О числе состояний автомата, модифицирующего свою диаграмму

Д. О. Масленников[1]

Вводятся понятия правила - пары слов одинаковой длины, и результата применения его к конечному инициальному автомату, когда в случае вывода первого слова из этой пары оно заменяется на диаграмме на второе.

В работе исследуется результат применения правила к автомату, как словарная функция и как реализующий её конечный автомат. Показана эквивалентность двух определений результата применения правила к автомату. Показано, что он реализует ограниченно-детерминированную функцию. Получены оценки на наибольшее и наименьшее число состояний соответствующего ей приведённого конечного инициального автомата.

Ключевые слова: конечный инициальный автомат, самомодифицирующийся конечный автомат, диаграмма Мура.

1. Введение

В этой работе рассмотрим модификацию детерминированного конечного автомата: пусть по диаграмме автомата перемещается головка машины Тьюринга, как по ленте, а сама машина работает так, что её поведение совпадает с обычной работой автомата, пока выводом не окажется определённое слово, тогда машина, вернувшись назад, исправляет на рёбрах его на другое. Будет доказано, что такая конструкция будет эквивалента некоторому автомату, и будут даны оценки наибольшего и наименьшего числа состояний этого автомата.

Изменяющиеся автоматы рассматривались и ранее. Например, Я. М. Барздинь в работах [1, 2] рассмотрел логические сети, в которых соединения между элементами меняются со временем.

Рой С. Рубинштейн и Джон Н. Шатт в [3] предложили модель самомодифицирующегося конечного автомата (self-modifying finite automaton)— недетерминированного автомата, который может модифицировать себя во время перехода из одного состояния в другое, добавляя или удаляя переходы и состояния.

М. Костер и Дж. Тейч в [4] рассмотрели реконфигурирующийся конечный автомат (reconfigurable finite state machine)— детерминирован-

[1] *Масленников Денис Олегович* — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: denismaslenikov01@mail.ru.

Maslenikov Denis Olegovich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

ный автомат, который при переходе из одного состояния в другое может изменить входное состояние и выводимый символ этого перехода, причём то, какой переход будет выполнен и какие изменения произойдут, зависит не только от входного символа, но и от состояния реконфигурации, которое подаётся извне. Если же оно генерируется частью системы, то такой автомат называется самореконфигурирующимся конечным автоматом (self-reconfigurable finite state machine).

В данной работе будет рассмотрена модель наиболее похожая на самореконфигурирующийся конечный автомат, однако, в отличие от автомата, рассмотренного в статье Костера и Тейча, в автомате, описанном в этой статье, возможно изменение выходных символов на нескольких переходах, но, с другой стороны, не допускается изменение самих переходов.

2. Определения и основные результаты

Введем ряд определений.

2.1. Определения

Правилом длины l над алфваитом B называется пара слов $(b_1 b_2 \ldots b_l, b'_1 b'_2 \ldots b'_l)$ из символов алфавита A. Также введём обозначения: $l(r) = l$, $R_B = \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} (B^l \times B^l)$ - множество правил над алфавитом A.

$\mathcal{Q}(V) = Q$, где $V = (A, Q, B, \psi, \phi, q(1))$.

$\Psi_{A,B} = \{\psi : Q \times A \to B\}$ - множество функций вывода, где Q - некоторое фиксированное множество состояний.

$V_{A,B}$ - множество автоматов с входным и выходным алфавитом A и B соответственно и множеством состояний Q.

Модифицируем работу иниициального автомата V следующим образом: пусть есть правило $r = (\alpha, \beta)$ длины n над выходным алфавитом. Тогда если в какой-то момент суффикс длины n выходного слова равен α, то в диаграмме Мура на последних n пройденных рёбрах заменяем выходные символы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно, начиная с первого и заканчивая последним. Далее функционирование автомата продолжается из последнего состояния по обновлённой диаграмме Мура. Полученное "устройство"отображает входные слова в выходные, то есть реализует некоторую словарную функцию, которую будем называть *результатом применения правила r к диаграмме автомата V*.

