

Точность алгоритмов сингулярного разложения матриц с различным спектром

И. Ю. Дроздов¹ Д. В. Парфенов²

Развивается наш новый подход по рассмотрению сингулярного спектра как функции плотности распределения с целью углубленного анализа зависимости погрешности нахождения сингулярных значений от спектра. Проведены масштабные численные эксперименты, выявляющие данные зависимости в новых предложенных метриках: среднеквадратичная относительная погрешность и медиана. Построены иллюстрирующие зависимости графики и оценена информативность предложенных метрик.

Ключевые слова: сингулярное разложение, число обусловленности, спектр матрицы, численная устойчивость

1. Введение

Сингулярное разложение (SVD) – факторизация матриц общего вида, применяющаяся для решения широкого круга практических задач, обычно в численном виде. Алгоритмы сингулярного разложения реализованы во множестве программных пакетов линейной алгебры. В [1] нами продемонстрирована зависимость точности нахождения сингулярных значений не только от общепринятого критерия – числа обусловленности матрицы, но и от особенностей распределения сингулярных значений в спектре матрицы. Там же отмечена недостаточность широко используемых в линейной алгебре метрик для оценки точности нахождения сингулярных значений в целом. Данное исследование посвящено анализу конкретных зависимостей между различными распределениями сингулярных значений и точностью их нахождения в разных метриках оценки этой точности.

¹Дроздов Игорь Юрьевич – старший преподаватель каф. высшей математики Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, e-mail: drozdov_i@mirea.ru.

Drozdov Igor Yurievich – senior lecturer, Russian Technological University (MIREA), Institute of Artificial Intelligence, Department of Higher Mathematics.

²Парфенов Денис Васильевич – к.т.н., доцент каф. высшей математики Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, e-mail: parfenov@mirea.ru.

Parfenov Denis Vasilevich, Ph.D. – associate professor, Russian Technological University (MIREA), Institute of Artificial Intelligence, Department of Higher Mathematics.

2. Алгоритм, используемые в распространенных реализациях SVD

Сингулярное разложение определяется как

$$A = U\Sigma V^T, \quad (1)$$

где A – исходная матрица размером $m \times n$, U и V – унитарные матрицы размерами $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, Σ – диагональная матрица размером $\min(m, n) \times \min(m, n)$ с сингулярными значениями на главной диагонали. У матрицы A размером $m \times n$ существует $\min(m, n)$ сингулярных значений.

В нашей предыдущей статье [1] для проведения численных экспериментов выделены три реализации полного сингулярного разложения из двух наиболее распространенных библиотек линейной алгебры: методы `dgesvd` и `dgesdd` из библиотеки LAPACK [2] и `BDCSVD` из библиотеки Eigen [3]. Все эти алгоритмы характеризуются общей стратегией, но различаются ее непосредственной реализацией, заключающейся в следующем:

- 1) Матрица A общего вида представляется как произведение $U_1 B V_1^T$, где U_1 и V_1 – ортогональные матрицы, B – bidiagonalная матрица, в ней ненулевые элементы расположены на главной диагонали и либо на нижней поддиагонали (если $m < n$), либо на верхней наддиагонали (если $m \geq n$);
- 2) Находится сингулярное разложение bidiagonalной матрицы: $B = U_2 \Sigma V_2^T$. Тогда значения на главной диагонали матрицы Σ являются сингулярными значениями исходной матрицы A , а матрицы из сингулярных векторов получаются как $U = U_1 U_2$, $V = V_1 V_2$.

Далее опишем два основных подхода для нахождения сингулярного разложения bidiagonalной матрицы B , используемые в LAPACK. Их принципиальное отличие заключается в следующем: `dgesvd` применяет итеративную схему, основанную на реализации неявного QR-алгоритма с нулевым сдвигом [4] к матрице B целиком, в то время как `dgesdd` использует рекурсивное разбиение [5] матрицы B на блоки достаточного малого размера, вычисляет сингулярное разложение этих малых блоков методом `dgesvd`, а затем в обратном порядке реконструирует сингулярное разложение исходной матрицы B .

