество двумерных векторов с целыми координатами, $\mathcal{N} = \{(x,y) : x = 0, y > 0\}$ — назовем "север", $\mathcal{NE} = \{(x,y) : y = x, x > 0\}$ — назовем "северо-восток", $\mathcal{E} = \{(x,y) : y = 0, x > 0\}$ — назовем "восток", $\mathcal{SE} = \{(x,y) : y = -x, x > 0\}$ — назовем "юго-восток", $\mathcal{S} = \{(x,y) : x = 0, y < 0\}$ — назовем "юг", $\mathcal{SW} = \{(x,y) : y = x, x < 0\}$ — назовем "юго-запад", $\mathcal{W} = \{(x,y) : y = 0, x < 0\}$ — назовем "запад", $\mathcal{NW} = \{(x,y) : y = -x, x < 0\}$ — назовем "северо-запад".

Двумерным клеточным автоматом с 9 локаторами называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}^2, Q, V, G, +, L, \varphi, \psi)$, где Q — некоторое конечное множество, называемое *множеством состояний*; в множестве Q выделено одно состояние q_0, называемое *состоянием покоя*; $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных векторов из $\mathbb{Z}^2$; G — некоторое конечное множество, "+" — операция на G такая, что $(G, +)$ —коммутативная полугруппа с нейтральным элементом $e \in G$; L — упорядоченный набор телесных углов, задаваемых выражением (1); φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_0, z_1, \ldots, z_8$; $\varphi : Q^h \times G^9 \to Q$, $\varphi(q_0, e) = q_0$; $q_0 = (q_0, \ldots, q_0) \in Q^h$, $e = (e, \ldots, e) \in G^9$; ψ — функция зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_0, z_1, \ldots, z_8$; $\psi : Q^h \times G^9 \to G$; $\psi(q_0, e) = e$. Элементы множества $\mathbb{Z}^2$ называются *ячейками* клеточного автомата σ; элементы множества Q называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ; элементы множества G называются *сигналами вещания*; набор L называется *шаблоном локаторов* клеточного автомата σ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ; переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ принимают значения из Q, переменные $z_0, z_1, \ldots, z_8$ принимают значения из G. Состояние q_0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(q_0, e) = q_0$ — как *условие сохранения состояния покоя*. Ячейки, находящиеся в состоянии отличном от q_0, будем называть *активными*. Условие $\psi(q_0, e) = e$ означает, что ячейка в состоянии покоя, не имеющая активных соседей и не получающая сигналов из эфира посылает в эфир нейтральный элемент, что можно интерпретировать как то, что она не посылает сигналы в эфир.

Здесь нам нужно было вводить упорядочение шаблона соседства V и шаблона локаторов L для того, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между векторами из V и телесными углами из L и переменными локальной функции переходов φ и функции вещания ψ соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ и $z_0, z_1, \ldots, z_8$. Это соответствие можно сделать более явным, если индексировать переменные функций φ и ψ самими векторами и телесными углами, т.е. считать, что локальная функция переходов φ и функции вещания ψ зависят от переменных $x_0, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{h-1}}, z_\Omega, z_\mathcal{N} \ldots, z_{\mathcal{NW}}$, здесь индекс первой переменной есть нулевой вектор $0 = (0,0) \in \mathbb{Z}^2$. Если договориться так индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания, то их можно записывать в любом порядке, и тогда можно воспринимать шаблон соседства и шаблон локаторов как просто множества, а не упорядоченный набор. В дальнейшем мы будем индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания векторами из шаблона соседства и телесными углами из шаблона локаторов.

При этом мы часто будем опускать в индексах внешние круглые скобки у векторов. Например, если $h = 2$, $q = 2$ и $V = \{(-1,0),(1,0)\}$, то пример локальной функции переходов может выглядеть так: $\varphi = x_{-1,0} \& z_\Omega \vee x_{1,0} \& z_\mathcal{N}$.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ и ν — телесный угол из L, то через $\nu(\alpha)$ обозначим телесный угол, полученный параллельным переносом телесного угла ν на вектор α, т.е. вершиной телесного угла $\nu(\alpha)$ является точка α.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ — ячейка клеточного автомата σ, то множество $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α, а множество $L(\alpha) = \{\Omega(\alpha), \mathcal{N}, \ldots, \mathcal{NW}(\alpha_m)\}$ называется *локаторами ячейки* α.

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовем пару (g, f), где g — произвольная функция, определенная на множестве Z^2, принимающая значения из G, называемая *состоянием эфира*, f — произвольная функция, определенная на множестве Z^2, принимающая значения из Q и называемая *распределением состояний клеточного автомата с локаторами* σ. Такую пару функций можно интерпретировать как некую мозаику, получающуюся в двумерном пространстве приписыванием каждой точке с целочисленными координатами некоторого сигнала из G и некоторого состояния из Q. Множество всевозможных состояний клеточного автомата с локаторами обозначим Σ.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, (g, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ, то значение $g(\alpha)$ назовем *сигналом ячейки* α, определяемым состоянием (g, f), а значение $f(\alpha)$ — *состоянием ячейки* α, определяемым состоянием (g, f).

Для каждого $\nu \in L$

$$s_\nu(\alpha) = \sum_{\beta \in \nu(\alpha) \cap \mathbb{Z}^2} g(\beta) \tag{2}$$

назовем *значением локатора* ν, определяемым состоянием (g, f). Здесь суммирование сигналов осуществляется с помощью определяющей операции $+$ полугруппы G. Отметим, что в формулах (2) используются формально бесконечные суммы, и, чтобы они были определены, мы либо будем считать, что только конечное число слагаемых в суммах отлично от нейтрального элемента, либо предположим, что полугруппа $(G, +)$ является идемпотентным моноидом, т.е. для любого $h \in G$ выполнено $h + h = h$.

На множестве Σ определим *глобальную функцию переходов* Φ_σ клеточного автомата с локаторами σ, полагая $\Phi_\sigma(g, f) = (g', f')$, где $(g, f), (g', f') \in \Sigma$ и для любой ячейки $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ выполняются тождества

$$f'(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_\Omega(\alpha), s_\mathcal{N} \ldots, s_{\mathcal{N}\mathcal{W}}(\alpha)), \tag{3}$$

$$g'(\alpha) = \psi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_\Omega(\alpha), s_\mathcal{N} \ldots, s_{\mathcal{N}\mathcal{W}}(\alpha)). \tag{4}$$

Содержательная интерпретация отображения Φ_σ такова, что сигнал каждой ячейки и состояние каждой ячейки "после перехода" определяется по состоянию упорядоченной окрестности ячейки и по значениям локаторов "до перехода" с помощью законов φ и ψ одинаково для всех ячеек.

Поведениями клеточного автомата с локаторами σ назовем такие последовательности $(g_0, f_0), (g_1, f_1), (g_2, f_2), \ldots$ его состояний, для которых выполняется $(g_{i+1}, f_{i+1}) = \Phi_\sigma(g_i, f_i)$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, причем (g_i, f_i) называется *состоянием клеточного автомата с локаторами* σ *в момент* i, а (g_0, f_0) называется *начальным состоянием клеточного автомата с локаторами* σ.

Состояние клеточного автомата, у которого лишь конечное число ячеек находится в отличном от состояния покоя g_0, и сигналы лишь конечного числа ячеек не равны нейтральному элементу e, назовем *конфигурацией*. Множество конфигураций будем обозначать через Σ'.

Определим задачу умножения чисел a и b для клеточного автомата с локаторами. В начальной конфигурации только 3 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать “начало координат”, ячейка с координатами $(a, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать “первый сомножитель”, а ячейка с координатами $(0, b)$ находится в состоянии, которое можно назвать “второй сомножитель”. Клеточный автомат решает задачу умножения чисел, если в финальной

конфигурации ячейка с координатами $(a \cdot b, 0)$ перейдет в состояние "результат умножения", а все остальные ячейки, кроме $(0, 0)$, перейдут в состояние покоя.

