

Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивные циклы

Н. П. Корчагин¹

В работе исследуется сложность массовой задачи, где на вход подается произвольный граф, и нужно определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из этого графа в фиксированный граф \mathcal{G} . Мы доказываем, что если \mathcal{G} — рефлексивный цикл длины 7 и более, то задача является NP-трудной.

Доказательство основано на новом подходе, который позволяет сводить решение задачи удовлетворения ограничениям к проверке выполнимости системы тождеств, а она сводится к решению сюръективной задачи удовлетворения ограничениям.

Ключевые слова: сюръективные гомоморфизмы, сложность вычислений, удовлетворение ограничениям, полиморфизмы.

1. Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу о существовании сюръективного гомоморфизма на заданный граф (*Surj-Hom*) и ее связь с задачей об удовлетворении ограничениям (CSP), сюръективном удовлетворении ограничениям (SCSP).

Рассмотрим граф $\mathcal{G} = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер $E \subseteq V \times V$ и граф $\mathcal{H} = (V', E')$ с вершинами V' и ребрами $E' \subseteq V' \times V'$. *Петлей* в графе называется ребро, которое соединяет вершину с ней самой. Граф называется *рефлексивным*, если каждая его вершина содержит петлю. *Гомоморфизм* графа \mathcal{H} на граф \mathcal{G} — это отображение $f : V' \rightarrow V$ такое, что $\forall (a_i, a_j) \in E'$ верно, что $(f(a_i), f(a_j)) \in E$. Для фиксированного графа \mathcal{H} задача о существовании сюръективного гомоморфизма *Surj-Hom*(\mathcal{H}) — это массовая задача, в которой по данному графу \mathcal{G} требуется проверить, существует ли сюръективный гомоморфизм \mathcal{G} на \mathcal{H} . C_n^{ref} — это рефлексивный цикл длины n .

Основным результатом статьи является следующая теорема:

Теорема 1. *Surj-Hom*(C_n^{ref}) является NP-трудной при $n \geq 7$.

Ниже мы формально определим понятия, которые будут использоваться в доказательстве этой теоремы.

¹Корчагин Никита Павлович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kolkor92@gmail.com.

Korchagin Nikita Pavlovich — graduate student, Lomonosov State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

1.1. Основные понятия

Задача *Constraint Satisfaction Problem* (CSP) - известная массовая задача, в которой необходимо определить, существует ли подстановка, удовлетворяющая определенному набору ограничений. Формально она определяется следующим образом: пусть D - конечное множество (*область значений*), Γ - конечное множество отношений на D . Тогда задача удовлетворения ограничениям, также обозначаемая как $\text{CSP}(\Gamma)$ - это задача, в которой по формуле \mathcal{I}

$$R_1(z_{1,1}, \dots, z_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge R_s(z_{s,1}, \dots, z_{s,n_s}),$$

где $R_1, \dots, R_s \in \Gamma$ - отношения из Γ и $z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n\}$ - переменные над D , необходимо определить, выполнима ли она. Данная формула вместе с набором переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ называется *экземпляром* \mathcal{I} задачи $\text{CSP}(\Gamma)$, а подстановка, удовлетворяющая всем ограничениям - *решением* экземпляра.

k -местная функция f называется *полиморфизмом* m -местного отношения R , если для любых $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^m)$ из R , верно, что $(f(a_1^1, \dots, a_k^1), \dots, f(a_1^m, \dots, a_k^m))$ тоже из R (говорят также, что f *сохраняет* R). f - полиморфизм множества отношений Γ , если f - полиморфизм каждого отношения из Γ . Множество полиморфизмов Γ обозначается как $\text{Pol}(\Gamma)$. Множество сюръективных полиморфизмов Γ обозначается как $\text{SPol}(\Gamma)$.

Функция f от n переменных называется *существенно-унарной*, если она существенно зависит не более, чем от одной переменной. Иными словами, f - существенно унарна тогда и только тогда, когда существуют $i \in \{1, \dots, n\}$, g - функция от одной переменной такие, что $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = g(x_i)$.