2.1. `dgesvd` из LAPACK

Если матрица $m \times n$ достаточно ”высокая” или ”широкая” ($m \gg n$ или $n \gg m$), в целях повышения производительности вначале выполняется QR

или LQ разложение соответственно. В этом случае алгоритм продолжает работу с матрицами R размерности $n \times n$ или L размерности $m \times m$ вместо исходной A . Если количество строк или столбцов исходной матрицы A сопоставимы, эти предварительные разложения пропускаются. Далее матрица представляется в bidiagonalном виде алгоритмом, известным как bidiagonalization Голуба-Кахана [7], использующего преобразования Хаусхолдера. Сингулярное разложение bidiagonalной матрицы B находится с помощью алгоритма, предложенного в [4]. Проиллюстрируем его основную идею на примере матрицы 4×4 .

Обозначим $G(\theta, i, j)$ матрицу поворота Гивенса по координатам i и j на задающий параметризацию угол θ , ненулевые элементы которой задаются как

$$G(\theta, i, j) = \begin{cases} g_{kk} = 1 & \text{для } k \neq i, j, \\ g_{kk} = \cos \theta & \text{для } k = i, j, \\ g_{ji} = -g_{ij} = -\sin \theta & . \end{cases}$$

Bidiagonalная матрица $B_i^{(0)}$ выглядит следующим образом:

$$B_i^{(0)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & & \\ & b_{22}^{(0)} & b_{23}^{(0)} & \\ & & b_{33}^{(0)} & b_{34}^{(0)} \\ & & & b_{44}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Выбирается угол θ_1 , такой что $\operatorname{tg} \theta_1 = -b_{12}/b_{11}$. Матрица B умножается на матрицу $G_1(2, 1, \theta_1)$:

$$B_i^{(1)} = B_i^{(0)} G_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & 0 & & \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & b_{23}^{(1)} & \\ & & b_{33}^{(1)} & b_{34}^{(1)} \\ & & & b_{44}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Далее выбирается такой угол θ_2 , чтобы умножение на $G_2(1, 2, \theta_2)$ слева позволило получить 0 в элементе b_{21} :

$$B_i^{(2)} = G_2 B_i^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & \\ 0 & b_{22}^{(2)} & b_{23}^{(2)} & b_{24}^{(2)} \\ & & b_{33}^{(2)} & b_{34}^{(2)} \\ & & & b_{44}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм продолжается подобным образом, выбирая θ_i так, чтобы обнулить единственный ненулевой элемент, лежащий вне главной и

наддиагонали. Обнуление этого элемента с помощью поворота Гивенса приводит к появлению другого ненулевого элемента по другой стороне от ненулевой полосы матрицы и ближе к ее правому краю. Говоря неформально, алгоритм "гоняется" за ненулевым элементом вне полосы, смещая его за край матрицы. В конечном счете, для матрицы 4×4 , имеем следующее:

$$B_i^{(7)} = G_6 G_4 G_2 B_i^{(0)} G_1 G_3 G_5 = \begin{bmatrix} b_{11}^{(7)} & & & \\ & b_{12}^{(7)} & & \\ & b_{22}^{(7)} & & \\ & & b_{23}^{(7)} & \\ & & b_{33}^{(7)} & b_{34}^{(7)} \\ & & & b_{44}^{(7)} \end{bmatrix},$$

что является снова bidiagonalной матрицей. Эта матрица становится начальной для следующей итерации алгоритма: $B_{i+1}^{(0)} = B_i^{(7)}$. Повторение таких итераций сводит матрицу к диагональному виду. Авторы алгоритма предлагают адаптивное использование нескольких критериев сходимости в [4].

После достижения критерия сходимости bidiagonalная матрица B сведена к диагональной Σ , содержащей сингулярные значения. Сингулярные векторы матрицы B в матрицах U_2 и V_2^T получаются в виде произведения всех матриц G , накопленных в ходе алгоритма слева и справа соответственно.

2.2. dgesdd из LAPACK

Подобно методу `dgesvd`, метод `dgesdd` также может провести QR или LQ разложение и выполняет bidiagonalизацию Голуба-Кахана. Далее производится сингулярное разложение bidiagonalной матрицы с помощью рекурсивного алгоритма "разделяй и властвуй" [5].

Bidiagonalная матрица B размера $N \times N + 1$ представляется в блочном виде:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \alpha_k e_k & 0 \\ 0 & \beta_k e_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

где B_1 и B_2 – bidiagonalные блоки размера $k \times k - 1$ и $N - k + 1 \times N - k$ соответственно, e_k – вектор из канонического базиса с единицей в k -м элементе, k обычно выбирается как $N/2$. Идея алгоритма заключается в нахождении сингулярного разложения B_1 и B_2 , из которых в дальнейшем получается разложение B . Алгоритм применяется рекурсивно к блокам матрицы, пока отдельные блоки не станут достаточно малого размера, сингулярное разложение которых находится другим методом. В `dgesdd` LAPACK для этого применяется алгоритм, аналогичный используемому в `dgesvd`, описанному выше.