Получившуюся функцию вывода будем обозначать $\chi(V, r, \gamma)$, где γ - входное слово.

Приведём два примера.

Пример 1. Пусть автомат V имеет диаграмму, как на Рис. 1, начальное состояние - q_1 (здесь и дальше будем обозначать текущее состояние "звёздочкой"), $r = (101, 110)$, а входное слово - (111), тогда будет выведено слово (101). При этом будут пройдены рёбра, отмеченные на Рис. 2 нижними индексами, обозначающими порядок их прохода, и диаграмма примет вид, как на Рис. 3.

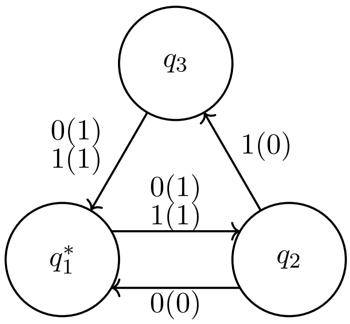

Рис.1

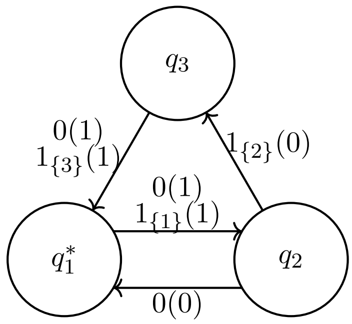

Рис.2

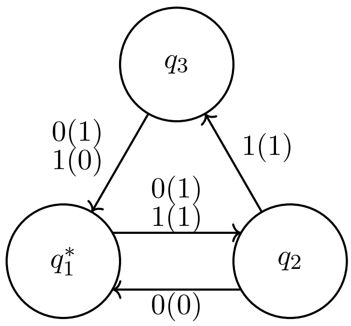

Рис.3

Пусть теперь входное слово - (11111). В соответствии с Рис. 3, будет выведено (10111).

Пример 2. Пусть автомат и правило те же, что и в примере 1 (Рис. 4), а входное слово (000). Заметим, что $\psi(q_1, 0)$ переписывается два раза подряд (Рис. 5). Поскольку β записывается, начиная с первого символа, $\psi(q_1, 0)$ в итоге равно 0, поэтому выводится слово (101), и диаграмма принимает вид, как на Рис. 6. Пусть теперь входное слово - (00011), тогда будет выведено (10101). Далее будем нумеровать рёбра так, чтобы были занумерованы только те рёбра, которые дали последнее 101 (Рис. 7). Видим, что диаграмма после вывода пятого символа выходного слова примет вид, как на Рис. 8.

Множества, записанные в нижние индексы и нумерующие рёбра по порядку вывода первого слова правила, будем обозначать $I^{\alpha}_{q,x}$, где α -

входное слово. Если же ребро не было пройдено за последние l шагов, где l - длина правила, то считаем их пустыми. В примере их запись опущена.