Справедлива следующая теорема, доказанная Э. Э. Гасановым.

Теорема 1. *Существует двумерный клеточный автомат с 9 локаторами, который решает задачу умножения чисел a и b за время* $2]\log_2 a[+2$.

Здесь если x — вещественное число, то $]x[$ — это наименьшее целое неменьшее чем x.

Определим задачу деления чисел a и b с остатком для клеточного автомата с локаторами. В начальной конфигурации только 3 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать "начало координат", ячейка с координатами $(a, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать "делимое", а ячейка с координатами $(0, b)$ находится в состоянии, которое можно назвать "делитель". Пусть $c = \lfloor a/b \rfloor$ — целая часть от деления a на b, $d = a \mod b$ — отстаток от деления a на b. Клеточный автомат решает задачу деления чисел, если в финальной конфигурации ячейка с координатами $(c, 0)$ перейдет в состояние "частное", ячейка с координатами $(0, d)$ перейдет в состояние "остаток", а все остальные ячейки, кроме $(0, 0)$, перейдут в состояние покоя.

Справедлива следующая теорема, доказанная Б. Ф. Хайбуллиным.

Теорема 2. *Существует двумерный клеточный автомат с 9 локаторами, который решает задачу деления чисел a и b с остатком за время* $3]\log_2(a/b)[+8$.

2. Вспомогательные задачи

2.1. Удвоение числа

Задача удвоения числа a и b состоит в следующем. В начальной конфигурации только 2 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии "начало координат", а ячейка с координатами $(a, 0)$ находится в состоянии "аргумент". Надо, чтобы в финальной конфигурации ячейка с координатами $(2a, 0)$ перешла в состояние "результат", а все остальные ячейки, кроме $(0, 0)$, оказались в состоянии покоя.

Решить эту задачу можно следующим образом. В начальный момент "начало координат" и "аргумент" подают в эфир сигнал "такт 1". Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы юг и юго-восток (а это ячейка

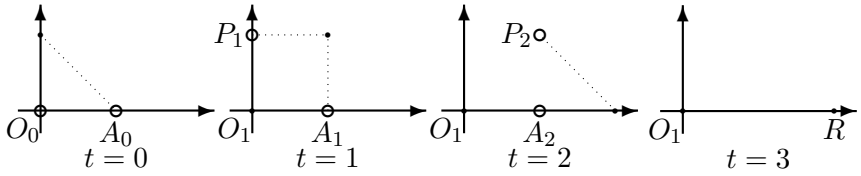


Рисунок 1. Первый алгоритм удвоения чисел

с координатами $(0, a)$) возбуждается и переходит в состояние “проекция 1”. Во второй момент “проекция 1” и “аргумент” подают в эфир сигнал “такт 2”. Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и юг (а это ячейка с координатами (a, a)), возбуждается и переходит в состояние “проекция 2”. В третий момент ячейки “проекция 2” и “аргумент” подают в эфир сигнал “такт 3”. Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и северо-запад (а это ячейка с координатами $(2a, 0)$) возбуждается и переходит в состояние “результат”. Т.е. задача решается за 3 такта.

Схематически этот алгоритм отражен на рисунке 1. Здесь ячейки, подающие сигнал в эфир, изображены полыми кружками, “начало координат” обозначается символами O с индексами, “аргумент” — символами A с индексами, “проекции” — символами P с индексами, “результат” — символом R.

Когда на каждой итерации надо удваивать число, то задачу удвоения числа удобнее сформулировать следующим образом. В начальной конфигурации только 3 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии “начало координат”, а две ячейки с координатами $(a, 0)$ и $(0, a)$ находятся в состоянии “аргумент”. Надо, чтобы в финальной конфигурации ячейки с координатами $(2a, 0)$ и $(0, 2a)$ перешли в состояние “результат”, а все остальные ячейки, кроме $(0, 0)$, оказались в состоянии покоя.

Решить эту задачу можно следующим образом. В начальный момент ячейки “аргумент”подают в эфир сигнал “такт 1”. Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и юг (а это ячейка с координатами (a, a)), возбуждается и переходит в состояние “проекция”. Во второй момент ячейки “проекция” и “аргумент” подают в эфир сигнал “такт 2”. Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и северо-запад (а это ячейка с координатами $(2, 0)$) и ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы юг и юго-восток (а это ячейка с координатами $(0, 2a)$) возбуждаются и переходят в состояние “результат”. Тем самым в такой постановке задача решается за 2 такта.

Схематически этот алгоритм отражен на рисунке 2.

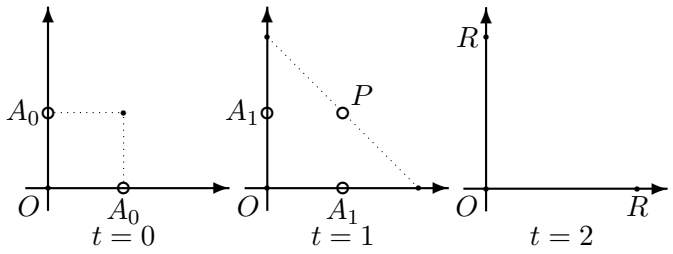


Рисунок 2. Второй алгоритм удвоения чисел

2.2. Сложение чисел

Задача сложения состоит в следующем. Дано два целых числа a и b, причем $a \geq 0$, а $b > 0$. В начальной конфигурации только 3 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии "начало координат", а две ячейки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$ находятся в состоянии "слагаемое 1" и "слагаемое 2". В случае, когда $a = 0$, ячейка $(0, 0)$ будет одновременно находиться в состояниях "начало координат" и "слагаемое 1". Чтобы это сделать можно ввести еще одно состояние, или можно считать, что "начало координат" отмечается в отдельной компоненте состояния. Надо, чтобы в финальнойв состояниях конфигурации ячейка с координатами $(a + b, 0)$ перешла в состояние "результат", ячейка $(0, 0)$ осталась в состоянии "начало координат", а все остальные ячейки оказались в состоянии покоя.

Решить эту задачу можно следующим образом. В начальный момент ячейки "слагаемое 1" и "слагаемое 2" подают в эфир сигнал "такт 1". Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и юг (а это ячейка с координатами (a, b)), возбуждается и переходит в состояние "проекция". Также в состояние "проекция" переходит ячейка "слагаемое 2", если услышит сигнал "такт 1" в локатор "юг" (это нужно для случая, когда $a = 0$). Ячейка "слагаемое 2", которая не слышит сигнал "такт 1" в локатор "юг", переходит в состяние покоя. Ячейка "слагаемое 1", если слышит сигнал "такт 1" в локаторы "северо-запад" или "север", переходит в состояние "слагаемое 3", а иначе остается в прежнем состоянии. Во второй момент ячейки "проекция" и "слагаемое 3" подают в эфир сигнал "такт 2". Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы запад и северо-запад (а это ячейка с координатами $(a + b, 0)$) возбуждается и переходит в состояние "результат". При этом "слагаемое 3" переходит в состояние покоя. Ячейка "начало координат" оба такта не меняет своего состояния.

Тем самым задача сложения чисел решается за 2 такта.

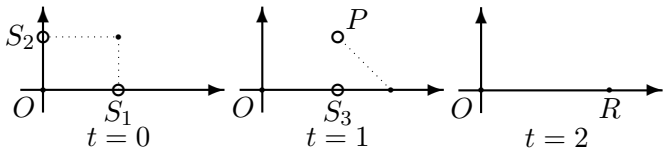


Рисунок 3. Сложение чисел

Схематически этот алгоритм для случая, когда $a > 0$, отражен на рисунке 3. На этом рисунке состояние "начало координат" обозначено символом O, "слагаемое 1" — символом S_1, "слагаемое 2" — S_2, "слагаемое 3" — S_3, "проекция" — P.

