Замкнутые классы в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис[1]

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

Мы рассматриваем функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции, и для этой системы исследуем задачу о замкнутых классах (структура, базис, число конечных и бесконечных замкнутых классов). Это обусловлено тем, что проблема полноты решается с помощью (максимальных) замкнутых классов.

В настоящей статье для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами:

1) описаны в явном виде все конечные замкнутые классы;
2) найдено число всех конечных замкнутых классов, всех бесконечных замкнутых классов и всех замкнутых классов;
3) изучена задача о базисах замкнутых классов, а именно, установлено, что существует замкнутый класс, имеющий конечный базис, существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис, и существует замкнутый класс, не имеющий базиса; приведены конкретные примеры соответствующих замкнутых классов;

[1] *Алексиадис Никос Филиппович* — доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования Института информационных и вычислительных технологий Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru.

Aleksiadis N. Ph. — associate professor, National Research University «MPEI», Instityte of Information and Computation Technologies, Chair of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Chair of Mathematical and Computer Modeling

4) найдено число замкнутых классов, имеющих конечный базис, число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, и число замкнутых классов, не имеющих базиса.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, замкнутый класс, рациональная функция.

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о замкнутых классах рациональных функций с рациональными коэффициентами, сделанного в 2021 году на XII Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», посвященной 85-летию со дня рождения профессора В.Б. Кудрявцева [1], и ее можно считать продолжением моих статей [2] – [4] о проблеме полноты для полиномиальных и рациональных функций.

Несмотря на то, что мы используем стандартную терминологию дискретной математики, в частности, теории функциональных систем (см. [5] и [6]), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые моменты.

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т.е. функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F, которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A.

Множество A ($A \subseteq F$) называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Множество $A(A \subseteq F)$ называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой.*

Полная система называется *базисом* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если никакая ее собственная подсистема не является полной в $\mathbf{F}$, т.е. базис – это минимальная полная система в ф.с. $\mathbf{F}$.

Аналогично определяются полная система и базис любого замкнутого класса в $\mathbf{F}$.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из центральных проблем является *проблема полноты, состоящая в описа-*

нии всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с. $\boldsymbol{F} = (F, O)$, т.е. $[A] = F$.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем. В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных замкнутых классов). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стал традицией).

Следовательно, при исследовании проблемы полноты одной из основных задач является задача о замкнутых классах.

В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов, а также в отсечении негативных ситуаций.

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных чисел (включая 0),

Q — множества всех рациональных чисел,

$|A|$ — мощность множества A.

c_0 — мощность счетного множества.

$c = 2^{c_0}$ — мощность континуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами

Определим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функция вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{g(x_1, \ldots, x_n)}{h(x_1, \ldots, x_n)},$$

где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *$rq-$функциями.* Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Говорят, что $rq-$функция $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если существуют такие два набора

$$(c_1, ..., c_{i-1}, a, c_{i+1}, ..., c_n) \text{ и } (c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n)$$

значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$, что

$$f(c_1, ..., c_{i-1}, a, c_{i+1}, ..., c_n) \neq f(c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной* функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Если x_i не является существенной переменной функции

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n),$$

то она называется *фиктивной переменной* данной функции.

Пусть

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \text{ и } g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

две $rq-$функции и пусть x_i фиктивная переменная функции

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Если для любых $c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n$ значений переменных

$$x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$$

имеем

$$f(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n) = g(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n),$$

то говорят, что

$$g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \text{ получается из } f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$$

удалением фиктивной переменной x_i и, наоборот,

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \text{ получается из } g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

добавлением фиктивной переменной x_i.

Две функции f (с областью определения $D(f)$ и областью значений $E(f)$) и g (с областью определения $D(g)$ и областью значений $E(g)$) назовем равными, если

1. f и g зависят от одинакового числа существенных переменных,

2. $D(f) = D(g), E(f) = E(g)$ и $f(x) = g(x)$ для любого $x \in D(f)$.

В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

Если дана конечная система функций $f_1, f_2, ..., f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. имеют вид

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ – это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} – множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O – множество операций суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

1) *перестановку переменных*;

2) *переименование переменных (без отождествления)*;

3) *отождествление переменных*;

4) *введение фиктивной переменной*;

5) *удаление фиктивной переменной*;

6) *подстановку одной функции в другую.*

Следует отметить, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

3. Основные результаты

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$.