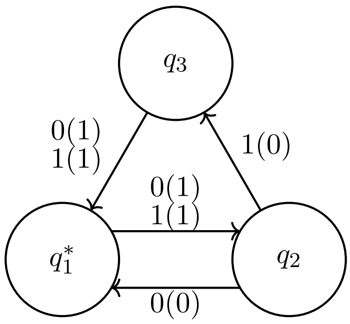

Рис.4

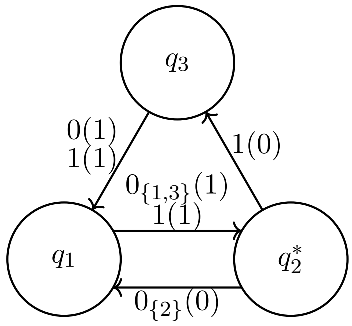

Рис.5

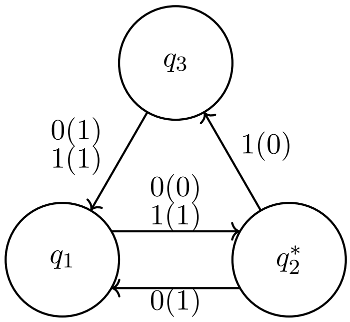

Рис.6

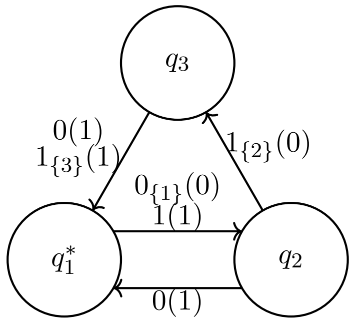

Рис.7

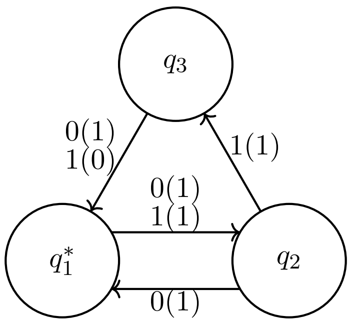

Рис.8

Приведём формальное определение эквивалентное данному.

Результатом применения правила $r \in B$ *к инициальному автомату* $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q(1))$ называется словарная функция $\omega(V, r)$, где $\omega : V_{A,B} \times R_B \to P_{A,B}$ такая, что
$\omega_t(V, r)(x_1 \dots x_t) = \chi(V, r, x_1 \dots x_{t-1})(q(t), x_t)$; $q(t) = \phi(q(t-1), x_{t-1})$;

$\chi \colon V_{A,B} \times R_B \times A^* \to \Psi_{A,B}$; $\chi(V, r, \Lambda) = \psi$;
$\chi(V, r, x_1 \dots x_t)(q, x) =$
$$= \begin{cases} b'_{\max I_{q,x}^{x_1 \dots x_t}}, \text{если } t \geqslant l,\ \omega(V,r)(x_1 \dots x_t) = \dots b_1 \dots b_l \text{ и } I_{q,x}^{x_1 \dots x_t} \neq \varnothing; \\ \chi(V, r, x_1 \dots x_{t-1})(q, x), \text{иначе,} \end{cases}$$
где Λ - пустое слово, и в нижний индекс b равен максимуму множества $I_{q,x}^{x_1 \dots x_t} = \{i \in 1 \dots l | q(t - l + i) = q, x_{t-l+i} = x\}$.

Имеем два определения - строгое и более наглядное. Далее покажем их эквивалентность.

Утверждение 1. *Результат применения правила r к автомату V равен результату применения правила r к диаграмме автомата V.*

Доказательство. Заметим, $q(t)$ совпадает с состоянием автомата V в t-й момент времени. Далее, по предположению индукции, ω совпадает с результатом применения правила r к диаграмме автомата V. Одновременно $\chi(V, r, x_1 \dots x_t)$ совпадает с функцией вывода ψ после того, как на вход поступило слово $x_1 \dots x_t$. Последнее, очевидно, верно при $\gamma = \Lambda$. Также несложно заметить, что $I_{q,x}^{x_1 \dots x_t}$ из обоих определений - одно и то же. Пусть значение результата применения правила r к диаграмме автомата V оканчивается на $b_1 \dots b_l$, что по предположению индукции означает $\omega(V,r)(x_1 \dots x_t) = \dots b_1 \dots b_l$. Тогда для всех q и x таких, что $I_{q,x}^{x_1 \dots x_t} \neq \varnothing$ на соответствующем ребре поочерёдно записываются выходные символы b'_i, где i из $I_{q,x}^{x_1 \dots x_t}$ возрастает. То есть, для таких q и x выполняется $\psi = b'_{\max I_{q,x}^{x_1 \dots x_t}} = \chi(V, r, x_1 \dots x_t)(q, x)$. В остальных случаях функция вывода не меняется, то есть $\psi = \chi(V, r, x_1 \dots x_{t-1}) = \chi(V, r, x_1 \dots x_t)$. Итак, мы доказали предположение индукции для χ. Отсюда следует, что t-й выходной элемент результата применения правила r к диаграмме автомата V равен $\chi(V, r, x_1 \dots x_{t-1})(q(t), x_t)$. Таким образом, предположение индукции верно для ω, то есть результат применения правила к автомату совпадает с результатом применения правила r к диаграмме автомата V. ■