Основная сложность заключается в нахождении сингулярного разложения B , имея сингулярные разложения B_1 и B_2 . Представим сингулярное разложение B_i как

$$B_i = [Q_i \quad q_i] \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix} V_i^T. \quad (2)$$

Пусть l_1^T и λ_1 - последняя строка и элемент Q_1 и q_1 соответственно. Также пусть f_1^T и ϕ_1 - первая строка и элемент Q_2 и q_2 соответственно. Тогда (2) можно представить в следующем виде:

$$B = \begin{bmatrix} Q_1 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \lambda_1 & 0 & 0 \\ \alpha_k l_1 & D_1 & 0 \\ \beta_k f_2 & 0 & D_2 \\ \beta_k \phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix}.$$

Применяя поворот Гивенса с целью получения 0 на месте элемента $\beta_k \phi_2$, имеем

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} c_0 q_1 & Q_1 & 0 & -s_0 q_1 \\ s_0 q_2 & 0 & Q_2 & c_0 Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ \alpha_k l_1 & D_1 & 0 \\ \beta_k f_2 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix} \\ &= [Q \quad q] \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} V_i^T, \end{aligned}$$

где $r_0 = \sqrt{(\alpha_k \lambda_1)^2 + (\beta_k \phi_2)^2}$, $c_0 = \alpha_k \lambda_1 / r_0$, $s_0 = \beta_k \phi_2 / r_0$. Далее проблема сводится к нахождению сингулярного разложения матрицы M вида

$$M = \begin{bmatrix} z_1 & & & \\ z_2 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ z_n & & & d_n \end{bmatrix}.$$

Относительно этой матрицы применяются следующие предположения и обозначения: $0 \equiv d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $z = (z_1 z_2 \dots z_n)^T$. Также предполагается, что

$$d_{j+1} - d_j \geq \tau \|M\|_2 \quad \text{и} \quad |z_j| \geq \tau \|M\|_2, \quad (3)$$

где τ - малое число, кратное машинной точности. Авторы алгоритма предлагают процедуру, обеспечивающую удовлетворение этих условий для любой матрицы такого вида. В [6] показано, что сингулярные значения σ_i матрицы M удовлетворяют условию

$$0 \equiv d_1 < \sigma_1 < d_2 < \dots < d_n < \sigma_n < d_n + \|z\|_2$$

и характеристическому уравнению

$$f(\sigma) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{d_k^2 - \sigma^2} = 0.$$

Собственные векторы находятся как

$$u_i = \left(\frac{z_1}{d_1^2 - \sigma_i^2}, \dots, \frac{z_n}{d_n^2 - \sigma_i^2} \right)^T / \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{(d_k^2 - \sigma_i^2)^2}},$$

$$v_i = \left(-1, \frac{d_2 z_2}{d_1^2 - \sigma_i^2}, \dots, \frac{d_n z_n}{d_n^2 - \sigma_i^2} \right)^T / \sqrt{1 + \sum_{k=2}^n \frac{(d_k z_k)^2}{(d_k^2 - \sigma_i^2)^2}}.$$

Таким образом, решение характеристического уравнения численными методами позволяет найти сингулярные значения, далее находятся сингулярные векторы. Для повышения численной устойчивости применяются соображения, подробно описываемые авторами в [5].

2.3. BDCSVD из Eigen

Данный метод применяет тот же подход "разделяй и властвуй", приведенный в [5] и используемый методом `dgesdd` из LAPACK (раздел 2.2. Основное различие между BDSVD из Eigen и `dgesdd` из LAPACK заключается в способе вычисления сингулярного разложения матриц достаточного малого размера в конце рекурсии: BDSVD из Eigen использует метод Якоби [7], в то время как `dgesdd` из LAPACK применяет метод `dgesvd`. Также BDSVD принимает малые сингулярные значения (которые, как правило, находятся неточно) равными нулю, что повышает его общую точность в выбранных нами метриках.

