

Степени разделяющих многочленов для классов Поста

М. В. Носов¹

В работе получены оценки степеней многочленов с действительными коэффициентами, разделяющих нули и единицы булевских функций для классов Поста.

Ключевые слова: классы Поста, разделяющий многочлен.

Пусть B^n – n -мерный единичный куб, $R[x]$ – множество многочленов от n переменных с действительными коэффициентами, $x = (x_1, \dots, x_n)$, P_2 – множество булевых функций. Скажем, что многочлен $f(x)$, $f(x) \in R[x]$ разделяет нули и единицы булевой функции $F(x)$, если

$$F(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \geq 0, \quad F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) < 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n.$$

Такой многочлен $f(x)$ будем называть разделяющим многочленом функции $F(x)$ и обозначать $f \sim F$. Пусть K подмножество множества булевых функций, $K(n)$ подмножество функций множества K , функции из $K(n)$ зависят от n аргументов. Введём обозначение

$$\deg K(n) = \max_{F, F \in K(n)} \min_{f, f \sim F} \deg f(x).$$

Укажем $\deg K(n)$ для всех классов Поста K [1].

Приведём утверждения из [2,3], на которых основаны дальнейшие выводы.

1. Для любой булевой функции от n аргументов степень разделяющего многочлена не превышает n .

2. Пусть $F \in P_2$, B^k – k -мерная грань B^n , пусть $F|_{B^k} \in L$, тогда степень разделяющего многочлена не меньше k . Из этого утверждения следуют два факта.

2.1. Только для двух булевых функций $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ и $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$ степень разделяющего многочлена n .

2.2. Пусть $F \in P_2$, пусть Π^k – k -мерный параллелепипед, вершинами которого являются вершины B^n , пусть на соседних вершинах Π^k функция F принимает разные значения, тогда степень разделяющего многочлена для F не меньше k .

3. $\deg M(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, где M – класс монотонных функций.

¹Носов Михаил Васильевич – с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Далее перечислим оценки для классов Поста, при необходимости приведём соответствующие доказательства (в обозначениях и нумерации будем придерживаться "Сводной таблицы замкнутых классов" [1]).

1. $\text{deg}O_1(n) = 1$. 2. $\text{deg}O_2(n) = 0$. 3. $\text{deg}O_3(n) = 0$. 4. $\text{deg}O_4(n) = 1$.
 5. $\text{deg}O_5(n) = 1$. 6. $\text{deg}O_6(n) = 1$. 7. $\text{deg}O_7(n) = 0$. 8. $\text{deg}O_8(n) = 1$.
 9. $\text{deg}O_9(n) = 1$.

10. $\text{deg}S_1(n) = 1$. Разделяющий многочлен для функции $\bigvee_{i=1}^n x_i$ имеет вид $x_1 + \dots + x_n - 0.5$.

11. $\text{deg}S_3(n) = 1$. 12. $\text{deg}S_5(n) = 1$. 13. $\text{deg}S_6(n) = 1$.

14. $\text{deg}P_1(n) = 1$. Разделяющий многочлен для функции $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ имеет вид $x_1 + \dots + x_n - n$.

15. $\text{deg}P_3(n) = 1$. 16. $\text{deg}P_5(n) = 1$. 17. $\text{deg}P_6(n) = 1$.

18. $\text{deg}L_1(n) = n$. Следует из вышеприведенных фактов.

19. $\text{deg}L_2(n) = n$. 20. $\text{deg}L_3(n) = n$. 21. $\text{deg}L_4(n) = n$, n - нечётное.

22. $\text{deg}L_5(n) = n$, n - нечётное.

23. $2l - 1 \leq \text{deg}D_2(4l) \leq 2l$, $l \geq 2$.

$$2l - 1 \leq \text{deg}D_2(4l + 1) \leq 2l, l \geq 2.$$

$$\text{deg}D_2(4l + 2) = 2l + 1, l \geq 2.$$

$$\text{deg}D_2(4l + 3) = 2l + 1, l \geq 2.$$

Доказательство.

Класс D_2 содержится в классе монотонных функций, поэтому степень разделяющего полинома не превышает $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Рассмотрим четыре случая.