2.2. Верхняя оценка наибольшего числа различимых состояний

Теорема 1. *Пусть α и β - слова длины l. Результат применения правила $r = (\alpha, \beta)$ к автомату $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q(1))$ является ограниченно-детерминированной функцией, имеющей не более чем $Cn|B|^{n|A|}$ остаточных функций, где $n = |Q|$ и*

$$C = \begin{cases} \frac{|A|^l - 1}{|A| - 1}, & |A| \neq 1; \\ l, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Возьмём автомат $\tilde{V} = (A, \tilde{Q}, B, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}(1))$, где

$$\tilde{Q} = \bigcup_{i=0}^{l-1} A^i \times Q \times \Psi;$$

$\tilde{\phi}((a_1, \dots, a_i, q, \psi'), a) = (a_m, \dots, a_i, a, \phi(q, a_1 \dots a_{m-1}), \chi'(a_1, \dots, a_i, a, q, \psi'))$;
m такое, что слово
$\alpha_m \dots \alpha_i \tilde{\psi}((a_1, \dots, a_i, q, \psi'), a)$ - наибольший суффикс слова
$\alpha_1 \dots \alpha_i \tilde{\psi}((a_1, \dots, a_i, q, \psi'), a)$, являющийся собственным префиксом α;

$$\chi'(a_1, \dots, a_i, a, q, \psi')(q', x) =$$

$$= \begin{cases} \beta_{\max I_{q',x}}, & \text{если } i = l-1,\ \tilde{\psi}((a_1, \dots, a_i, q, \psi'), a) = \alpha_l \text{ и } I_{q',x} \neq \varnothing; \\ \psi'(q', x), & \text{иначе;} \end{cases}$$

$I_{q',x} = \{i \in 1 \dots l | \phi(q, a_1 \dots a_{i-1}) = q', a_i = x\}$; $\tilde{\psi}((a_1, \dots, a_i, q, \psi'), a) = \psi'(q, a_1 \dots a_i a) =$
$= \psi'(\phi(q, a_1 \dots a_i), a)$; $\tilde{q}(1) = (q(1), \psi)$. (В определении $I_{q',x}$ считаем, что $\phi(q, a_1, a_0) = q$, и $a_l = a$.)
Возьмём в качестве предположения индукции, что автомат соответствует результату применения правила r к автомату V. Заметим, что в таком случае также по индукции получаем
$\tilde{\phi}(\tilde{q}(1), \gamma) = (\gamma_{t-i+1}, \dots, \gamma_t, \phi(q(1), \gamma_1 \dots \gamma_{t-i}), \psi')$,
где t - длина γ; i - длина наибольшего суффикса выходного слова, являющегося собственным префиксом α; $\psi' = \chi(V, r, \gamma)$ из определения результата применения правила к автомату.
Исходя из этого, верно предположение индукции, так как $\tilde{\psi}(\tilde{q}(1), \gamma a) =$
$= \tilde{\psi}(\tilde{\phi}(\tilde{q}(1), \gamma), a) = \tilde{\psi}((\gamma_{t-i+1}, \dots, \gamma_t, \phi(q(1), \gamma_1 \dots \gamma_{t-i}), \psi'), a) =$
$= \psi'(\phi(q(1), \gamma_1 \dots \gamma_{t-i}), \gamma_{t-i+1} \dots \gamma_t a) =$
$= \psi'(\phi(\phi(q(1), \gamma_1 \dots \gamma_{t-i}), \gamma_{t-i+1} \dots \gamma_t), a) = \psi'(\phi(q(1), \gamma_1 \dots \gamma_t), a) =$
$= \psi'(q(t+1), a) = \chi(V, r, \gamma)(q(t+1), a) = \omega_{t+1}(V, r)(\gamma a)$.
Следовательно, число различимых состояний не больше, чем число состояний $\tilde{V}$, то есть
$n|B|^{n|A|} \sum_{i=0}^{l-1} |A|^i = n\frac{|A|^l - 1}{|A| - 1}|B|^{n|A|}$ при $|A| > 1$ и $nl|B|^{n|A|}$ при $|A| = 1$. ■

В силу того, что результатом является ограниченно детерминированная функция, будем считать, что результатом также является конечный автомат приведённого вида. Обозначим его V_r.