3. Цели и методы исследования

Целью исследования является изучение зависимости точности нахождения сингулярных значений от особенностей распределения этих значений в спектре матрицы. Мы используем матрицы размером 3000×2000 с фиксированным числом обусловленности 10^{20} и крайними сингулярными значениями $\sigma_{\min} = 10^{-10}$ и $\sigma_{\max} = 10^{10}$. Остальные сингулярные значения будем называть внутренними. Их различные распределения моделируются с помощью параметризуемой прямоугольной функции

вида:

$$\text{rect}_\sigma(x; \text{center}, \text{width}) = \begin{cases} 0, & x < \text{center} - \frac{\text{width}}{2}, \\ \frac{1}{\text{width}}, & \text{center} - \frac{\text{width}}{2} \leq x \leq \text{center} + \frac{\text{width}}{2}, \\ 0, & x > \text{center} + \frac{\text{width}}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Параметр $0 < \text{center} < 1$ задает центр прямоугольника, width устанавливает его общую ширину, $\text{center} - \text{width}/2 > 0$, $\text{center} + \text{width}/2 < 1$. Таким образом, все внутренние сингулярные значения отвечают интервалу $(0, 1)$. Для любых center и width наименьшее сингулярное значение σ_{\min} соответствует $x = 0$, а наибольшее σ_{\max} отвечает $x = 1$. Генерация набора тестов заключалась, неформально, в следующем: выбираются 10 значений ширины прямоугольника width : 0.05 и от 0.1 до 0.9 с равным шагом. Независимо от этого для каждой фиксированной ширины прямоугольника равномерно фиксируются 10 положений center : от левого края $(0, 1)$ до правого. Таким образом, получается сетка из 100 пар параметров $(\text{center}, \text{width})$, соответствующих различным прямоугольникам с различными положениями на интервале $(0, 1)$ и различной шириной.

Функция $\text{rect}_\sigma(x; \text{center}, \text{width})$ для каждой пары $(\text{center}, \text{width})$ понимается как функция равномерного распределения сингулярных значений внутри интервала, то есть гистограмма наборов внутренних сингулярных значений выглядит как функция $\text{rect}_\sigma(x; \text{center}, \text{width})$. Крайние и внутренние распределенные на отрезке $[0, 1]$ сингулярные значения далее проецируются на логарифмическую шкалу в отрезке от $[10^{-10}, 10^{10}]$ для получения спектра с заданными постоянными σ_{\min} и σ_{\max} . Рисунок 1 иллюстрирует идею создания набора прямоугольных распределений внутренних сингулярных значений. На нем намеренно не показаны одинаковые во всех случаях крайние σ_{\min} и σ_{\max} . Матрица с заданным спектром создается по методу, предложенному в [7] и детально описанному нами в [1]. Исследуется точность сингулярного разложения тремя рассмотренными методами из программных библиотек линейной алгебры на наборе из 100 матриц, каждая из которых имеет прямоугольный спектр внутренних сингулярных значений с разными свойствами. Все, кроме крайних, сингулярные значения могут находиться на одном узком отрезке спектра, а могут быть равномерно распределены по достаточно широкой его части; большинство сингулярных значений могут быть сгруппированы как у левого конца спектра, так и у правого.