В задаче *Surjective Constraint Satisfaction Problem* (SCSP) помимо выполнимости формулы также требуется сюръективность решения. Эта задача определяется так. Пусть Γ - конечное множество отношений на области значений D . В задаче $\text{SCSP}(\Gamma)$ по данной формуле \mathcal{I}

$$\mathcal{I} = R_1(z_{1,1}, \dots, z_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge R_s(z_{s,1}, \dots, z_{s,n_s}),$$

где $R_1, \dots, R_s \in \Gamma$ и $z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n\}$ необходимо определить, существует ли решение такое, что $\{x_1, \dots, x_n\} = D$. Покажем, что $\text{Surj-Hom}(\mathcal{H})$ эквивалентен $\text{SCSP}(E)$, где E - бинарное отношение смежности на вершинах графа \mathcal{H} . Для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ с $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ рассмотрим отношение смежности на множестве его вершин $E \subseteq V \times V$. Тогда существование сюръективного гомоморфизма произвольного графа $\mathcal{G} = (V', E')$ с $V' = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $E' = \{(x_{1_1}, x_{1_2}), (x_{2_1}, x_{2_2}), \dots, (x_{l_1}, x_{l_2})\}$ на \mathcal{H} эквивалентно существованию сюръективного решения формулы

$$E(x_{1_1}, x_{1_2}) \wedge E(x_{2_1}, x_{2_2}) \wedge \dots \wedge E(x_{l_1}, x_{l_2}).$$

Аналогично, если E – некоторое бинарное отношение на множестве $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, то по произвольной формуле

$$E(z_{1_1}, z_{1_2}) \wedge \dots \wedge E(z_{s_1}, z_{s_2}),$$

где $z_{i_j} \in \{x_1, \dots, x_m\}$ можно построить граф \mathcal{H} с m вершинами x_1, \dots, x_m и s ребрами (z_{i_1}, z_{i_2}) . Тогда каждое сюръективное решение формулы соответствует некоторому сюръективному гомоморфизму из \mathcal{H} на граф с вершинами $\{v_1, \dots, v_n\}$ и отношением смежности E .

1.2. Предыдущие результаты

Многие комбинаторные задачи можно представить в виде CSP для некоторых Γ [11]. В [19] было предложено и, позже, независимо доказано в [4] и [5], что для произвольного Γ эта задача либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной. Более того, в [4] и [5] была независимо описана полная классификация сложности CSP для произвольных Γ , которая сформулирована с помощью полиморфизмов Γ .

После получения классификации сложности CSP, интерес исследователей сместился в сторону различных вариаций этой задачи, таких как SCSP. Известно, что если Γ – набор отношений на множестве D , то SCSP(Γ) можно свести к CSP($\Gamma \cup \{x = d \mid d \in D\}$) [1]. Так как сложность CSP(Γ) определяется с помощью полиморфизмов Γ , можно предположить, что сложность SCSP(Γ) тоже характеризуется полиморфизмами Γ . Так в [2] была доказана NP-трудность SCSP(Γ) для случаев, когда все полиморфизмы Γ существенно-унарны. Тем не менее, было показано, что одних полиморфизмов Γ недостаточно для описания сложности SCSP(Γ) [14].

Задача *Surj-Hom* вызывала интерес исследователей уже достаточно давно. Несмотря на простоту формулировки, даже для некоторых простых графов \mathcal{H} долгое время не удавалось понять, решается ли задача за полиномиальное время. Например, для цикла C_6 без петель задача была впервые отдельно сформулирована в 1999 году [16], но доказана лишь в 2017 [17]. Тем не менее, предпринималось множество попыток связать сложность задачи с различными свойствами графов. Так, в [2] было доказано, что если граф \mathcal{H} связан и содержит ровно 2 петли, то *Surj-Hom*(\mathcal{H}) является NP-трудной. В [6] было показано, что если каждая связная компонента \mathcal{H} является звездой без петель (*звезда* – это граф, который содержит ровно одну вершину, соединенную со всеми остальными вершинами графа) или полным двудольным графом без петель, то *Surj-Hom*(\mathcal{H}) лежит в P . В [7] была описана сложность *Surj-Hom* для некоторых рефлексивных ориентированных графов, и определена сложность для всех ориентированных графов на не более, чем трёх вершинах.

В 2015 году была доказана NP-трудность *Surj-Hom* для рефлексивного цикла длины 4 C_4^{ref} [10]. В [15] была описана сложность *Surj-Hom* для деревьев, содержащих как минимум одну петлю. В [13] Викас описывает алгоритм, который позволяет решить задачу за полиномиальное время для некоторых классов входных графов, таких как лес. Также в этой статье было заявлено, что существует доказательство сложности *Surj-Hom* для всех графов с не более, чем четырьмя вершинами. Это доказательство было независимо получено в [2] со ссылками на [1, 15, 10, 9].