Отметим, что если в начальной конфигурации есть ячейка в состоянии "слагаемое 1", но нет ячейки в состоянии "слагаемое 2", то ячейка "слагаемое 1" не будет менять своего состояния.

2.3. Перевод числа из унарного представления в двоичное

Пусть a — натуральное число, $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ — двоичное представление числа a. Задача перевода числа из унарного представления в двоичное формулируется следующим образом. В начальной конфигурации в активном состоянии находится $n + 1$ ячейка: ячейка $(0, 0)$ — в состоянии "начало координат" и ячейки $(1, 0), (2, 0), \ldots, (n, 0)$ — в состоянии "один". Задача состоит в том, чтобы в такты с первого по n-ый выдавать в эфир сигнал "ноль", если $a_i = 0$, и сигнал "единица", если $a_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При этом в финальной конфигурации активной остается только "начало координат". Здесь первым тактом считается такт следующий после начального.

Точное решение это задачи приведено в работах [10, 11]. Здесь, как и ранее, мы опишем алгоритм решения на идейном уровне.

Алфавит вещания будет иметь вид $G = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$. Полугрупповой операцией по первой компоненте будет сложение по модулю 2, а по второй и третьей — максимум. Первая компонента будет использоваться для вычисления чисел a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вторая компонента — для выявления момента окончания вычислений, а третья компонента — для передачи ответа. Состояние покоя будем обозначать как состояние "ноль". Алгоритм решения задачи будет следующий.

1) В каждый такт все ячейки, которые находятся в состоянии "один" передают в эфир сигнал $(1, 1, 0)$.

2) Ячейка в состоянии “один”, которая в локатор “восток” получает сигнал $(0, *, *)$, переходит в состояние “ноль”. Здесь $*$ означает любой символ. Во всех остальных случаях ячейка не меняет состояние.

3) Если ячейка “начало координат” в локатор “восток” получает сигнал $(0, 1, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 0)$, что соответствует сигналу “ноль”.

4) Если ячейка “начало координат” в локатор “восток” получает сигнал $(1, 1, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 1)$, что соответствует сигналу “единица”.

5) Если ячейка “начало координат” в локатор “восток” получает сигнал $(0, 0, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 2)$, что соответствует окончанию передачи двоичного представления числа.

Поскольку согласно пункту 1 каждая ячейка в состоянии “один” передает в эфир по первой компоненте значение 1, то “начало координат” получит в локатор “восток” по первой компоненте сумму по модулю 2 количества ячеек в состоянии “один”, а это в первый момент равно a_1. Второй пункт гарантирует, что каждый такт число ячеей в состоянии “один” будет сокращаться вдвое, поэтому во второй такт “начало координат” получит в локатор “восток” по первой компоненте получит значение a_2 и т.д. Если “начало координат” получит в локатор “восток” по второй компоненте получит значение 0, то это означает, что ячеек в состоянии “один” больше не осталось, и можно завершать работу.

Отметим, что суммарное время работы алгоритма равно $n + 2$.

В таблице 1 приведено поведение описанного выше клеточного автомата с локаторами для случая, когда число $a = 5$. Здесь символом Q обозначается строка состояний ячеек, причем O соответствует состоянию “начало координат”, 0 — состоянию “ноль”, 1 — состоянию “один”; символом S обозначается строка посылаемых в эфир сигналов; символом E — строка значений локатора “восток”.

Координаты ячеек		$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$(5,0)$
$t=0$	Q	O	1	1	1	1	1
	S	$(0,0,2)$	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$
	E	$(1,1,0)$	$(0,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$
$t=1$	Q	O	0	1	0	1	0
	S	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$
	E	$(0,1,0)$	$(0,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
$t=2$	Q	O	0	1	0	0	0
	S	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
	E	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
$t=3$	Q	O	0	0	0	0	0
	S	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
	E	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
$t=4$	Q	O	0	0	0	0	0
	S	$(0,0,2)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$
	E	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$

Таблица 1. Перевод числа из унарного представления в двоичное

В такты 1, 2, 3 в третьей компоненте сигнала вещания мы можем наблюдать двоичное представление числа 5 — $(1,0,1)$.

Легко видеть, что приведенный клеточный автомат будет работать и в случае, когда ячейки в состоянии "один" будут стоять не подряд, а в любых положительных позициях оси абсцисс, и тогда автомат выдаст в эфир двоичное представление количества ячеек в состоянии "один", находящихся правее "начала координат".

Можем также заметить, что легко модифицировать этот автомат, чтобы он выдавал компоненты двоичного представления не каждый такт, а, например, через такт.

И наконец заметим, что аналогичным образом мы можем подсчитать число ячеек в состоянии "один", находящихся на любом из лучей из множества L.

2.4. Перевод числа из двоичного представления в унарное

Задача перевода числа из двоичного представления в унарное обратна к предыдущей задаче.

Сформулирована она может быть следующим образом. Пусть a — натуральное число, $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ — двоичное представление числа a. В начальной конфигурации в активном состоянии находится только ячейка $(0,0)$ в состоянии "начало координат 0". В такты с первого по n-ый ячейка $(0,0)$ выдает в эфир сигнал "ноль", если $a_i = 0$, и сигнал "единица", если $a_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В финальной конфигурации активными

должны остаться только ячейки $(0,0)$ (“начало координат 2”) и $(a,0)$ (“результат”).

Точное решение это задачи можно найти в работах [9, 10]. Приведем идею этого решения.

Алфавит вещания будет иметь вид $G = \{0,1\} \times \{0,1,2,3,4\}$. Полугрупповой операцией по первой компоненте будет сложение по модулю 2, а по второй — максимум. Первая компонента будет использоваться для вычисления числа a, вторая компонента — для передачи команд. Состояние покоя будем обозначать как состояние “ноль”. Алгоритм решения задачи будет следующий.

1) В начальный (нулевой) такт ячейка $(0,0)$ (“начало координат 0”) подает в эфир сигнал $(1,2)$, который можно интерпретировать как “начинаем”, и переходит в состояние “начало координат 1”. По команде “начинаем” все ячейки положительной полуоси оси абцисс (т.е. те, кто услышат этот сигнал в локатор “запад”) переходят в состояние “один”.

2) В следующие n тактов ячейка $(0,0)$ подает в эфир по второй компоненте сигнал a_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ($a_i = 0$ интерпретируется как сигнал “ноль”, а $a_i = 1$ — как “единица”). При этом на следующий такт после того, как в первый раз a_i окажется равным 1, ячейка $(0,0)$ перейдет в состояние “начало координат 2”, а до этого будет оставаться в состоянии “начало координат 1”. Поскольку число $a > 0$, к финальному состоянию ячейка $(0,0)$ обязательно окажется в состоянии “начало координат 2”. При этом “начало координат 1” по первой компоненте передает в эфир сигнал 1, а “начало координат 2” — сигнал 0.

3) Ячейки в состоянии “один”, если слышат в локатор “запад” по второй компоненте 0 или 1, то передают в эфир сигнал $(1,0)$, а ячейки в состоянии “ноль” — сигнал $(0,0)$.

4) Ячейка в состоянии “один” переходит в состояние “ноль”, если она получает в локатор “запад” сигнал, значение второй компоненты которого равно либо 0, либо 1, и оно не совпадает со значением первой компоненты сигнала.

5) В $(n+1)$-ый такт ячейка $(0,0)$ передает в эфир сигнал $(0,3)$, что означает окончание двоичной записи. В результате все ячейки в состоянии “один” переходят в состояние “два”.