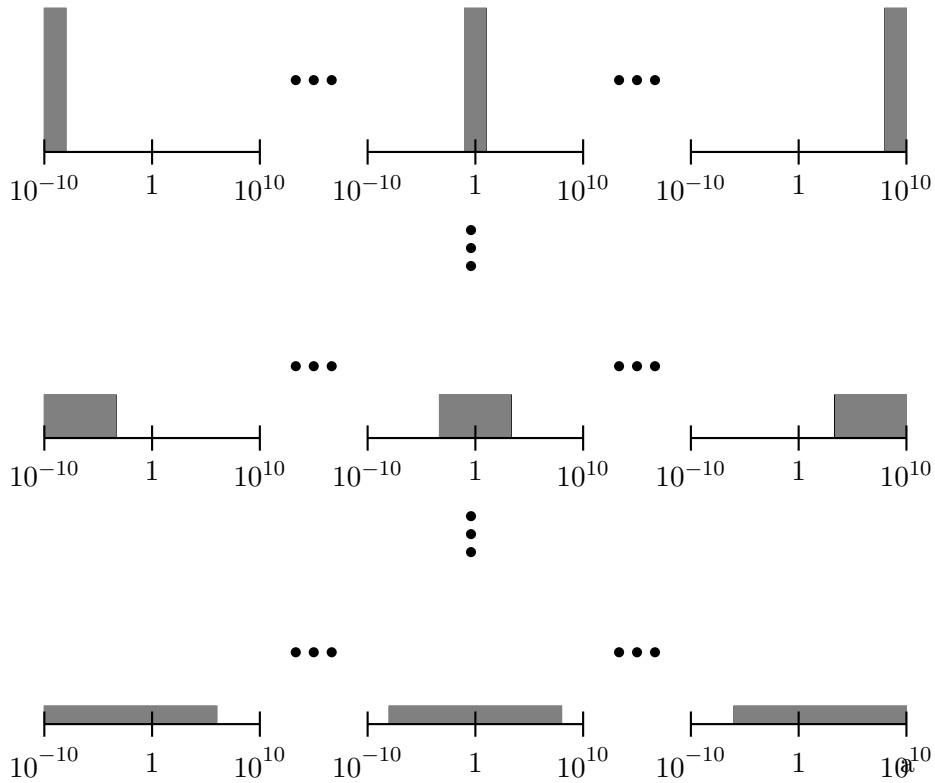


Рисунок 1. Иллюстрации набора тестовых распределений внутренних сингулярных значений.

4. Эксперименты

Результаты моделирования представлены в виде трехмерных графиков на рисунках 2-7. На них по оси **center** отмечены нормированные к ширине спектра положения центра прямоугольной функции: 0 соответствует левому краю (малые сингулярные значения), 1 соответствует правому краю (большие сингулярные значения). По оси **width** отложена ширина прямоугольной функции: от 0.05 до 0.9 от ширины всего спектра. По вертикальной оси строятся значения выбранной метрики погрешности нахождения сингулярных значений в логарифмической шкале.

Для демонстрации результатов используется предложенная нами в [1] среднеквадратичная относительная мера погрешности:

$$\text{RMSRE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_i - \hat{\sigma}_i}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (5)$$

Отметим, что погрешность RMSRE чувствительна к выбросам – большая относительная погрешность отыскания отдельных сингулярных значений значительно влияет на общий результат. Рассмотрим подробнее два крайних случая в наших экспериментах.

В первом из них `center` = 0.8 и `width` = 0.05, прямоугольная функция распределения сингулярных значений ”узкая” и сдвинута к правому краю, т.е. все сингулярные значения, кроме самого малого σ_{\min} , расположены кучно и велики (находятся в интервале от 10^9 до 10^{10}). Вектор относительных погрешностей сингулярных значений, отсортированных от больших к меньшим, выглядит следующим образом:

$$(7.6e-16, 4.8e-15, 4.4e-15, \dots, 7e-15, 8.6e-15, 4.6e+04).$$

Все сингулярные значения находятся правильно, за исключением одного самого малого, имеющего большую относительную погрешность, что и приводит к увеличению (4), например, при использовании метода `dgesvd` до величины $\text{RMSRE} = 1023.4$.

Обратная ситуация имеет место при `center` = 0.1 и `width` = 0.05, то есть все сингулярные значения, кроме самого большого σ_{\max} , кучно сгруппированы в интервале от 10^{-10} до 10^{-9} около σ_{\min} . В этом случае вектор относительных погрешностей таков:

$$(1.9e-16, 1.5e+04, 1.2e+04, \dots, 1.6, 1.5, 1.4). \quad (6)$$

Все сингулярные значения, за исключением одного самого большого, найдены с очень большой относительной погрешностью. Тем не менее, для этого случая $\text{RMSRE} = 839.8$ и сопоставима для обоих случаев, несмотря на принципиальную разницу точности нахождения сингулярных значений в целом (большинство значений найдены точно против большинства значений найдены очень неточно).

При увеличении `width` ширина внутренней части сингулярного спектра между σ_{\min} и σ_{\max} расширяется, расстояния между смежными сингулярными значениями увеличиваются и выраженность важного описанного выше эффекта уменьшается. Как мы продемонстрировали в [1], традиционно используемые абсолютная погрешность $E_{\text{абс}}(\hat{x}) = \|\hat{x} - x\|$, относительная погрешность $E_{\text{отн}}(\hat{x}) = \|\hat{x} - x\|/\|x\|$ и поэлементная относительная погрешность $\max_i \|\hat{x}_i - x_i\|/\|x_i\|$ слабо отражают этот эффект численно. Чувствительность метрики RMSRE к нему может быть улучшена, что позволит избежать влияния значительной ошибки нахождения самого малого сингулярного значения. Для этого возьмём медиану набора относительных погрешностей

$$\text{med_rel} = \text{median} \frac{|\hat{\sigma}_i - \sigma_i|}{\sigma_i}. \quad (7)$$

Дополнительное вычисление RMSRE с изъятием самого малого значения σ_{\min} хорошо отражает особенности наших численных экспериментов, но не подходит для использования в общем случае, в отличие от (7). На рисунках 2, 4, 6 приведены медианы относительных погрешностей. На рисунках 3, 5, 7 для сравнения приведены значения метрики RMSRE для всех сингулярных значений, кроме самого малого.