Несмотря на большое количество результатов по данной теме, сложность *Surj-Hom* известна для очень маленького множества графов. Поэтому, в качестве первого шага в изучении этой задачи можно рассмотреть простые графы, такие как циклы. Так, для рефлексивных циклов заданной длины n C_n^{ref} сложность *Surj-Hom*(C_n^{ref}) известна только для $n \leq 4$ [10].

2. Основные результаты

Для удобства будем отождествлять граф и бинарное отношение смежности на множестве его вершин. В разделе 2.1 мы докажем что все сюръективные полиморфизмы C_n^{ref} при $n \geq 4$ существенно-унарны:

Теорема 2. Пусть $f \in \text{SPol}(C_n^{ref})$, $n \geq 4$, тогда f существенно-унарен.

Отметим, что в [18] приводится иное доказательство этого результата. После этого мы рассмотрим отношение $1\text{IN}3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ на множестве E_2 . Известно, что задача $\text{CSP}(1\text{IN}3)$ является NP-трудной [11]. В разделе 2.2 мы опишем сведение $\text{CSP}(1\text{IN}3)$ к $\text{SCSP}(C_n^{ref})$ для $n \geq 7$, тем самым доказав, что эта задача (и, как следствие, *Surj-Hom*(C_n^{ref})) является NP-трудной. В результате мы докажем следующую теорему, которая является переформулировкой теоремы 1.

Теорема 3. $\text{SCSP}(C_n^{ref})$ является NP-трудной при $n \geq 7$.

Наконец, в разделе 2.3 мы построим контрпримеры, которые покажут, что сконструированное в разделе 2.2 доказательство не подходит для доказательства NP-трудности задачи для циклов длины 5, 6.

2.1. Структура сюръективных полиморфизмов $\text{CSP}(C_n^{ref})$

Рассмотрим рефлексивный цикл C_n^{ref} длины n с множеством вершин $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и отношением смежности, которое задается следующим образом

$$(x, y) \in C_n^{ref} \iff (x - y \pmod{n}) \in \{1, 0, n-1\}.$$

E_n с операцией сложения по модулю n – группа, через \oplus и \ominus будем обозначать операции сложения и вычитания в этой группе: $x \oplus y = (x + y) \bmod n$, $x \ominus y = (x - y) \bmod n$. Для $a \in E_n$ через $\ominus a$ будем обозначать элемент E_n , обратный a (так, $\ominus 1 = n - 1$). Определим на E_n метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \min((y \ominus x), (x \ominus y)).$$

эта метрика соответствует расстоянию между вершинами x и y в графу C_n^{ref} . Расстояние между любыми двумя элементами E_n ограничено сверху:

Лемма 1. Для любых $x, y \in E_n$ $\rho(x, y) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Доказательство. Если $y \ominus x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то $x \ominus y = n - (y \ominus x) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

Заметим, что для отношения смежности C_n^{ref} верно:

$$(x, y) \in C_n^{ref} \iff \rho(x, y) \leq 1.$$

Рассмотрим множество E_n^k , образованное наборами из k элементов E_n . Элементы этого множества будем называть *векторами* и обозначать как $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Для $\bar{x} \in E_n^k$ через x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ будем обозначать i -ый член \bar{x} (будем также говорить, что x_i – i -ая координата \bar{x}). Введем на этом пространстве метрику ρ : если $\bar{x}, \bar{y} \in E_n^k$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$, то

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max_i (\rho(x_i, y_i)).$$

Для $\bar{x}, \bar{y} \in E_n^k$ через $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$ будем обозначать операции поэлементного сложения и вычитания на этом множестве. Иными словами, если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, то $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_k \oplus y_k)$, $\bar{x} - \bar{y} = (x_1 \ominus y_1, x_2 \ominus y_2, \dots, x_k \ominus y_k)$.

Заметим, что k -местная функция $f : E_n^k \rightarrow E_n$ является полиморфизмом C_n^{ref} тогда и только тогда, когда $\forall \bar{x}, \bar{y} : \rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1 \Rightarrow \rho(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq 1$. Два вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ будем называть *соседями*, если $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1$. Два вектора \bar{x} и \bar{y} будем называть *прямыми соседями*, если они соседи и $\exists! i \rho(x_i, y_i) = 1$, то есть эти наборы отличаются ровно по одной координате. Вектор $\bar{\Delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ будем называть *сдвигом*, если $\forall i \delta_i \in \{\ominus 1, 0, 1\}$. Соответственно, сдвиг $\bar{\Delta}$ будем называть *прямым сдвигом*, если $\exists! i \delta_i \in \{\ominus 1, 1\}$. Два элемента \bar{x} и \bar{y} являются соседями, если они отличаются на сдвиг, и прямыми соседями, если они отличаются на прямой сдвиг.