6) В $(n+2)$-ый такт ячейка $(0,0)$ передает в эфир сигнал $(0,3)$, а все ячейки в состоянии “два” подают в эфир сигнал $(0,4)$. При этом

все ячейки в состоянии “два”, которые в локатор “запад” услышат сигнал $(0,4)$ перейдут на следующий такт в состояние “ноль”, а самая левая ячейка в состоянии “два” услышит в локатор “запад” сигнал $(0,3)$ и перейдет в состояние “результат”.

В таблице 2 приведено поведение описанного выше клеточного автомата с локаторами для случая, когда число $a = 5$. Здесь символом Q обозначается строка состояний ячеек, причем O_0, O_1, O_2 соответствует состоянию “начало координат 0”, “начало координат 1” и “начало координат 2”, 0 — состоянию “ноль”, 1 — состоянию “один”, 2 — состоянию “два”, R — состоянию “результат”; символом S обозначается строка посылаемых в эфир сигналов; символом W —строка значений локатора “запад”.

t		$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$(5,0)$	$(6,0)$	$(7,0)$	$(8,0)$	$(9,0)$	$(10,0)$	$(11,0)$	$(12,0)$	$(13,0)$
0	Q	O_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
	W	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,2)$
1	Q	O_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	S	$(1,1)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$
	W	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$
2	Q	O_2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	S	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$
	W	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
3	Q	O_2	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
	S	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$
	W	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$
4	Q	O_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	S	$(0,3)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$
	W	$(0,0)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,3)$
5	Q	O_2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
	S	$(0,3)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,4)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,4)$
	W	$(0,0)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$	$(0,4)$
6	Q	O_2	0	0	0	0	R	0	0	0	0	0	0	0	0
	S	$(0,3)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
	W	$(0,0)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$	$(0,3)$

Таблица 2. Перевод числа из двоичного представления в унарное

Будем условно считать, что состояние “начало координат 1” соответствует состоянию “один” для ячейки $(0,0)$, а состояние “начало координат 2” соответствует состоянию “ноль” для ячейки $(0,0)$. Тогда докажем по индукции, что если ячейка $(0,0)$ с первого по n-й такт по второй компоненте будет посылать в эфир последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то к $(n+1)$-му такту в состоянии “один” будут ячейки с координатами $(\sum_{i=1}^{n} 2^i a_i + 2^n k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Базис индукции. $n = 1$. На первом такте все ячейки неотрицательной полуоси оси абцисс, включая ячейку $(0,0)$, посылают в эфир сигнал 1 по первой компоненте. Поэтому все ячейки с координатами $(2k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (четные ячейки) получат в локатор “запад” по первой компоненте значение 0, а все ячейки с координатами $(2k+1, 0)$,

$k = 0, 1, 2, \ldots$ (нечетные ячейки) — значение 1. Следовательно, если $a_1 = 0$, то ко второму такту в состоянии "один" останутся четные ячейки, а если $a_1 = 1$, то — нечетные. Базис индукции доказан.

Индуктивный переход. Пусть ячейка $(0, 0)$ с первого по $(n-1)$-й такт по второй компоненте посылала в эфир последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, к n-му такту в состоянии "один" остались ячейки с координатами $(\sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_i + 2^{n-1}k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим $b = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_i$. Тогда все ячейки с координатами $(k, 0$, $k = 0, 1, \ldots, b$, получат на локатор "запад" по первой компоненте значение 0. Все ячейки с координатами $(k, 0$, $k = b+1, b+2, \ldots, b+2^{n-1}$, получат на локатор "запад" по первой компоненте значение 1. Опять все ячейки с координатами $(k, 0$, $k = b + 2^{n-1} + 1, b + 2^{n-1} + 2, \ldots, b + 2^n$, получат на локатор "запад" по первой компоненте значение 0 и т.д.

Пусть на n-м такте ячейка $(0, 0)$ посылает в эфир по второй компоненте значение a_n. Тогда если $a_n = 0$, то на $(n+1)$-м такте в состоянии "один" останутся ячейки с координатами $(b + 2^n k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если $a_n = 1$, то на $(n+1)$-м такте в состоянии "один" останутся ячейки с координатами $(b + 2^{n-1} + 2^n k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Индуктивный переход доказан.

Таким образом, если $= \sum_{i=1}^{n} 2^i a_i$, то к $(n+1)$-му такту самая левая ячейка в состоянии "один" будет иметь координаты $(a, 0)$, а значит на $(n+3)$-м такте в состояние "результат" перейдет ячейка $(a, 0)$, что мы и хотели получить.

Отметим, что суммарное время работы алгоритма равно $n + 3$.

Отметим, что аналогичным образом можно отложить значение a на ось ординат, т.е. чтобы в финальной конфигурации в состоянии "результат" оказалась ячейка $(0, a)$.

2.5. Задача подсчета числа единиц

Пусть в начальной конфигурации ячейка $(0, 0)$ находится в состоянии "начало координат" и на положительной полуоси оси абцисс разбросано некоторое конечное число ячеек в состоянии "один", а остальные ячейки находятся в состоянии покоя (состоянии "ноль"). Хочется подсчитать сколько ячеек находится в состоянии "один", и если их число равно a, то хочется в финальной конфигурации, чтобы ячейка $(0, a)$ перешла в состояние "результат".

Пусть двоичное представление числа a имеет вид $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$. Мы можем запустить алгоритм из раздела 2.3 и тогда, начиная с первого такта, ячейка $(0, 0)$ будет посылать в эфир последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Теперь, параллельно используя алгоритм из раздела 2.4, мы можем отложить число a на оси ординат.

Отметим, что суммарное время работы алгоритма равно $n + 3$, поскольку оба алгоритма работают такое время, работают параллельно и синхронно.

Решение этой задачи мы в дальнейшем используем при алгоритме деления.

3. Умножение чисел

Напомним задачу умножения чисел a и b для клеточного автомата с локаторами. В начальной конфигурации только 3 ячейки находятся не в состоянии покоя, а именно ячейка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать "начало координат", ячейка с координатами $(a, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать "первый сомножитель", а ячейка с координатами $(0, b)$ находится в состоянии, которое можно назвать "второй сомножитель". Клеточный автомат решает задачу умножения чисел, если в финальной конфигурации ячейка с координатами $(a \cdot b, 0)$ перейдет в состояние "результат умножения", а все остальные ячейки, кроме $(0, 0)$, перейдут в состояние покоя.

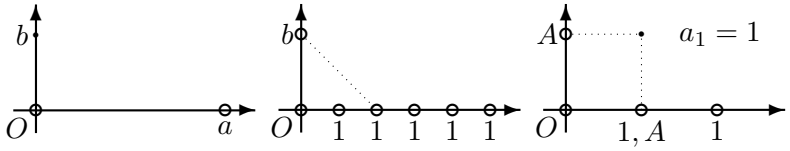
Крупными мазками опишем алгоритма решения задачи умножения чисел a и b. Пусть $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ — двоичное представление числа a, т.е. $a = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} a_i$. Тогда $ab = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} b a_i$. Клеточный автомат, который будет решать задачу умножения чисел a и b, будет одновременно выполнять 3 задачи. Чтобы выполнять эти три задачи параллельно в нашемавтомате будут работать одновременно 3 разных автомата, каждый надсвоим множеством компонент состояний и своим множеством компонентсигналов вещания.

С помощью первого автомата будет решаться задача вычисления чисел $2^{i-1}b$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Делать это будем с помощью второго алгоритма удвоения чисел, описанного в разделе 2.1, т.е. сначала сложим два числа b за 2 такта, затем сложим два числа $2b$ за 2 такта и т.д., т.е. каждые 2 такта мы сможем получать числа $2^{i-1}b$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

С помощью второго автомата будем находить двоичное представление числа a, т.е. будем получать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Делать это будем как описано в разделе 2.3. Но будем притормаживать получение чисел $a_2, a_3, \ldots, a_n$ так, чтобы они появлялись одновременно с числами $2^1 b, 2^2 b, , \ldots, 2^{n-1} b$.