2.3. Нижняя оценка наибольшего числа состояний

Перед тем, как рассмотреть вторую теорему о максимальном числе состояний, приведём пример.

Пример 3. Рассмотрим автомат на Рис. 9:

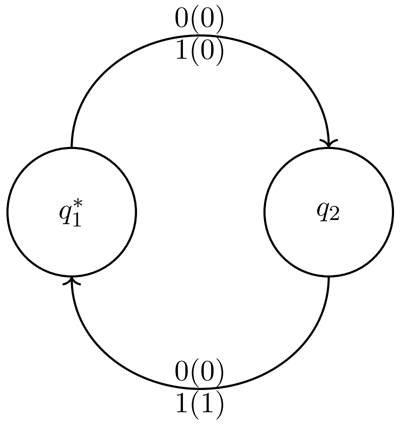

Рис.9

Применим к нему правило $r = (0, 1)$. И построим в явном виде V_r. Заметим, что, поскольку r - правило длины 1, состояние V_r определяется текущими функцией вывода (диаграммой) и состоянием V с точностью до перестановки состояний. Например, если мы имеем диаграммы, как на Рис. 10, то в автомате V_r мы будем иметь одно и то же состояние.

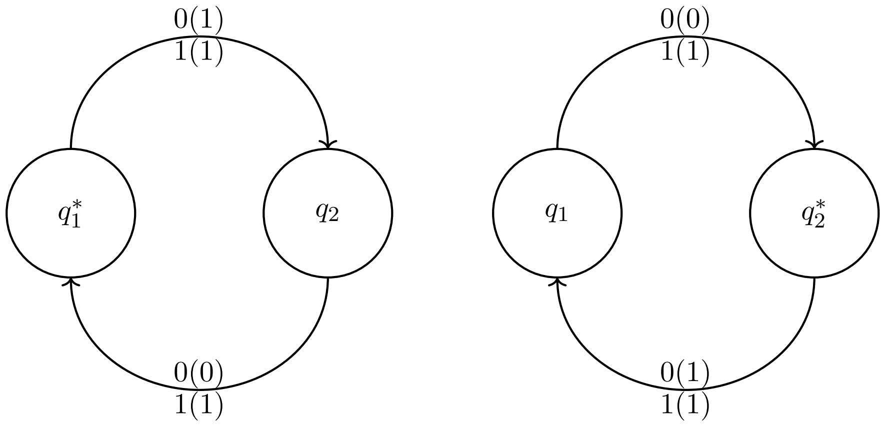

Рис.10

Выпишем все возможные диаграммы с точностью до перестановки состояний, считая, что текущее состояние на каждой расположено слева, и обозначим их, как состояния V_r (Рис. 11). Устанавливаем функцию переходов и получаем диаграмму на Рис. 12.