Путь P в E_n^k – это последовательность элементов $\bar{x}^1 - \bar{x}^2 - \dots - \bar{x}^s$ такая, что любые два соседних элемента \bar{x}^i и \bar{x}^{i+1} являются соседями.

Цикл - это путь, у которого начало и конец совпадают. Длина пути - это количество элементов в данном пути минус 1. Несложно заметить, что справедлива следующая лемма:

Лемма 2. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in E_n^k$. Тогда существует путь из \bar{x} в \bar{y} длины $\rho(\bar{x}, \bar{y})$.

Заметим также, что так как любые два соседних элемента в пути являются соседями, то путь можно представить последовательностью сдвигов начального элемента.

Пусть $n > 2$. Введем частичную функцию $r(x, y)$, определенную на соседних элементах E_n :

$$r(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \oplus 1 = y \\ -\frac{1}{n}, & \text{если } x \ominus 1 = y \\ 0, & \text{если } x = y \end{cases}$$

Для k -местного полиморфизма $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ и пути P в E_n^k индекс $c(P, f)$ пути P над f - числовая характеристика, которая определяется следующим образом: Если

$$P = \bar{x}^0 - \bar{x}^1 - \bar{x}^2 - \dots - \bar{x}^{s-1} - \bar{x}^s,$$

то

$$c(P, f) = r(f(\bar{x}^0), f(\bar{x}^1)) + r(f(\bar{x}^1), f(\bar{x}^2)) + \dots + r(f(\bar{x}^{s-1}), f(\bar{x}^s)).$$

Заметим, что если длина P равна s , то для любого $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ $|c(P, f)| \leq \frac{s}{n}$. Заметим также, что индекс обладает аддитивностью: если конец пути P совпадает с началом пути R , и путь D построен из путей P и R , то для любого $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ верно $c(D, f) = c(P, f) + c(R, f)$.

Лемма 3. Для любого k -местного полиморфизма $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ и произвольного пути P из \bar{x} в \bar{y} в E_n^k существует целое t такое, что $c(P, f) = \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{n} + t$.

Доказательство. Пусть P имеет следующий вид: $P = \bar{x}^0 - \bar{x}^1 - \bar{x}^2 - \dots - \bar{x}^s$. При каждом переходе индекс увеличивается на $\frac{1}{n}$ (если следующее значение больше предыдущего на 1), уменьшается на $\frac{1}{n}$ (если следующее значение меньше предыдущего на 1) или не изменяется. Пусть после s переходов индекс увеличился s_1 раз, уменьшился s_2 раза и не изменился s_3 раз. $s = s_1 + s_2 + s_3$, при этом по определению $c(P, f) = \frac{s_1 - s_2}{n}$. Тогда $f(\bar{x}^s) = f(\bar{x}^0) \oplus s_1 \ominus s_2$, откуда $f(\bar{x}^s) = f(\bar{x}^0) + s_1 - s_2 + n \cdot t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$, и $\frac{s_1 - s_2}{n} = c(P, f) = \frac{f(\bar{x}^s) - f(\bar{x}^0)}{n} + t, t \in \mathbb{Z}$. \square

Следствие 1. Пусть f – k -местный полиморфизм C_n^{ref} , $\bar{x}, \bar{y} \in E_n^k$, P_1, P_2 – пути из \bar{x} в \bar{y} . Тогда существует целое t такое, что $c(P_1, f) - c(P_2, f) = t$.

Следствие 2. Пусть f – k -местный полиморфизм C_n^{ref} , P – цикл в E_n^k . Тогда $c(P, f)$ – целое число.

Лемма 4. Пусть f – k -местный полиморфизм C_n^{ref} , $n \geq 3$, $\bar{a}, \bar{b} \in E_n^k$ такие, что $f(\bar{a}) = t$ и $f(\bar{b}) = t \oplus 1$. Тогда существует путь P из \bar{a} в \bar{b} такой, что $c(P, f) = \frac{1}{n}$.