С помощью третьего автомата будем накапливать суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} 2^{j-1} b a_j, i = 1, 2, \ldots, n, S_0 = 0.$$



Риснок 4.Умножение чисел,$t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

Т.е. если вычисленное число a_i равно единице, то к числу S_{i-1} добавим вычисленное число $2^{i-1}b$. Это тоже можно сделать за 2 такта, как было описано в разделе 2.2.

Тем самым описанный клеточный автомат с локаторами может приблизительно за $2n$ тактов вычислить число ab.

На самом деле алгоритм несколько сложнее и нам понадобится еще четвертый автомат, который будет управляющим и будет координировать действия описанных выше трех автоматов. Этот автомат будет иметь свое множество компонент состояний и свое множество компонент сигналов вещания.

Чтобы запускать удвоение чисел первым автоматом и суммирование чисел третьим автоматом итеративно каждый второй такт, отождествим состояния “аргумент” и “результат” в первом автомате, и состояния “слагаемое 1” и результат в третьем автомате.

Опишем более детально наш алгоритм и получим точную оценку времени работы этого алгоритма.

1) В начальный (нулевой) такт ячейка $(0, 0)$ (“начало координат”) и ячейка $(a, 0)$ (“первый сомножитель”) посылают в эфир сигнал, который можно назвать “строим унарное представление”. Этот сигнал посылается по компоненте четвертого автомата. Все ячейки, которые услышат этот сигнал в локаторы “восток” и “запад” поймут, что они между “началом координат” и “первым сомножителем” и перейдут в состояние “один” второго автомата, “первый сомножитель” тоже переходит в состояние “один” второго автомата.

2) В результате на первом такте ячейки с координатами $(1, 0), (2, 0), \ldots,$ $(a, 0)$ окажутся в состоянии “один”, и мы на них запустим второй автомат для вычисления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ячейка $(0, b)$ (“второй сомножитель” проецируется на ось абцисс. Для этого “начало координат” и “второй сомножитель” посылают в эфир по компоненте четвертого автомата сигнал, который можно назвать “проецируем на ось абцисс”. Ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы “запад” и “северо-запад” (а это будет ячейка $(b, 0)$), перейдет в

состояние “аргумент” первого автомата, “второй сомножитель” тоже перейдет в состояние “аргумент” первого автомата.

3) На втором такте в эфире от второго автомата появится число a_1. Если $a_1 = 1$, то ячейка $(b, 0)$ переводится в состояние “слагаемое 1” третьего автомата, а если $a_1 = 0$, то ячейка $(0, 0)$ переводится в состояние “слагаемое 1” третьего автомата. Также на втором такте ячейки $(b, 0)$ и $(0, b)$ окажутся в состоянии ‘аргумент” первого автомата, поэтому запускается первый автомат для получения чисел $2^{i-1}b$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

4) На третьем такте в эфире от второго автомата появится число a_2. Если $a_2 = 1$, то первый автомат, у которого на следующий такт появится ячейка на оси ординат в состоянии “результат” (это будет ячейка $(0, 2b)$, переводит добавочно эту ячейку в состояние “слагаемое 2” третьего автомата. Если $a_2 = 0$, то у третьего автомата ячеки в состоянии “слагаемое 2” не появится. Также с этого момента второй автомат переключается в режим выдачи ответа через такт.

5) На тактах $2i$, $i = 2, 3, \ldots$, будут появлятся результаты удвоения, которые одновременно могут превращаться в “слагаемое 2” третьего автомата (если на предыдущем такте $a_i = 1$), и третий автомат начнет складывать числа. Также на этих тактах может появится результат сложения третьего автомата, если за 2 такта до этого процесс сложения был запущен. Результат сложения сразу же превратится в “слагаемое 1”, поскольку мы отождествили состояния “слагаемое 1” и “результат” у третьего автомата.

6) На тактах $2i + 1$, $i = 2, 3 \ldots, n - 1$, будут появлятся числа a_{i+1} от второго автомата. Если $a_{i+1} = 1$, то первый автомат, у которого на следующий такт появится ячейка на оси ординат в состоянии “результат” (а это будет ячейка $(0, 2^i b)$) переводит добавочно эту ячейку в состояние “слагаемое 2” третьего автомата, что приводит к запуску процесса сложения третьим автоматом. Если $a_{i+1} = 0$, у третьего автомата не появляется ячейка в состоянии “слагаемое 2” и процесс сложения чисел не запускается.

7) На такте $2n + 1$ второй автомат поймет, что обработка числа a закончилась и прокричит в эфир сигнал “окончание работы”. В результате все ячейки, кроме “начала координат” и результата сложения третьего автомата, перейдут в состояние покоя, а результат сложения третьего автомата перейдет в состояние “результат умножения”.

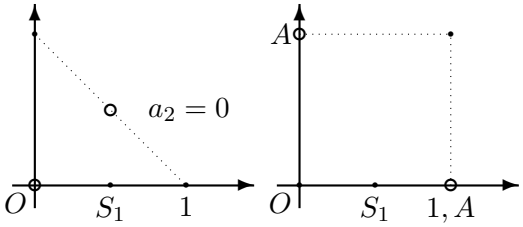


Рисунок 5. Умножение чисел, $t = 3$, $t = 4$.

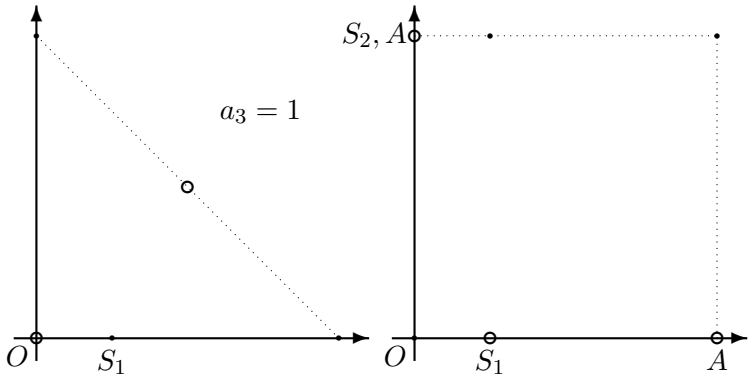


Рисунок 6. Умножение чисел, $t = 5$, $t = 6$.

8) На такте $2n + 2$ автомат завершает работу в требуемой финальной конфигурации.

Таким образом описанный клеточный автомат с локаторами решает задачу умножения чисел a и b за время $2]\log_2 a[+2$. Теорема 1 доказана.

На рисунках 4 – 7 изображен процесс умножения чисел $a = 5$ и $b = 2$. На этих рисунках полыми кружками изображены ячейки, подающие сигнал в эфир. Символом O обозначено "начало координат". Символом A обозначено состояние "аргумент" первого автомата. Символом 1 обозначено состояние "один" второго автомата. Символами S_1 и S_2 обозначены состояния "слагаемое 1" и "слагаемое 2" третьего автомата. Символом R обозначено состояние "результат умножения". Когда ячейка одновременно находится в нескольких описанных выше состояниях разных автоматов, то они перечислены через запятую.

4. Деление чисел

Идея алгоритма решения состоит в последовательном проецировании отрезков делителя на абсциссу, на которой также отложено делимое.