Теорема 1. *В ф.с.* $\mathbf{F}_{RQ}$ *существуют только следующие конечные замкнутые классы:*

i) C*, где* C *- произвольное конечное подмножество множества* Q;

ii) $I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$*;*

iii) $C \cup I_1, \{\pm c_1, \cdots, \pm c_k\} \cup I_2$*, где* $\pm c_1, \cdots, \pm c_k \in Q$*, а* C, I_1 *и* I_2 *определяются соответственно в предыдущих пунктах.*

Доказательство. Очевидно, что каждое из перечисленных множеств является конечным замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$. Покажем, что в $\mathbf{F}_{RQ}$ не существует других конечных замкнутых классов, отличных от перечисленных. Для этого достаточно доказать, что если замкнутый класс содержит $rq-$функцию $f(x_1, ..., x_n)$, отличную от константы, $g(x) = x$ и $h(x) = -x$, то он содержит бесконечное число попарно различных $rq-$функций.

Пусть A – произвольный замкнутый класс, который содержит такую $rq-$функцию $f = f(x_1, ..., x_n)$. Поскольку $f(x_1, ..., x_n)$ отлична от константы, то она имеет существенную переменную; не ограничивая общность, можно считать, что существенными переменными функции $f(x_1, ..., x_n)$ являются переменные $x_1, ..., x_n$ $(n \geq 1)$ (см. замечание (2)).

Далее, возможны два случая:

1. $n = 1$, т.е. f имеет одну существенную переменную. Можно считать, что $f = f(x)$.

Так как функция f отлична от $g(x) = x$ и $h(x) = -x$, то очевидно, что последовательность функций

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...$$

состоит из попарно различных функций и все они принадлежат множеству A (поскольку A – замкнутый класс).

2. $n \geq 2$, т.е. $f(x_1, ..., x_n)$ имеет более одной существенной переменной. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных $x_1, ..., x_n$ (см. замечание (3)).

Тогда очевидно, что если в функции $f(x_1, ..., x_n)$ на место переменной x_1 подставим функцию $f(y_1, ..., y_n)$ (где $\{y_1, ..., y_n\} \cap \{x_1, ..., x_n\} = \varnothing$), то получим функцию

$$f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $2n - 1$ переменных; затем, если в функции

$$f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n)$$

на место переменной y_1 подставим функцию $f(z_1, ..., z_n)$, где

$$\{z_1, ..., z_n\} \cap \{y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n\} = \varnothing,$$

то получим функцию

$$f(f(f(z_1, ..., z_n), y_2, ..., y_n), x_2 ..., x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $3n - 2$ переменных и т.д.

Итак, имеем бесконечную последовательность функций

$$f(x_1, ..., x_n), f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n), f(f(f(z_1, ..., z_n), y_2, ..., y_n), x_2 ..., x_n), ...,$$

которая состоит из попарно различных функций (поскольку числа существенных переменных этих функций попарно различны) и все они принадлежат множеству A (т.к. A – замкнутый класс). Следовательно, A содержит бесконечное число попарно различных функций. $\square$

Теорема 2. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$

i) число всех конечных замкнутых классов равно c_0;

ii) число всех бесконечных замкнутых классов равно c;

iii) число всех замкнутых классов равно c.

Доказательство. 1) Справедливость первого утверждения непосредственно следует из теоремы (1), в которой перечислены все замкнутые классы в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$.

2) Понятно, что чтобы доказать мощность некоторого множества A равна $|A| = c$, достаточно показать, что $|A| \geq c$ и $|A| \leq c$.

С одной стороны, поскольку любое бесконечное подмножество

$$G = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$$

множества рациональных чисел Q является замкнутым классом (легко проверить, что $[G] = G$), то число всех бесконечных замкнутых классов не меньше c, так как мощность множества всех рациональных чисел равна c_0, а, как известно, мощность множества всех бесконечных подмножеств множества мощности c_0 равна c. Но, с другой стороны, это число не может быть больше c, так как $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ является функциональной системой мощности c_0, т.е. $|F_{RQ}| = c_0$ и, следовательно, число всех подмножеств множества $|F_{RQ}|$ равно c.

3) Ясно, что (число всех замкнутых классов) = (число всех конечных замкнутых классов) + (число всех бесконечных замкнутых классов), т.е. (число всех замкнутых классов) = $c_0 + c = c$. $\square$

А что касается базисов замкнутых классов, то оказывается, что имеют место все три случая.