а) $n = 4l + 2$.

$$R = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$$

$$b_1 = (-1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, -1, 1, \dots, 0, 0),$$

.....

$$b_{2l+1} = (0, 0, 0, 0, \dots, -1, 1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l + 1$.

$$\Pi^{2l+1} = \{R + \delta_1 b_1 + \dots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} \mid \delta_1, \dots, \delta_{2l+1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что все вектора параллелепипеда несравнимы между собой, имеют длину $2l + 1$, противоположный вектор к вершине параллелепипеда попадает в параллелепипед. Следовательно, на параллелепипеде можно задать линейную функцию от нечётного числа аргументов, т.е.

самодвойственную. Пусть $S_{2l+1} = \{x \in B^n \mid |x| = 2l + 1\}$ - слой куба, вектора слоя несравнимы между собой, вектор слоя переходит в вектор слоя при взятии противоположного вектора, таким образом, множество векторов слоя вне параллелепипеда можно разбить на пары: (вектор, противоположный вектор). Функцию с параллелепипеда можно продолжить на слой положив на паре разные значения. Наконец, продолжим на весь куб: на вершинах B^{4l+2} выше слоя положим значение 1, на вершинах ниже слоя положим значение 0. В результате получили самодвойственную монотонную функцию, у которой есть параллелепипед размерности $2l + 1$, на котором функция линейна. Следовательно, степень разделяющего многочлена не меньше $2l + 1$. Значит, $\deg D_2(4l + 2) = 2l + 1$.

б) $n = 4l + 3$.

$$R = (0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$$

$$b_1 = (1, -1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, 0, -1, 1, \dots, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, \dots, 0, 0),$$

.....

$$b_{2l+1} = (0, 0, 0, 0, \dots, -1, 1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l + 1$.

$$\Pi^{2l+1} = \{R + \delta_1 b_1 + \dots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} \mid \delta_1, \dots, \delta_{2l+1} \in \{0, 1\}\}$$

Пусть

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} \mid \delta_2, \dots, \delta_{2l+1} \in \{0, 1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} \mid \delta_2, \dots, \delta_{2l+1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \bar{u} \in W$, для $w \in W, \bar{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l+1} зададим линейную функцию, на $S^{2l+2} \setminus U$ функция равна 1, на $S^{2l+1} \setminus W$ функция равна 0, ниже слоя S^{2l+1} равна 0, выше слоя S^{2l+2} равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $\deg D_2(4l + 3) = 2l + 1$.

в) $n = 4l + 1$.

$$n = 4l + 1 = 2(2l - 2) + 5.$$

$$R = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

$$b_1 = (-1, -1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \dots, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \dots, 0, 0),$$

.....

$$b_{2l-1} = (0, 0, 0, 0, \dots, 1, -1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l - 1$.

$$\Pi^{2l-1} = \{R + \delta_1 b_1 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_1, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \bar{u} \in W$, для $w \in W, \bar{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l-1} зададим линейную функцию, на $S^{2l+1} \setminus U$ функция равна 1, на $S^{2l} \setminus W$ функция равна 0, ниже слоя S^{2l} равна 0, выше слоя S^{2l+1} равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $\deg D_2(4l + 1) \geq 2l - 1$.

г) $n = 4l$.

$$n = 4l = 2(2l - 2) + 4.$$

$$R = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

$$b_1 = (-1, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, 0, 0, 1, -1, \dots, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \dots, 0, 0),$$

.....

$$b_{2l-1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 1, -1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l - 1$.

$$\Pi^{2l-1} = \{R + \delta_1 b_1 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_1, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2, \dots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \bar{u} \in W$, для $w \in W, \bar{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l-1} зададим линейную функцию, на $S^{2l} \setminus U \cup W$ функцию зададим аналогично пункту а) – разобьём на пары (вектор, противоположный вектор), положив на паре разные значения, ниже слоя S^{2l} функция равна 0, выше слоя S^{2l} функция равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $\deg D_2(4l) \geq 2l - 1$.

$$24. \deg D_1(n) = n - 1, n\text{--чётное,}$$

$$\deg D_1(n) = n, n\text{--нечётное.}$$

Доказательство.

а) n –нечётное. Тогда $D_1 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, значит $\deg D_1(n) = n$.