Доказательство. По лемме 1 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, откуда по лемме 2 существует путь P из \bar{a} в \bar{b} длины не больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. По лемме 3 $c(P, f) = \frac{1}{n} + t, t \in \mathbb{Z}$. Но $|c(P, f)| \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$, откуда при $n \geq 3$ имеем $t = 0$ и $c(P, f) = \frac{1}{n}$. \square

Лемма 5. Пусть f – сюръективный k -местный полиморфизм C_n^{ref} , $n \geq 3$. Тогда в E_n^k существует цикл C индекса 1.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$ такие, что $f(\bar{x}_i) = i, i \in E_n$ (эти элементы существуют из сюръективности f). По лемме 4 существуют пути $P_{0,1}, P_{1,2}, \dots, P_{n-2,n-1}, P_{n-1,0}$ такие, что $\forall i \in E_n$ $P_{i,i \oplus 1}$ идет из \bar{x}_i в $\bar{x}_{i \oplus 1}$ и $c(P_{i,i \oplus 1}, f) = \frac{1}{n}$.

Рассмотрим путь P , последовательно собранный из путей $P_{i,i \oplus 1}$:

$$P = \bar{x}_0 - \dots - \bar{x}_1 - \dots - \dots - \bar{x}_{n-1} - \dots - \bar{x}_0.$$

Он является циклом. При этом по определению индекса пути

$$c(P, f) = c(P_{0,1}, f) + c(P_{1,2}, f) + \dots + c(P_{n-2,n-1}, f) + c(P_{n-1,0}, f) = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

\square

Рассмотрим произвольный путь P в пространстве E_n^k :

$$P = \bar{x}^0 - \bar{x}^1 - \dots - \bar{x}^s.$$

Этот путь можно представить в виде последовательности сдвигов начального элемента: для $\bar{\Delta}^i = \bar{x}^i - \bar{x}^{i-1}$ имеем

$$\bar{x}^s = \bar{x}^0 + \bar{\Delta}^1 + \bar{\Delta}^2 + \dots + \bar{\Delta}^s.$$

Аналогично, произвольный элемент $\bar{x}^0 \in E_n^k$ и последовательность сдвигов $\bar{\Delta}^1, \bar{\Delta}^2, \dots, \bar{\Delta}^s$ задают путь $P = \bar{x}^0 - \bar{x}^1 - \dots - \bar{x}^s$, где $\bar{x}^i = \bar{x}^0 + \bar{\Delta}^1 + \bar{\Delta}^2 + \dots + \bar{\Delta}^i$.

Пусть путь P задается начальным элементом \bar{x}^0 и сдвигами $\bar{\Delta}^1, \bar{\Delta}^2, \dots, \bar{\Delta}^s$. Опишем ряд преобразований, которые позволяют из пути P получить новый путь R по следующим правилам:

- 1) Если в последовательности существует сдвиг $\overline{\Delta} = (e_1, \dots, e_k)$ такой, что в нем есть как минимум два ненулевых элемента $e_i, e_j \neq 0$, то строим R в котором вместо $\overline{\Delta}$ последовательно стоят два сдвига $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\Delta}'$, где $\overline{\varepsilon} = (0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0)$, $\overline{\Delta}' = (e_1, \dots, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, \dots, e_k)$.
- 2) Если в последовательности существуют идущие подряд прямые сдвиги $\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2$ такие, что в $\overline{\varepsilon}_1$ ненулевой элемент стоит на i -ом месте, в $\overline{\varepsilon}_2$ ненулевой элемент стоит на j -ом месте и $i > j$, то строим R , в котором меняем эти сдвиги местами: $\overline{\varepsilon}_2, \overline{\varepsilon}_1$.
- 3) Если в последовательности существуют идущие подряд сдвиги $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2$ такие, что $\overline{\Delta}_2 = -\overline{\Delta}_1$, то строим R , в котором удаляем эти сдвиги из цикла.

Заметим, что данные преобразования не меняют начальную и конечную точки пути, поскольку не меняют общую сумму сдвигов, образующих путь.

Докажем, что данные преобразования не меняют индекс пути.

Лемма 6. Пусть f – k -местный полиморфизм C_n^{ref} , $n \geq 4$, P – путь в E_n^k , R – путь, полученный из P применением любого из преобразований 1 - 3. Тогда $c(P, f) = c(R, f)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $P = \overline{x^0} - \overline{x^1} - \dots - \overline{x^s}$, путь R получен из него применением любого из преобразований 1-3. R имеет такие же начальную и конечную точки, что и P , отсюда по следствию 1 индексы R и P отличаются на целое число.