Теорема 3. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$

i) существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;

ii) существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;

iii) существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

1. Пусть $A = \{2x, 4x, 8x, ..., 2^n x, ...\}$, где n – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{2x\}$ – его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий конечный базис.

2. Пусть $A = \{x, 2x, 3x, ..., mx, ...\}$, где m – любое положительное целое число. Ясно, что множество A является замкнутым классом в $\mathbf{F}_{RQ}$, а система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, ..., px, ...\}$, где p – любое простое число, является его базисом. Следовательно, A замкнутый класс, имеющий бесконечный базис.

3. Пусть $A = [T]$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2x_2^2, x_1^2x_2^2x_3^2, ...\}$. Покажем, что замкнутый класс A не имеет базиса.

Очевидно, что A состоит из всех $rq-$*функции* вида 1 и $x_1^{2k_1} \cdot ... \cdot x_n^{2k_n}$, где n – любое положительное целое число, а $k_1, ..., k_n$ – любые натуральные числа.

Допустим, что класс A имеет базис; обозначим его через B.

Ясно, что B содержит константу 1. Действительно, если из B удалить константу 1, то полученная подсистема будет состоять из таких функций, которые сохраняют константу 0. Из этих функций с помощью операций суперпозиции можно получить только функции, которые опять сохраняют константу 0, т.е. нельзя получить константу 1.

Очевидно, что B содержит еще и функцию, отличную от константы 1; обозначим ее через $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$, где $n_1 > 0$, т.е. B содержит функцию, имеющую существенную переменную. Не ограничивая общность, можно считать, что существенными переменными функции $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ являются переменные $x_1, ..., x_{n_1}$ (см. замечание (2)).

Пусть число переменных, которые содержит эта функция во 2-ой степени, равно $m_1 (0 \leq m_1 \leq n_1)$; не ограничивая общность, можно считать, что этими переменными являются переменные $x_1, ..., x_{m_1}$. Следовательно, $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ имеет вид

$$f_1(x_1, ..., x_{n_1}) = x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^{2k_{m_1+1}} ... x_{n_1}^{2k_{n_1}},$$

где $k_{m_1+1}, ..., k_{n_1}$ – некоторые натуральные числа отличные, от 0 и 1.

Очевидно, что из функций 1 и $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию

$$g(x_1, ..., x_{m_1+1}) \equiv x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2.$$

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_2(x_1, ..., x_{n_2}) = x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2 ... x_{m_2}^2 x_{m_2}^{2l_{m_2+1}} ... x_{n_2}^{2l_{n_2}},$$

где n_2, m_2 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_2 > n_1$ и $n_1 < m_2 \leq n_2$, а $l_{m_2+1}, ..., l_{n_2}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1.

Очевидно, что из функций $1, f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ и $f_2(x_1, ..., x_{n_2})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию $g(x_1, ..., x_{m_2+1}) \equiv x_1^2 ... x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2$.

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_3(x_1,...,x_{n_3}) = x_1^2...x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2...x_{m_3}^2 x_{m_3+1}^{2s_{m_2+1}}...x_{n_3}^{2s_{n_3}},$$

где n_3, m_3 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_3 > n_2$ и $n_2 < m_3 \leq n_3$, а $s_{m_3+1},...,s_{n_3}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1 и т.д.

Итак, B содержит бесконечное число попарно различных функций

$$1, f_1(x_1,...,x_{n_1}), f_2(x_1,...,x_{n_2}), f_3(x_1,...,x_{n_3}), ...$$

Но, с другой стороны, если рассмотрим любую бесконечную подпоследовательность этой последовательности, содержащую константу 1, то очевидно, что из функций этой подпоследовательности с помощью операции суперпозиции можно получить все функции множества T, следовательно, и все функции замкнутого класса . Следовательно, собственная подсистема базиса B является полной в ф.с. $\mathbf{F}_{PR}$. Получили противоречие. Итак, замкнутый класс A не имеет базиса. □

На вопрос сколько конечных замкнутых классов, имеющих конечные базисы, имеющих бесконечные базисы или вообще не имеющих базисов, ответ дает следующая теорема.

Теорема 4. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$

i) число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно c_0;

ii) число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно c;

iii) число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно c.