5. Выводы

Продемонстрировано, что разные метрики могут как по сути игнорировать, так и преувеличивать особенности найденных численно сингулярных значений; например, широко используемая в численной линейной алгебре погрешность по L^2 -норме вектора результатов $\|\hat{\sigma} - \sigma\|$ обычно скрывает неточное вычисление основной массы сингулярных значений при найденных верно нескольких больших значениях, что хорошо соответствует идеям метода главных компонент. Наоборот, предложенная нами в [1] метрика RMSRE чувствительна к неточному нахождению любых, даже немногих малых сингулярных значений, при точном отыскании большей их части, что может быть важно для методов опознания по сжатию (англ. compressive sensing), при обработке мультиспектральных данных и реконструкции объектов по проекциям, где желательно знать весь сингулярный спектр с высокой точностью.

При использовании медианы набора относительных погрешностей в метрике RMSRE удается продемонстрировать явные зависимости общей точности нахождения сингулярных значений от их распределения, обеспечивая паритет между двумя упомянутыми выше метриками. При больших числах обусловленности матрицы (10^{20}), можно сделать следующий вывод: чем меньше по модулю сингулярное значение, тем хуже оно находится. Таким образом, точнее всего сингулярные значения вычисляются, если их большинство плотно сгруппировано около самого большого. Наоборот, наихудшим случаем является группировка сингулярных значений около меньшего при наличии одного значительно большего.

Список литературы

- [1] Дроздов И.Ю., Парфенов Д.В., “Влияние распределения спектра матрицы на точность сингулярного разложения”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, 2023.
- [2] Anderson E. et al., *LAPACK Users' Guide*, SIAM, 1999.