Преобразование 1 добавляет один новый элемент в путь. Пусть в P к $\overline{\Delta}^i$ применяем преобразование 1: $\overline{\Delta}^i \rightarrow \overline{\varepsilon}, \overline{\Delta}', \overline{\Delta}^i = \overline{\varepsilon} + \overline{\Delta}'$. Тогда в R появляется новый элемент $\overline{x'} = \overline{x^0} + \overline{\Delta}^1 + \dots + \overline{\Delta}^{i-1} + \overline{\varepsilon}$:

$$R = \overline{x^0} - \overline{x^1} - \dots - \overline{x^{i-1}} - \overline{x'} - \overline{x^i} - \overline{x^{i+1}} - \dots - \overline{x^s}.$$

При этом преобразовании индекс меняется не более, чем на $\frac{3}{n}$: вместо $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i}))$ появляется $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'})) + r(f(\overline{x'}), f(\overline{x^i}))$, и, так как $n > 3$, то индекс не меняется.

Преобразование 2 удаляет один элемент и добавляет один элемент. Пусть в P последовательно идут $\overline{\Delta}^i = \overline{\varepsilon}_1$ и $\overline{\Delta}^{i+1} = \overline{\varepsilon}_2$, в $\overline{\varepsilon}_1$ ненулевой элемент на l -ой позиции, в $\overline{\varepsilon}_2$ ненулевой элемент на m -ой позиции и $l > m$. Тогда в R вместо $\overline{x^i} = \overline{x^0} + \overline{\Delta}^1 + \dots + \overline{\Delta}^{i-1} + \overline{\varepsilon}_1$ будет $\overline{x'} = \overline{x^0} + \overline{\Delta}^1 + \dots + \overline{\Delta}^{i-1} + \overline{\varepsilon}_2$:

$$R = \overline{x^0} - \overline{x^1} - \dots - \overline{x^{i-1}} - \overline{x'} - \overline{x^{i+1}} - \dots - \overline{x^s}.$$

Заметим, что $\overline{x^i}$ и $\overline{x'}$ являются соседями, поскольку $\overline{x^i} = \overline{x^{i-1}} + \overline{\varepsilon}_1$, $\overline{x'} = \overline{x^{i-1}} + \overline{\varepsilon}_2$ и в $\overline{\varepsilon}_1$ и $\overline{\varepsilon}_2$ ненулевые элементы стоят на разных местах.

Индекс пути меняется на четыре слагаемых: вместо $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) + r(f(\overline{x^i}), f(\overline{x^{i+1}}))$ появляется $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'})) + r(f(\overline{x'}), f(\overline{x^{i+1}}))$. При этом, если

$$r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) = -r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'})),$$

то

$$f(\overline{x^i}) = f(\overline{x^{i-1}}) \oplus 1, f(\overline{x'}) = f(\overline{x^{i-1}}) \ominus 1$$

или

$$f(\overline{x^i}) = f(\overline{x^{i-1}}) \ominus 1, f(\overline{x'}) = f(\overline{x^{i-1}}) \oplus 1,$$

откуда $f(\overline{x'}) = f(\overline{x^i}) \ominus 2$ или $f(\overline{x'}) = f(\overline{x^i}) \oplus 2$ – так как $n > 3$, имеем противоречие с тем, что $\overline{x^i}$ и $\overline{x'}$ – соседи и f – полиморфизм. Отсюда индекс меняется не более, чем на $\frac{3}{n} < 1$, и преобразование 2 не меняет индекс.

Преобразование 3 убирает два элемента из пути: если в P $\overline{\Delta^i} = -\overline{\Delta^{i+1}}$, то $\overline{x^{i-1}} = \overline{x^{i+1}}$ и путь R выглядит следующим образом:

$$R = \overline{x^0} - \overline{x^1} - \dots - \overline{x^{i-1}} - \overline{x^{i+2}} - \dots - \overline{x^s}.$$

При этом индекс R отличается от индекса P на $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) + r(f(\overline{x^i}), f(\overline{x^{i+1}}))$, то есть не более, чем на $\frac{2}{n}$. Так как $n > 3$, то индекс пути при преобразовании 3 не меняется. \square

С помощью преобразований 1 - 3 получим цикл, состоящий исключительно из прямых сдвигов одной из координат:

Лемма 7. *Для произвольного k -местного $f \in \text{SPol}(C_n^{ref})$, $n \geq 4$, существуют $\overline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in E_n^k$, $e \in \{1, \ominus 1\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ такие, что $\forall b \in E_n : f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i \oplus b \cdot e, a_{i+1}, \dots, a_k) = b$.*