б) n –чётное. Тогда $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \notin D_1$ и $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1 \notin D_1$, значит $\deg D_1(n) \leq n - 1$, но $D_1 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1}$, значит $\deg D_1(n) = n - 1$.

$$25. \deg D_3(n) = n - 1, n\text{--чётное,}$$

$$\deg D_3(n) = n, n\text{--нечётное.}$$

Доказательство аналогично предыдущему пункту.

$$26. \deg A_1(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor [2, 3].$$

$$27. \deg A_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor [2, 3].$$

$$28. \deg A_3(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor [2, 3].$$

$$29. \deg A_4(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor [2, 3].$$

$$30. \deg C_1(n) = n.$$

$$31. \deg C_2(n) = n.$$

Доказательство.

а) n –нечётное. Тогда $C_2 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, значит $\deg C_2(n) = n$.

б) n –чётное. Тогда $C_2 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$, значит $\deg C_2(n) = n$.

$$32. \deg C_3(n) = n.$$

Доказательство.

$C_3 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, значит $\deg C_3(n) = n$.

$$33. \deg C_4(n) = n - 1, n\text{--чётное,}$$

$$\deg C_4(n) = n, n\text{--нечётное.}$$

Доказательство.

а) n –нечётное. Тогда $C_4 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, значит $\deg C_4(n) = n$.

б) n –чётное. Тогда $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \notin C_4$ и $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1 \notin C_4$, значит $\deg C_4(n) \leq n - 1$, но $C_4 \ni x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1}$, значит $\deg C_4(n) = n - 1$.

$$34. F_1^\mu(n) = n - 1.$$

Доказательство.

а) n –чётное. Тогда $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \notin F_1^\mu$ и $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1 \notin F_1^\mu$, значит $\deg F_1^\mu(n) \leq n - 1$.

б) n –нечётное. Очевидно, что $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1 \notin F_1^\mu$. Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ является α - функцией, но не удовлетворяет условию

$\langle a^\mu \rangle$, например, на наборах $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)$ и $(0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1)$.
Значит $\deg F_1^\mu(n) \leq n - 1$.

Возьмём

$$H(x) = x_n \vee (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in \deg F_1^\infty \subset \deg F_1^\mu$. Ограничение $H|_{x_n=0}$ — линейная функция от $n - 1$ аргументов, следовательно, разделяющий полином для $H(x)$ имеет степень не меньше $n - 1$. Значит $\deg F_1^\mu(n) = n - 1$, одновременно доказано $\deg F_1^\infty(n) = n - 1$.

$$35. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_2^\mu(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Доказательство.

Класс $\deg F_2^\mu \subset M$, значит $\deg F_2^\mu(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Возьмём функцию $F(x_1, \dots, x_n)$ следующего вида

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_n \vee H(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $H(x_1, \dots, x_{n-1})$ — монотонная функция от $n - 1$ аргумента, для которого разделяющий полином $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ имеет степень не меньше $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Очевидно, что $F(x) \in \deg F_2^\infty \subset \deg F_2^\mu$. Для $F(x)$ в качестве разделяющего полинома $f(x)$ можно взять

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n + \varepsilon h(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Так как $F|_{x_n=0} = H$, то степень полинома понизить нельзя. Это доказательство проходит и для $F_2^\infty(n)$.

$$36. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_3^\mu(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Доказательство аналогичное п.35, оно же проходит для $F_3^\infty(n)$.

$$37. \deg F_4^\mu(n) = n - 1.$$

Возьмём

$$H(x) = x_n \vee (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in \deg F_4^\infty \subset \deg F_4^\mu$. Ограничение $H|_{x_n=0}$ — линейная функция от $n - 1$ аргументов, следовательно, разделяющий полином для $H(x)$ имеет степень не меньше $n - 1$. Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

а) n — чётное. Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ равна 0 на всех единицах, функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$, зануляется на наборах $(0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)$ без общей нулевой компоненты. Обе не лежат в $\deg F_4^\mu(n)$.

б) n — нечётное. Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ зануляется на наборах $(0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)$ без общей нулевой компоненты,

функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$ равна 0 на всех единицах. Обе не лежат в $\text{deg}F_4^\mu(n)$.

Это доказательство проходит и для $F_4^\infty(n)$.

38. $\text{deg}F_5^\mu(n) = n - 1$.