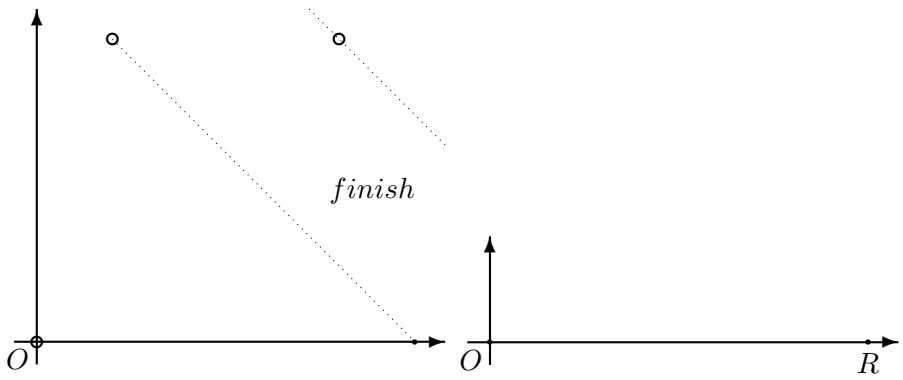


Рисунок 7. Умножение чисел, $t = 7$, $t = 8$.

Как только сумма отрезков делителя становится больше или равна делимому, значит частное и остаток от деления найдены. Далее следует откладывание частного и остатка от деления на абсциссе и ординате соответственно, в унарном формате. Таким образом операцию деления можно разбить на два этапа:

- откладывание отрезков делителя на оси абсцисс;
- откладывание частного и остатка от деления на осях абсцисс и ординат.

4.1. Первый этап

Рассмотрим следующий двумерный клеточный автомат с локаторами $\sigma = (\mathbb{Z}^2, Q, \emptyset, E_8, \max, L, \varphi, \psi)$. Q — это множество состояний ячеек автомата, $Q = \{*, O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, X, Y_2, Y_3, R\}$, где * — состояние покоя. Шаблон соседства пустой. Шаблон локаторов L задается соотношением (1). $E_8 = \{0, 1, \ldots, 7\}$ — алфавит сигналов вещания, полугрупповая операция — максимум. Ячейки передают сигналы о своем местоположении и состоянии.

Пусть b — делимое, а a — делитель, и $b/a \leq 2^n$. Тогда клеточный автомат с локаторами σ будет решать задачу первого этапа, т.е. откладывания отрезков делителя на оси абцисс за время $T_1 = 2n + 5$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда делимое делится на делитель не полностью. Делитель $a = 3$, делимое $b = 17$. Начало координат обозначено буквой O. На рисунках ячейки, которые посылают сигналы в эфир, обозначены белыми кругами, а рядом указано значение сигнала вещания, посылаемого в эфир. Ячейки без кругов посылают в

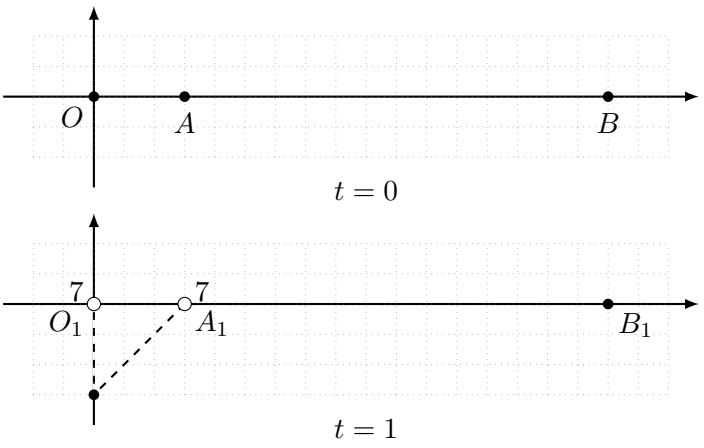


Рисунок 8. Деление чисел, такты $0, 1$

эфир нейтральный сигнал 0. Состояние покоя на рисунках изображено в виде пустой клетки.

Первые два такта клеточный автомат готовится откладывать отрезки делителя на абсциссу.

На нулевом такте ($t = 0$) ячейка $(0, 0)$ в состоянии O (начало координат) и ячейка $(a, 0)$ в состоянии A (делитель) переходят соответственно в состояния O_1 и A_1, принимают решение о посылке в эфир сигнала 7. Ячейка $(b, 0)$ в состоянии B (делимое) переходит в состояние B_1.

В первом такте ($t = 1$) ячейки в состояниях O_1 и A_1 посылают в эфир сигналы 7, переходят соответственно в состояния O_2 и A_2. Ячейка в состоянии покоя, которая получает сигналы 7 на локаторы “север” и “северо-восток”, переходит в состояние Y_2. Вспомогательная ячейка в состоянии Y необходима для создания временных ячеек в состоянии X, используемых для проецирования отрезков делителя на ось абсцисс. Ячейка в состоянии B_1 переходит в состояние B_2.

Далее следует цикл из двух тактов, который работает пока не закончится процедура откладывания отрезков делителя на ось абсцисс. Во время работы цикла ячейки в состоянии A_3 не переходят в другое состояние.

На первом такте цикла (в нашем примере - такты 2,4,6,8) ячейка в состоянии O_2 посылает в эфир сигнал 2, и если она получает сигнал 5 на локатор “восток”, то переходит в состояние O_4, иначе – в состояние O_3. Ячейка в состоянии A_2 посылает в эфир сигнал 2, и если она получает сигнал 1 на локатор “восток”, то переходит в состояние A_5, иначе – в состояние A_3. Ячейка в состоянии B_2, которая получает сигнал 1 на

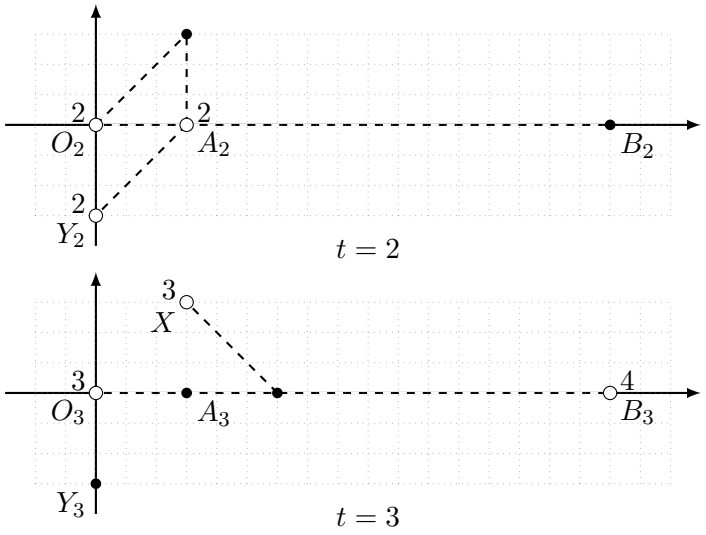


Рисунок 9. Деление чисел, такты 2, 3

локатор “восток”, переходит в состояние B_5, иначе – в состояние B_3. Ячейка в состоянии Y_2 посылает в эфир сигнал 2 и переходит в состояние Y_3. Ячейка в состоянии покоя, которая получает сигнал 2 в локаторы “юго-запад” и “юг”, переходит в состояние X.

Если в первом такте присутствует ячейка в состоянии A_4, то она посылает в эфир сигнал 1 и автоматически переходит в состояние покоя. Если присутствует ячейка в состоянии B_4, то она посылает в эфир сигнал 5 и переходит в состояние A_3.