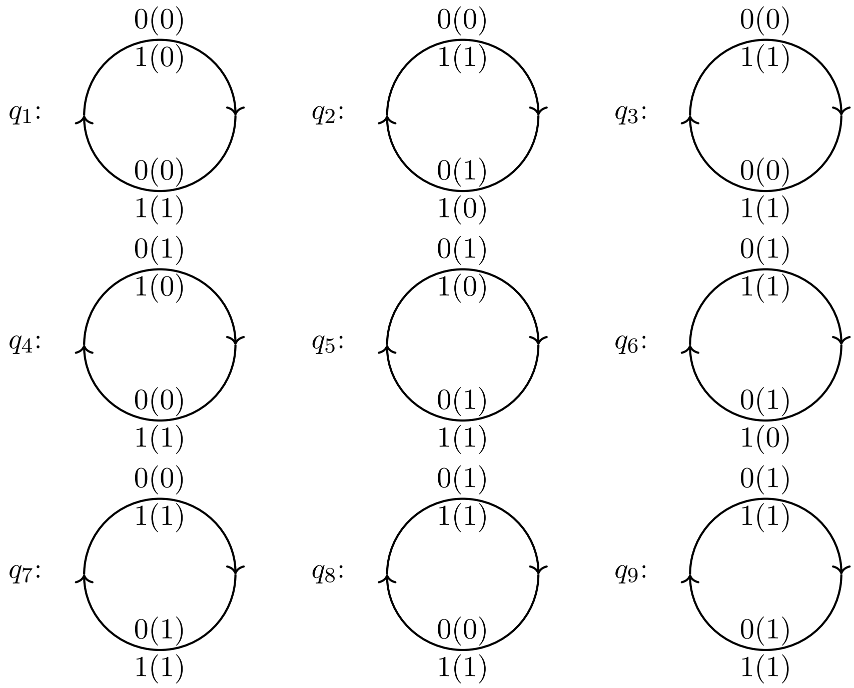

Рис.11

Рассмотрим более общий случай. Возьмём автомат V^n на Рис. 13 и правило $r = (0,1)$.

Теорема 2. *V_r^n имеет $3^n + 2^{n-1} - 2$ состояний.*

Доказательство. Заметим, что в общем случае так же, как и в примере выше, состояние V_r^n определяется диаграммой и текущим состоянием с точностью до перестановок вида $\sigma_k(q_i) = q_{i+k \mod n}$ состояний автомата V^n. Так, если текущее состояние - q_i, а диаграммы отличаются значением $\psi(q_{i+j \mod n}, a)$, то отличающим словом будет a^{j+1}.

Пусть $t \leqslant n-1$, тогда в t-й момент времени автомат V^n пришёл в состояние q_t. Есть ровно $n-t$ состояния q таких, что $\psi(q,x) \equiv 0$, и могло быть получено на вход 2^{t-1} различных слов, каждое из которых приводит к разной диаграмме. Итого, за первые $n-1$ момента времени можем получить $\sum\limits_{t=1}^{n-1} 2^{t-1} = 2^{n-1} - 1$ различные диаграммы.

Начиная с момента n диаграмма удовлетворяет условию: $\nexists q : \psi(q,x) \equiv 0$. Поэтому начиная с него автомат V_r^n принимает состояния отличные от тех, что мог принять ранее. Более того, автомат V^n может дойти из состояния в состояние, не изменив диаграмму. Также выполнено второе условие на диаграмму: $\exists q : \psi(q,1) = 1$. Зафиксировав с помощью перестановок текущее состояние q_1 автомата V^n (состояние как бы