Доказательство.

Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

а) n — чётное. Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ не является α -функцией, функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$, равна 1 на нулевом наборе. Обе не лежат в $F_5^\mu(n)$.

б) n — нечётное. Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ равна 1 на наборах $(1, 0, \dots, 0)$ и $(0, 1, 0, \dots, 0)$ без общей единичной компоненты, функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$, равна 0 на всех единицах. Обе не лежат в $F_5^\mu(n)$.

Таким образом, $\text{deg}F_5^\mu(n) \leq n - 1$.

Рассмотрим два случая.

а) n — чётное.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in F_5^\infty \subset F_5^\mu$. Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1}$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n - 1$.

б) n — нечётное.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \oplus 1)$$

Очевидно, $H(x) \in F_5^\infty \subset F_5^\mu$. Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \oplus 1$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n - 1$.

В итоге получаем требуемое $\text{deg}F_5^\mu(n) = n - 1$. Это доказательство проходит для $F_5^\infty(n)$.

39. $[\frac{n-1}{2}] \leq \text{deg}F_6^\mu(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Доказательство.

Класс $\text{deg}F_6^\mu \subset M$, значит $\text{deg}F_6^\mu(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Возьмём функцию $F(x_1, \dots, x_n)$ следующего вида

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_n \cdot H(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $H(x_1, \dots, x_{n-1})$ — монотонная функция от $n - 1$ аргумента, для которого разделяющий полином $h(x_1, \dots, x_{n-1})$ имеет степень не меньше $[\frac{n-1}{2}]$. Очевидно, что $F(x) \in \text{deg}F_6^\infty \subset \text{deg}F_6^\mu$. Это доказательство проходит и для $F_6^\infty(n)$.

40. $[\frac{n-1}{2}] \leq \text{deg}F_7^\mu(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Доказательство аналогично п.39, оно же проходит и для $\text{deg}F_7^\infty(n)$.

$$41. \deg F_8^\mu(n) = n - 1.$$

Доказательство.

Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

Функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ равна 1 на наборах $(1, 0, \dots, 0)$ и $(0, 1, 0, \dots, 0)$ без общей единичной компоненты, функция $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$, равна 1 на всех нулях. Обе функции не лежат в $F_8^\mu(n)$.

Таким образом, $\deg F_8^\mu(n) \leq n - 1$.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in F_8^\infty \subset F_8^\mu$. Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1}$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n - 1$.

В итоге получаем требуемое $\deg F_8^\mu(n) = n - 1$. Это доказательство проходит для $F_8^\infty(n)$.

$$42. \deg F_1^\infty(n) = n - 1.$$

См. п. 34.

$$43. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_2^\infty(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

См. п. 35.

$$44. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_3^\infty(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

См. п. 36.

$$45. \deg F_4^\infty(n) = n - 1.$$

См. п. 37.

$$46. \deg F_5^\infty(n) = n - 1.$$

См. п. 38.

$$47. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_6^\infty(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

См. п. 39.

$$48. \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \deg F_7^\infty(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

См. п. 40.

$$49. \deg F_8^\infty(n) = n - 1.$$

См. п. 41.

Автор благодарит Алёшина С.В. за постановку задачи, многочисленные обсуждения в процессе её решения, ценные советы и предложения.

Список литературы

[1] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Издательство Наука, Москва, 1966, 119.

[2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. Издательство Московского университета, Москва, 1996, 97.

[3] Носов М.В. Оценка степеней разделяющих многочленов для монотонных и самодвойственных функций. Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 27:2 (2023), 79-82.

Degrees of separating polynomials for Post's classes
Nosov M.V.

In this paper, estimates of the degrees of polynomials with real coefficients separating zeros and ones of Boolean functions for Post's classes are obtained. Post's classes, separating polynomial.

References

- [1] Yablonsky S.V., Gavrilov G., P., Kudryavtsev V.B., *Functions of the algebra of logic and Post's classes.*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian), 119 с.
- [2] Aleshin S.V., *Dynamic image recognition.*, Moscow University Press, Moscow, 1996 (In Russian), 97 с.
- [3] Nosov M.V., "Estimates of the degrees of separating polynomials for monotone and self-dual functions.", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **27:2** (2023), 79–82 (In Russian)