На втором такте цикла (в нашем примере - такты 3,5,7,9) ячейка в состоянии O_3 посылает в эфир сигнал 3. Ячейка переходит в состояние O_4, если получает сигнал 5 на локатор “восток”, иначе возвращается в состояние O_2. Ячейки в состоянии X посылают в эфир сигнал 3 и переходят в состояние покоя. Ячейка в состоянии B_3 посылает в эфир сигнал 4. При этом если ячейка получает сигнал 3 на локаторы “северо-запад” и “запад”, то переходит в состояние B_4, иначе возвращается в состояние B_2. Ячейка в состоянии Y_3 переходит снова в состояние Y_2. Ячейки в состоянии покоя, которые получают сигналы 3 на локаторы “северо-запад” и “запад”, переходят в состояние A_2. Ячейки в состоянии покоя, которые получают сигнал 3 на локатор “северо-запад” и сигнал 4 на локатор “запад”, переходят в состояние A_4.

Если на втором такте присутствует ячейка в состоянии O_4, то она посылает в эфир сигнал 6 и переходит в состояние O_5. Ячейка в состоянии A_5 посылает в эфир сигнал 5 и переходит в состояние A_3. Ячейка в состоянии B_5 также посылает в эфир сигнал 5 и переходит в состояние

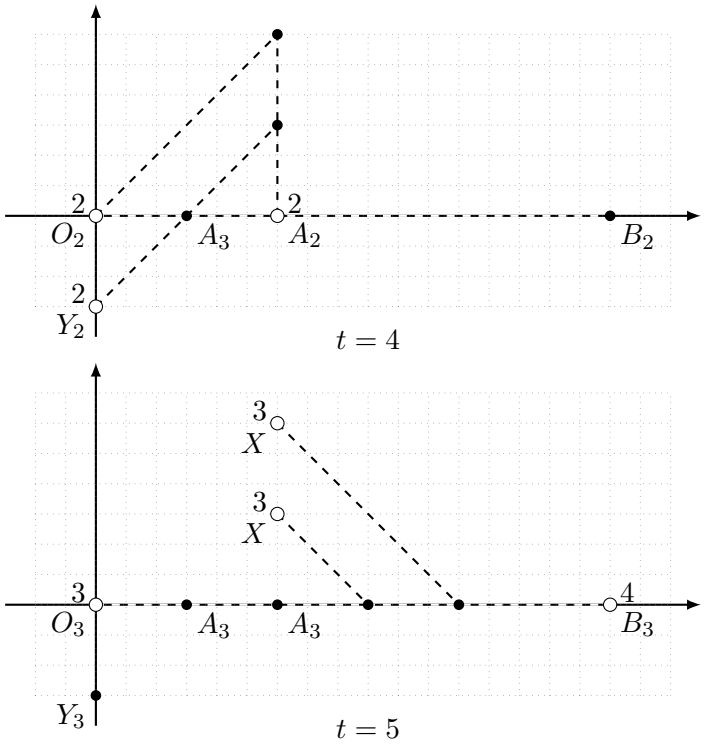


Рисунок 10. Деление чисел, такты $4, 5$

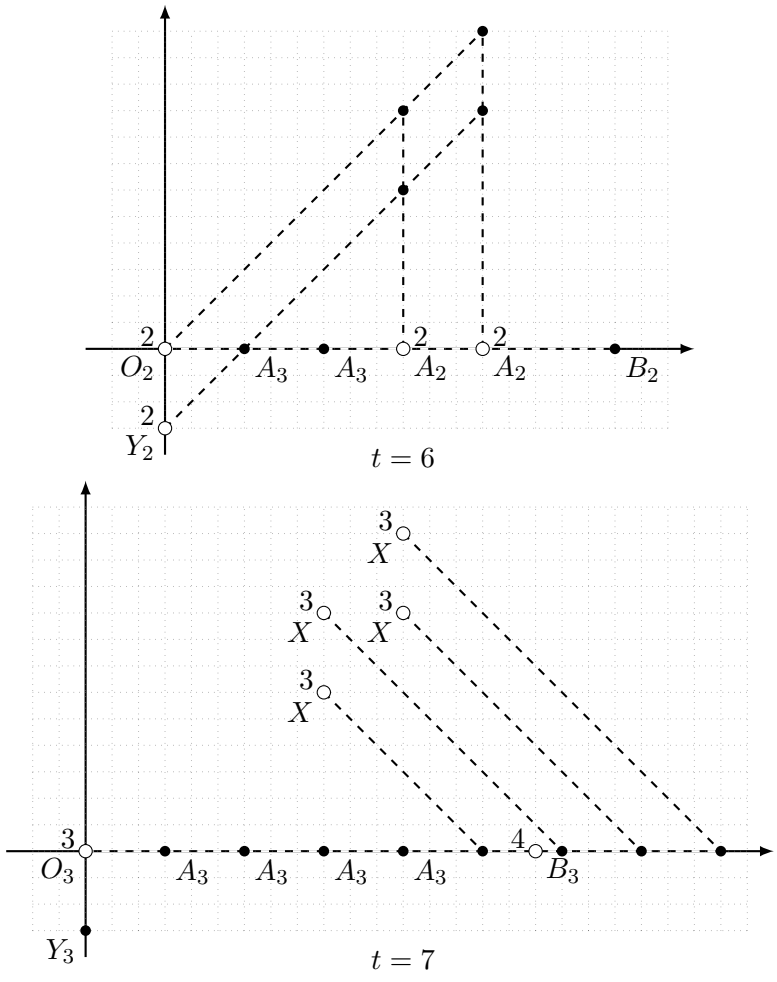


Рисунок 11. Деление чисел, такты $6, 7$

покоя. Ячейка в состоянии покоя, которая получает сигнал 5 на локаторы "юг" и "юго-восток", переходит в состояние R.

Появление ячейки в состоянии B_4 или B_5 говорит о завершении откладывания отрезков делителя на ось абсцисс. Далее следуют два такта, в которых определяется остаток от деления и удаляется вспомогательная ячейка в состоянии Y_2 или Y_3.

Ячейка в состоянии O_4 посылает в эфир сигнал 6 и переходит в состояние O_5. Ячейки в состоянии A_3, которые получают сигнал 6 на локатор "запад", переходят в состояние A_6. Ячейка в состоянии Y_2 или Y_3, которая получает сигнал 6 на локатор "север", переходит в состояние покоя.

В нашем примере первый этап завершается на такте 11. В результате определено количество ячеек в состоянии A_6 (частное), и расстояние между самой правой ячейкой в состоянии A_6 и ячейкой в состоянии R (остаток).

Можно заметить, что за каждую двухтактовую итерацию количество ячеек в состоянии A с индексами удваивается. Это происходит из-за того, что ячейки в состоянии X получаются на пересечении вертикальных прямых, проходящих через ячейки в состоянии A_2 и двух наклонных прямых, проходящих через ячейки в состоянии O_2 и Y_2. Поскольку на первой итерации появляется 1 точка в состоянии A с индексами, а последней итерации таких точек будет 2^n, то всего итераций будет $n+1$. Добавляя к этому 2 такта в начале работы алгоритма и 1 такт в конце (для формирования остатка), получим, что время работы первого этапа будет равно $T_1 = 2(n+1)+3 = 2n+5$.

4.2. Второй этап

Второй этап — это представление результатов первого этапа в нужном формате.

После первого этапа частное представлено в виде ячеек в состоянии A_6. Если к описанному выше автомату добавить автомат для подсчета числа единиц, описанный в разделе 2.5, и если отождествить состояние A_6 с состоянием "один" автомата для подсчета числа единиц, то в момент появления ячеек в состоянии A_6 автоматически запустится автомат для подсчета числа единиц. В результате работы этого автомата частное будет отображено на ось абсцисс в унарном формате за время $T_2 = n+3$.

Для отображения остатка на ось ординат достаточно одного такта. Для этого ячейка R и начало координат, должны послать в эфир некий сигнал, а ячейка, которая услышит этот сигнал в локаторы "восток" и "юг" и будет ячейкой, представляющей остаток. Причем это можно сделать в любое время на фоне вычисления частного.