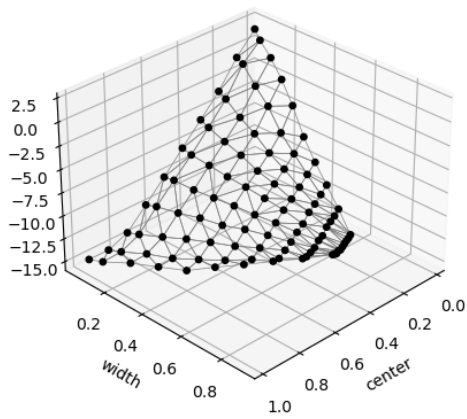


Рис. 2. Метод xgesvd, медиана

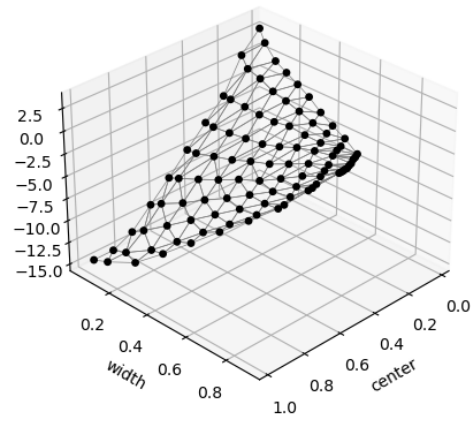


Рис. 3. Метод xgesvd, RMSRE без
малого сингулярного значения

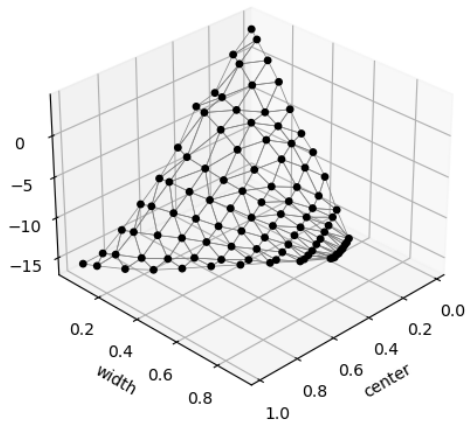


Рис. 4. Метод xgesdd, медиана

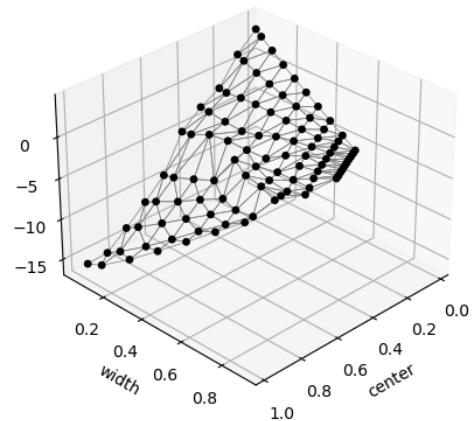


Рис. 5. Метод xgesdd, RMSRE без
малого сингулярного значения

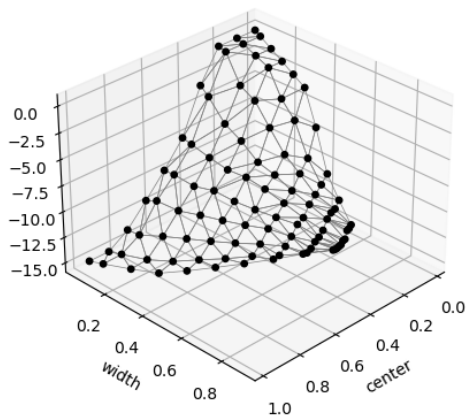


Рис. 6. Метод BDC, медиана

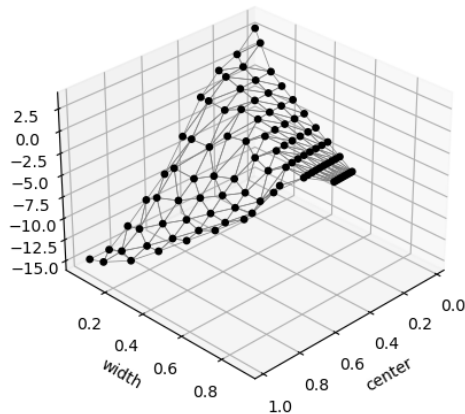


Рис.7. Метод BDC, RMSRE без
малого сингулярного значения

- [3] Guennebaud G., Jacob B. et al., *Eigen v3*, <http://eigen.tuxfamily.org>, 2010.
- [4] Demmel J., Kahan W., “Computing Small Singular Values of Bidiagonal Matrices With Guaranteed High Relative Accuracy”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11**:5 (1990), 873-912.
- [5] Gu M., Eisenstat S., “A Divide-and-Conquer Algorithm for the Bidiagonal SVD”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **16**:1 (1995), 79-92.
- [6] Jessup R., Sorensen D., “A Parallel Algorithm for Computing the Singular Value Decomposition of a Matrix”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1995), 530-548.
- [7] Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 2013.

**Accuracy of algorithms of singular value decomposition for
matrices with various spectra
Drozdov I.Yu., Parfenov D.V.**

We continue to develop our new approach of treating singular spectrum of a matrix as a probability density function to investigate dependencies between accuracy of numerical computation of singular values and spectrum. We conduct massive numerical experiments to

demonstrate such dependencies in our new suggested metrics: root-mean-square relative error and median. We present illustrative plots of such dependencies and analyze conclusiveness of these metrics.

Keywords: singular value decomposition, SVD, condition number, matrix spectrum, numerical stability

References

- [1] Drozdov I.Yu, Parfenov D.V., “Relationship between accuracy of singular value decomposition and distribution of singular values”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, 2023.
- [2] Anderson E. et al., *LAPACK Users' Guide*, SIAM, 1999.
- [3] Guennebaud G., Jacob B. et al., *Eigen v3*, <http://eigen.tuxfamily.org>, 2010.
- [4] Demmel J., Kahan W., “Computing Small Singular Values of Bidiagonal Matrices With Guaranteed High Relative Accuracy”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11**:5 (1990), 873-912.
- [5] Gu M., Eisenstat S., “A Divide-and-Conquer Algorithm for the Bidiagonal SVD”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **16**:1 (1995), 79-92.
- [6] Jessup R., Sorensen D., “A Parallel Algorithm for Computing the Singular Value Decomposition of a Matrix”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1995), 530-548.
- [7] Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 2013.