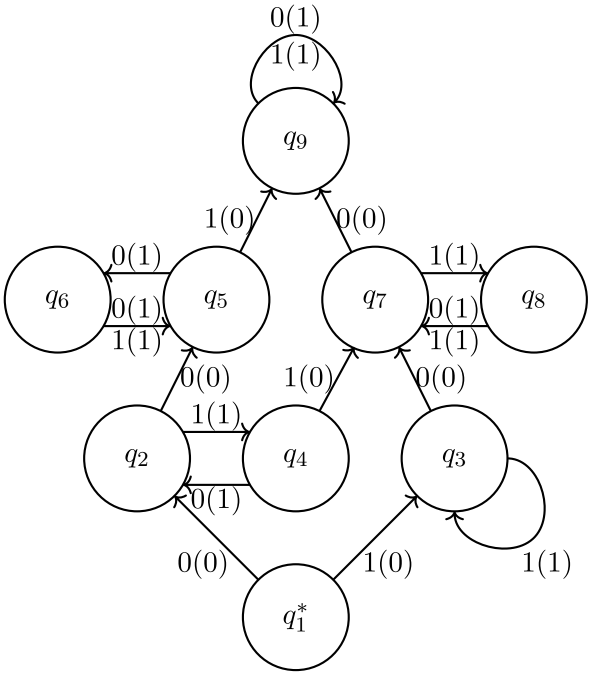

Рис.12

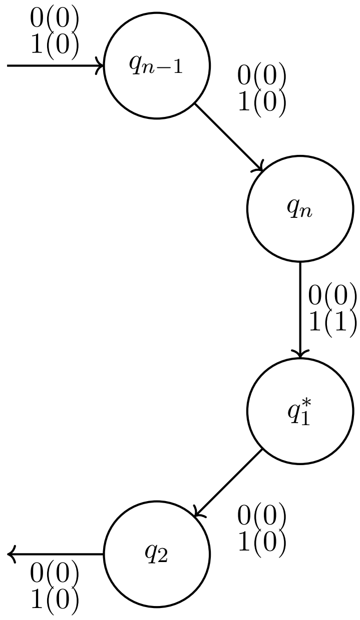

Рис.13

не движется по диаграмме по кругу, а диаграмма «поворачивается» вокруг центра против часовой стрелки), можем получить любую диаграмму, удовлетворяющую этим двум условиям. Пройдя по соответствующим ребрам, можно получить требуемую диаграмму, а единственную единицу на выходе в исходной диаграмме поставить «поворотами» диаграммы после состояния q в соответствии со вторым условием. Существует 3^n диаграмм, удовлетворяющих первому условию. Из них не удовлетворяет при этом второму ровно одна, так как имеем $\psi(q,1) \equiv 0$ и, исходя из этого равенства и первого условия, $\psi(q,0) \equiv 1$.

Итого, имеем $(2^{n-1}-1)+(3^n-1) = 3^n+2^{n-1}-2$ различных состояния автомата V_r^n. ∎

Следствие 1. *Пусть* $|A| = |B| = 2$, *тогда*

$$3^n + 2^{n-1} - 2 \leqslant \max_{|\mathcal{Q}(V)|=n, l(r)=1} |\mathcal{Q}(V_r)| \leqslant n4^n.$$

2.4. Наименьшее число состояний

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такой автомат V с n состояниями и правило r такие, что V_r имеет одно состояние. Достаточно взять в качестве V автомат с одним достижимым состоянием, выводящий всегда 1, а в качестве r правило $(0,1)$. Теперь будем требовать, чтобы автомат V был приведённый.

Теорема 3. $\min\limits_{|\mathcal{Q}(V)|=n} |\mathcal{Q}(V_r)| \leqslant [\frac{n}{2}]+1$, *где минимум берётся по автоматам приведённого вида, и всем правилам.*

Доказательство. Возьмём автомат V, как на Рис. 14, и $r = (0^l 1, 10^l)$, $2l < n$, $m = l+1$. Заметим, что автомат примет состояние q_n через $n-l-1 > l-1$ момент, то есть в $(n-l)$-й момент автомат выведет 1, и диаграмма примет вид, как на Рис. 15.