Доказательство. 1) Любое конечное множество вида $G = \{c_1, c_2, ..., c_n,\}$, где $c_1, c_2, ..., c_n \in Q$, является базисом самого этого множества G; поэтому число замкнутых классов, имеющих конечный базис, не меньше $|Q| = c_0$. Но это число не может быть больше c_0, так как $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ является функциональной системой мощности c_0, т.е. $|F_{RQ}| = c_0$ и, следовательно, число всех его конечных подмножеств множества $|F_{RQ}|$ равно c_0.

2) Любое бесконечное множество вида

$$G = \{c_1, c_2, , c_3, ...\}, \text{где } c_1, c_2, , c_3, ... \in Q,$$

является базисом самого этого множества G; поэтому число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, не меньше c. Но это число не может быть больше c, так как $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ является функциональной системой мощности c_0, т.е. $|F_{RQ}| = c_0$ и, следовательно, число всех его бесконечных подмножеств множества $|F_{RQ}|$ равно c.

3) Чтобы убедиться в справедливости последнего пункта, достаточно заметить, что множество

$$A_T = [\{1, x_1^2, x_1^2x_2^2, x_1^2x_2^2x_3^2, ...\} \cup T],$$

где T – произвольное бесконечное подмножество множества всех простых чисел, не имеет базиса и, если $T_1 \neq T_2$, где T_1, T_2 – любые подмножества множества всех простых чисел, то $A_{T_1} \neq A_{T_2}$. □

И, наконец, рассмотрим некоторые конкретные замкнутые классы в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$, которые играют ключевую роль при решении проблемы полноты, так как они являются предполными классами.

Подмножество A множества F_{RQ} называется *предполным* (*максимальным*) *классом в* $\mathbf{F}_{RQ}$, если $[A] \neq F_{RQ}$, но для любой функции f из $F_{RQ} \setminus A$ выполнено $[A \cup \{f\}] = F_{RQ}$.

Очевидно, что *предполный класс является замкнутым классом.*

Отметим, что для доказательства предполноты в $\mathbf{F}_{RQ}$ множества $A(A \subseteq F_{RQ})$ нужно показать, что

- $A \neq \varnothing$ и $A \neq F_{RQ}$;
- A замкнутый класс;
- для любого f из $F_{RQ} \setminus A$ система $A \cup \{f\}$ полна в F_{RQ}.

Если функция $f(x_1, ..., x_n)$ не определена в точке $(c_1, ..., c_n)$, то будем писать $f(c_1, ..., c_n) = *$ (следует отметить, что это просто обозначение, а не доопределение в точках разрывах).

Пусть A – произвольное подмножество множества Q. Обозначим через $V(A)$ множество всех таких функций $f(x_1, ..., x_n)$ из F_{RQ}, что для любых значений $c_1, ..., c_n \in A$ переменных $x_1, ..., x_n$ либо $f(c_1, ..., c_n) = *$ либо $f(c_1, ..., c_n) \in A$. В этом случае $f(x_1, ..., x_n)$ называется *функцией, сохраняющей множество* A, а $V(A)$ – *классом, сохраняющим множество констант* A.

На интересующий нас вопрос – является ли предполным классом множество всех rq-функций, сохраняющих конечное множество констант, ответ дает следующая теорема.

Теорема 5. *Если A – произвольное (непустое) конечное подмножество множества Q, то класс $V(A)$ является предполным классом в ф.с.* $\mathbf{F}_{RQ}$.

Доказательство. Пусть $A = \{c_1, ..., c_m\}$, где $c_1, ..., c_m$ $(m \geq 1)$– константы из Q.

Ясно, что $V(A) \neq \varnothing, V(A) \neq F_{RQ}$ и $[V(A)] = V(A)$.

Далее, пусть $f(x_1, ..., x_n) \in F_{RQ} \setminus A$; тогда для некоторых констант $c_{i_1}, ..., c_{i_n}$ из A и c из $Q \setminus A$ будет выполнено $f(c_{i_1}, ..., c_{i_n}) = c$ (и это понятно, так как если для всех констант $c_{i_1}, ..., c_{i_n}$ из A имеем $f(c_{i_1}, ..., c_{i_n}) = *$ или $f(c_1, ..., c_n) \in A$, то тогда получается, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ сохраняет множество A, что противоречиво).