Доказательство. Рассмотрим цикл C , полученный в лемме 5. Пусть этот цикл начинается в некоторой точке $\overline{c} = (c_1, \dots, c_k)$ такой, что $f(\overline{c}) = t$. Получим из него цепочку циклов $C_0 = C, C_1, C_2, \dots$ следующим образом: последовательно применяем преобразование 1, если его можно применить хотя бы к одному сдвигу, после этого последовательно применяем преобразование 2, пока существуют пары сдвигов, к которым оно применимо, после чего применяем преобразование 3, пока оно применимо. Эта цепочка конечна: для фиксированного пути P длины s в пространстве E_n^k преобразование 1 можно последовательно применить не более $s \cdot k$ раз, преобразование 2 - не более s^2 раз, преобразование 3 - не более s раз. Рассмотрим C' – последний цикл в этой цепочке. Он состоит исключительно из последовательностей одинаковых прямых сдвигов: s_1 прямых сдвигов по первой координате, s_2 прямых сдвигов по второй координате, ..., s_k прямых сдвигов по k -ой координате. Так как C' – цикл, и

каждый прямой сдвиг меняет ровно одну координату на 1 или $\ominus 1$, то число сдвигов по каждой координате кратно n . Значит, цикл C' состоит из $\frac{s_1}{n} + \frac{s_2}{n} + \dots + \frac{s_k}{n}$ циклов (n прямых сдвигов по любой координате в одном направлении дают цикл, так как $x_i \oplus n \cdot e_i = x_i$, $e_i \in \{1, \ominus 1\}$). Каждый из этих циклов имеет индекс 1, -1 или 0, при этом индекс C' равен 1, значит существует цикл C'' длины n и индекса 1, состоящий только из прямых сдвигов $\bar{e} = (0, \dots, 0, e, 0, \dots, 0)$ (где ненулевой e стоит на i -ом месте). Из определения индекса цикла следует, что при каждом таком прямом сдвиге значение полиморфизма вырастает на один. Отсюда $f(c_1, \dots, c_k) = t$, $f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i \oplus e, c_{i+1}, \dots, c_k) = t \oplus 1$, $f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i \oplus 2e, c_{i+1}, \dots, c_k) = t \oplus 2$, ..., $f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i \oplus (n-1) \cdot e, c_{i+1}, \dots, c_k) = t \oplus (n-1)$. Тогда для $\bar{a} = (c_1, \dots, c_{i-1}, c_i \ominus t \cdot e, c_{i+1}, \dots, c_k)$ верно $f(\bar{a} + b \cdot \bar{e}) = b$, $b \in E_n$. \square

Пользуясь этим, докажем теорему 2:

Теорема 2. Пусть $f \in \text{SPol}(C_n^{ref})$, $n \geq 4$, тогда f существенно-унарен.

Доказательство. По лемме 7 существуют $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in E_n^k$, $e \in \{1, \ominus 1\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ такие, что $\forall b \in E_n : f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i \oplus b \cdot e, a_{i+1}, \dots, a_k) = b$, или $f(\bar{a} + b \cdot \bar{e}) = b$, где $\bar{e} = (0, \dots, 0, e, 0, \dots, 0)$ – вектор, где e стоит на i -ой позиции. Без ограничения общности будем считать, что $i = k$.

Рассмотрим множество E_n^{k-1} . Через \bar{a}' будем обозначать элемент этого множества, равный (a_1, \dots, a_{k-1}) . Докажем, что для произвольного $\bar{y}' = (y_1, \dots, y_{k-1}) \in E_n^{k-1}$ и для произвольного $s \in E_n$ верно $f(y_1, \dots, y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e) = s$. Проведем доказательство индукцией по $\rho(\bar{y}', \bar{a}')$.

База индукции. Пусть $\rho(\bar{y}', \bar{a}') = 1$. Рассмотрим произвольное $s \in E_n$, через \bar{y} обозначим вектор $(y_1, \dots, y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$. Верно, что \bar{y} – сосед $\bar{a} + s \cdot \bar{e}$, при этом $f(\bar{a} + s \cdot \bar{e}) = s$, значит, $f(\bar{y})$ равен s , $s \oplus 1$ или $s \ominus 1$. Но \bar{y} также является соседом $\bar{a} + (s \oplus 1)\bar{e}$ и $\bar{a} + (s \ominus 1)\bar{e}$ и $f(\bar{a} + (s \oplus 1)\bar{e}) = s \oplus 1$, $f(\bar{a} + (s \ominus 1)\bar{e}) = s \ominus 1$. Отсюда, $f(\bar{y}) = s$.