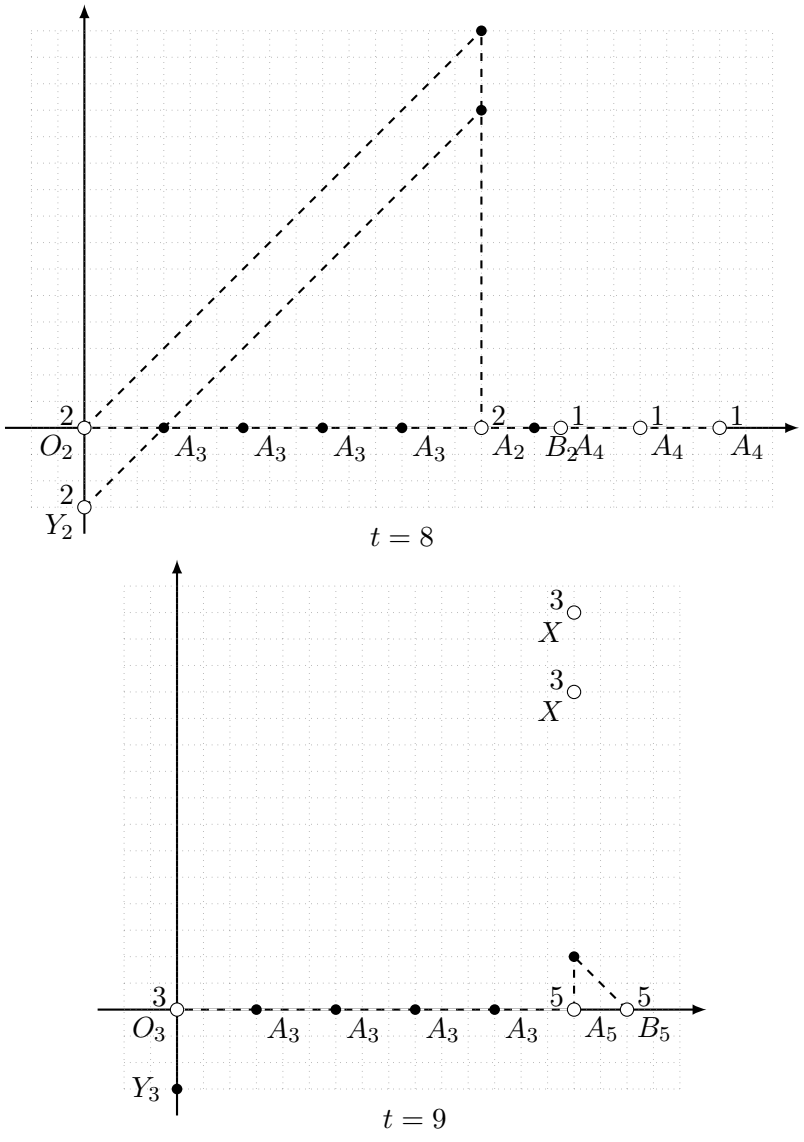


Рисунок 12. Деление чисел, такты $8, 9$

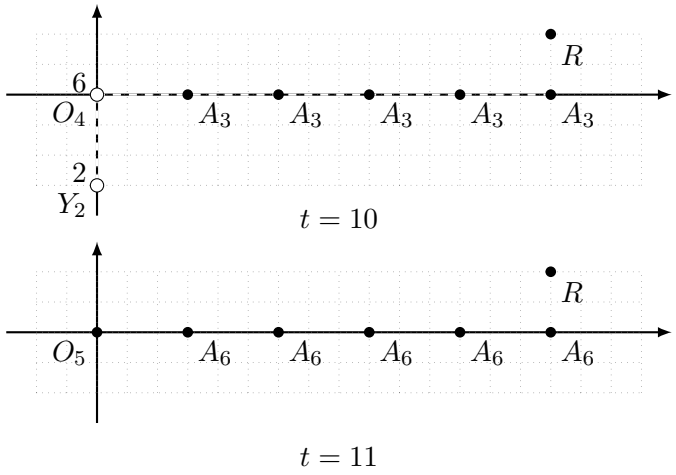


Рисунок 13. Деление чисел, такты $10, 11$

Таким образом задача деления чисел b и a, где $b/a \leq 2^n$, решается нашим двумерным клеточным автоматом с локаторами за время $T_1 + T_2 = 3n + 8$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Карацуба А., Офман Ю., "Умножение многозначных чисел на автоматах", *Доклады АН СССР*, **145**:2 (1962), 293–294.

[2] Schönhage A., Strassen V., "Schnelle Multiplikation großer Zahlen", *Computing*, 1971, № 7, 281–292.

[3] Fürer M., "Faster integer multiplication", *STOC 2007 Proceedings*, 2007, 57–66.

[4] David Harvey, Joris van der Hoeven, "Integer multiplication in time $O(n \log n)$", *Annals of Mathematics*, **193**:2 (2021), 563–617.

[5] Christoph Burnikel C., Ziegler J., "Fast Recursive Division", *Max-Planck-Institut für Informatik*, 1998.

[6] Гасанов Э. Э., "Линейный по порядку алгоритм умножения чисел с помощью двумерного клеточного автомата с локаторами", Международная научная конференция "Математика в созвездии наук" к юбилею академика В.А. Садовничего, Москва, Россия, 1-2 апреля 2024, стр. 316-318.

[7] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[8] Калачев Г. В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[9] Ибрагимова Д. Э., “Сложение векторов на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:4 (2022), 134–162.

[10] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, **21** (2023), 5–51.

[11] Васильев Д. И., “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 99–119.

Fast algorithms for multiplication and division of natural numbers using cellular automata with locators
Gasanov E.E., Khaybullin B.F.

For multiplication and division of n-digit natural numbers, algorithms with complexity of order $n^{\log_2 3}$ and even order $n^{\log n}$ are known. In this paper, an algorithm for multiplying n-digit natural numbers in $2n + 2$ cycles is proposed. Here, the digit of number a is understood as the number $]\log_2 a[$. For division of natural numbers with remainder, an algorithm with a running time of $3n + 8$ cycles is proposed, where n is the digit of the quotient. The proposed algorithms use two-dimensional cellular automata with locators as calculators.

Keywords: multiplication of natural numbers, division of natural numbers, cellular automata with locators.

References

[1] Karatsuba A., Ofman Yu., “Multiplication of multi-digit numbers on automata”, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **145**:2 (1962), 293–294 (In Russian).

[2] Schönhage A., Strassen V., “Schnelle Multiplikation großer Zahlen”, *Computing*, 1971, № 7, 281–292.

[3] Fürer M., “Faster integer multiplication”, *STOC 2007 Proceedings*, 2007, 57–66.

[4] David Harvey, Joris van der Hoeven, "Integer multiplication in time $O(n \log n)$", *Annals of Mathematics*, **193**:2 (2021), 563–617.

[5] Christoph Burnikel C., Ziegler J., "Fast Recursive Division", *Max-Planck-Institut für Informatik*, 1998.

[6] Gasanov E. E., "Linear in order algorithm for multiplication of numbers using a two-dimensional cellular automaton with locators", *International scientific conference "Mathematics in the constellation of sciences" to the anniversary of academician V.A. Sadovnichy, Moscow, Russia, April 1-2, 2024*, p.316-318 (In Russian).

[7] Gasanov E. E., "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (In Russian).

[8] Kalachev G. V., "Notes on the Definition of a Cellular Automaton with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:4 (2020), 47–56 (In Russian).

[9] Ibragimova D. E., "Vector addition on a line using a cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:4 (2022), 134–162 (In Russian).

[10] Gasanov E. E., "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Mathematical issues of cybernetics*, **21** (2023), 5–51 (In Russian).

[11] Vasilev D. I., "Finding the nearest neighbor on a line using a cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:3 (2020), 99–119 (In Russian).