Рассмотрим rq-функции

$$g_1(t,x,y) = \frac{(t-c_1)\cdot ... \cdot(t-c_m)}{(c-c_1)\cdot ... \cdot(c-c_m)} \cdot (x-y-c_1) + c_1,$$

$$g_2(t,x,y) = \frac{(t-c_1)\cdot ... \cdot(t-c_m)}{(c-c_1)\cdot ... \cdot(c-c_m)} \cdot (xy-c_1) + c_1,$$

$$g_3(t,x,y) = \frac{(t-c_1)\cdot ... \cdot(t-c_m)}{(c-c_1)\cdot ... \cdot(c-c_m)} \cdot (\frac{x}{y}-c_1) + c_1 \ (y \neq 0),$$

$$g_4(t) = \frac{(t-c_1)\cdot ... \cdot(t-c_m)}{(c-c_1)\cdot ... \cdot(c-c_m)} \cdot (1-c_1) + c_1.$$

Очевидно, что

$$g_1(t,x,y), g_2(t,x,y), g_3(t,x,y), g_4(t) \in V(A).$$

Следовательно, суперпозиции rq-функций

$$g_1(c,x,y) = x-y,\ g_2(c,x,y) = xy,\ g_3(c,x,y) = \frac{x}{y},\ g_4 = 1$$

принадлежат классу $[A \cup \{f(x_1, ..., x_n)\}]$, т.е. $[A \cup \{f(x_1, ..., x_n)\}]$ содержит подсистему

$$B = \{1,\ x-y,\ xy,\ \frac{x}{y}, \},$$

которая является полной в $\mathbf{F}_Q$ [2]. Значит, $[A \bigcup \{f(x_1, ..., x_n)\}] = F_{RQ}$. $\square$

4. Заключение

В заключении вкратце отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: изучена структура замкнутых классов и их базисов; найдено число замкнутых классов и их базисов для каждого возможного типа, более того, приведены соответствующие конкретные примеры для каждого случая.

Список литературы

[1] Алексиадис Н. Ф., “О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами”, Интеллектуальные системы. Теория и приложения. Т.25, вып. 4, 2021, 62–65.

[2] Алексиадис Н. Ф., “Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами”, Чебышевский сборник. т. 23, вып. 4. ttps://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19, 2022, 11–19.

[3] Алексиадис Н. Ф., “О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами”, Международная конференция «Мальцевские чтения», 2021, 143.

[4] Алексиадис Н. Ф., “О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами”, Материалы XX Международной конференции "Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, 2021, 80-83.

[5] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, Изд–во МГУ, Москва, 1982, 157 с.

[6] Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Изд–во Наука, Москва, 1986, 384 с.

Closed classes in the functional system of rational functions with rational coefficients

Aleksiadis N.Ph.

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness; this problem consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of rational functions with rational coefficients endowed with the superposition operation for this system we study the problem of closed classes (structure, basis, number of finite and infinite closed classes).

Importance of the problem of closed classes is ensured by the fact that completeness problem can frequently be solved with the help of (maximal) closed classes.

The main results concerning the functional system of rational functions with rational coefficients presented in our paper are the following:

1) *all finite closed classes are described explicitly*;
2) *the number of finite closed classes, infinite closed classes and all closed classes is found*;
3) *the problem of bases of closed classes is studied, namely, it is established that there exist closed classes with a finite basis, there exist closed classes with an infinite basis, and there exist closed classes without a basis; explicit examples of the corresponding closed classes are given*;
4) *the number of closed classes with a finite basis, the number of closed classes with an infinite basis and the number of closed classes without a basis are established.*

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, closed classes, rational function

References

[1] Aleksiadis N. Ph., "On the closed classes in the functional system of rational functions", Intelligent Systems. Theory and Applications, **25**:4 (2021), 62–65 (In Russian).

[2] Aleksiadis N. Ph., "Rational A-functions with rational coefficients", Chebyshevskii sbornik, **23**:4 (2022), 11–19. ttps://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19 (In Russian).

[3] Aleksiadis N. Ph., "On problem of completeness for rational functions with rational coefficients", Proc. Int. Conf. "Maltsev Readings", 2021, 143 (In Russian).

[4] Aleksiadis N. Ph., "On the bases of rational functions with rational coefficients", Proc. 20th Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history", 2021, 80-83 (In Russian).

[5] Kudryavtsev V. B., *"Functional systems "*, Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU, Moscow (In Russian), 1982, 157 c.

[6] Yablonsky S. V., *"Introduction to discrete mathematics"*, Science, Moscow (In Russian), 1986, 384 c.