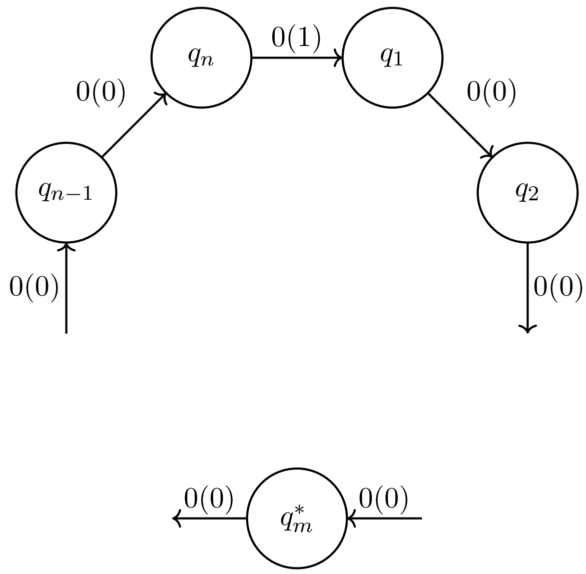

Рис.14

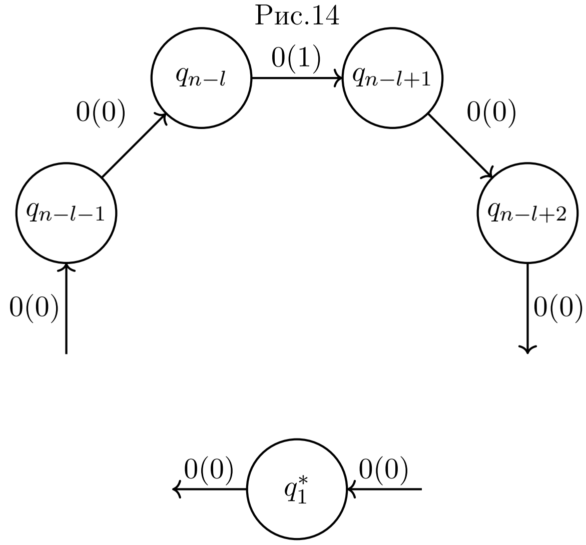

Рис.15

Автомату потребуется $n-l-1$ момент, чтобы прийти в состояние q_{n-l}, то есть он вернулся к изначальному положению. Таким образом, автомат V_r выводит слово $(0^{n-l-1}1)^\infty$. Другими словами, он представляет собой автомат аналогичный исходному, но с числом состояния равному $n-l$. Возьмём $l = [\frac{n-1}{2}]$, тогда число состояний V_r равно $[\frac{n}{2}]+1$. ∎

3. Заключение и выводы

В этой работе были получены оценки на наибольшее и наименьшее число состояний результата применения правила к автомату. Наибольшее число состояний экспоненциально зависит от числа состояний исходного автомата. При этом приведён пример автомата и правила, что после применения правила возникает экспоненциальное количество отличимых состояний. Также было показано, что возможны невырожденные случаи, когда результат имеет меньшее количество состояний.

4. Благодарность

Выражаю благодарность своему научному руководителю А. П. Соколову.

Список литературы

[1] Барздинь Я. М., “Универсальные пульсирующие элементы”, *Докл. АН СССР*, **157**:2 (1964), 291–294.

[2] Барздинь Я. М., “Проблемы универсальности в теории растущих автоматов”, *Докл. АН СССР*, **157**:3 (1964), 542–545.

[3] Roy S. Rubinstein, John N. Shutt, “Self-Modifying Finite Automata”, *IFIP Congress*, 1993.

[4] M. Koster, J. Teich, “(Self-)reconfigurable Finite State Machines: Theory and Implementation”, *Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, 2002, 559–566.

About number of states of automaton modifying its diagram

Maslenikov D. O.

Definitions of a rule and a result of applying it to a finite automaton are introduced.

The present paper considers the result of applying the rule to the automaton as a boundedly deterministic function and a finite automaton that realizes this function.

Equivalence of two definitions of a result of applying a rule to an automaton is proved. The paper provides estimations of largest and smallest number of states of the automaton.

Keywords: finite automaton, self-modifying finite state machine, Moore diagram.

References

[1] Barzdin Ya. M., "Universal pulsating elements", *Report of Academy of Sciences of the Soviet Union*, **157**:2 (1964), 291–294 (in Russian).

[2] Barzdin Ya. M., "Problems of universality in theory of growing automata", *Report of Academy of Sciences of the Soviet Union*, **157**:3 (1964), 542–545 (in Russian).

[3] Roy S. Rubinstein, John N. Shutt, "Self-Modifying Finite Automata", *IFIP Congress*, 1993.

[4] M. Koster, J. Teich.M. Koster, J. Teich, "(Self-)reconfigurable Finite State Machines: Theory and Implementation", *Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, 2002, 559–566.