Индуктивный переход. Пусть для всех $\bar{y}' = (y_1, \dots, y_{k-1}) \in E_n^{k-1}$ таких, что $\rho(\bar{y}', \bar{a}') \leq m$ и для всех $s \in E_n$ верно, что $f(y_1, \dots, y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e) = s$. Возьмем \bar{x}' такой, что $\rho(\bar{x}', \bar{a}') = m + 1$. По лемме 2 существует путь из \bar{a}' в \bar{x}' длины $m + 1$. Рассмотрим предпоследний элемент этого пути $\bar{z}' = (z_1, \dots, z_{k-1})$. Зафиксируем произвольный $s \in E_n$. $\rho(\bar{z}', \bar{y}') = m$, откуда по предположению индукции для $\bar{z} = (z_1, \dots, z_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$ верно $f(\bar{z}) = s$, $f(\bar{z} \oplus \bar{e}) = s \oplus 1$, $f(\bar{z} \ominus \bar{e}) = s \ominus 1$. При этом вектор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$ является соседом \bar{z} , $\bar{z} \oplus \bar{e}$ и $\bar{z} \ominus \bar{e}$, откуда $f(\bar{x}) = s$.

Таким образом, мы доказали, что если f – k -местный сюръективный полиморфизм C_n^{ref} , то существуют $i \in \{1, \dots, k\}$, g – функция от одной переменной такие, что $\forall \bar{x} \in E_n^k f(\bar{x}) = g(x_i)$, то есть f – существенно-унарная функция. \square

Следствие 3. Все сюръективные полиморфизмы C_n^{ref} , $n \geq 4$, задаются следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_k) = e \cdot x_i + c \pmod n,$$

где $e \in \{1, \ominus 1\}$, $c \in E_n$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

2.2. NP-трудность SCSP(C_n^{ref})

В данном разделе будет доказана теорема 2 об NP-трудности SCSP(C_n^{ref}) для $n \geq 7$.

Рассмотрим отношение $1IN3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ на множестве E_2 . Задача CSP(1IN3) является NP-трудной [11].

Через π_i^j , $i \leq j$ будем обозначать j -местную проекцию на i -ую переменную, то есть $\pi_i^j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j) = x_i$. Для множества E через Proj_E будем обозначать множество всех проекций на E .

Сигнатурой будем называть множество функциональных символов Σ , дополненное отображением $ar : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, которое сопоставляет каждому функциональному символу его арность.

Для сигнатуры Σ и множества переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ *минорное условие (minor condition)* \mathcal{T} над Σ – это множество тождеств вида $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = t(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, где $f, t \in \Sigma$ и $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть M – множество функций с одинаковой областью определения. Минорное условие \mathcal{T} над Σ удовлетворяется на M , если существует отображение $F : \Sigma \rightarrow M$ такое, что:

- $\forall g \in \Sigma : g$ и $F(g)$ имеют одинаковую арность.
- Для каждого $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = t(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ из \mathcal{T} $F(f)(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F(t)(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ выполняется для любой подстановки значений из области определения M вместо x_1, \dots, x_n .

Будем говорить, что отображение $F : \Sigma \rightarrow M$ является решением \mathcal{T} . Пусть $\Sigma = \{f\}$, где f – трехместный символ. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} f(x, x, y) &= f(x, y, x) \\ f(x, y, x) &= f(y, x, x) \\ f(y, x, x) &= f(x, x, x). \end{aligned}$$

Это условие удовлетворяется на множестве $\{\text{MAJ}\}$, где MAJ – функция голосования от трех переменных в P_2 . При подстановке MAJ вместо f каждое тождество выполняется на всех наборах переменных из P_2 . Однако, эта система не удовлетворяется на множестве $\text{Proj}_{\{0,1\}}$: проекция

на первую переменную не может быть из-за третьего уравнения, проекция на вторую переменную – из-за второго уравнения, и проекция на третью переменную – из-за первого уравнения.

Рассмотрим произвольный экземпляр \mathcal{I} задачи $\text{CSP}(1IN3)$:

$$\mathcal{I} = 1IN3(u_{i_1}, u_{j_1}, u_{k_1}) \wedge 1IN3(u_{i_2}, u_{j_2}, u_{k_2}) \wedge \dots \wedge 1IN3(u_{i_m}, u_{j_m}, u_{k_m}),$$

где $i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2, \dots, i_m, j_m, k_m \in \{1, 2, \dots, l\}$.

Возьмем сигнатуру $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_l\}$, где f_1, \dots, f_m – трехместные символы и g_1, \dots, g_l – двуместные. Построим минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ над $\Sigma_{\mathcal{I}}$ следующим образом:

1) Для каждого $s \in \{1, \dots, m\}$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$\begin{aligned} f_s(y, x, x) &= g_{i_s}(x, y) \\ f_s(x, y, x) &= g_{j_s}(x, y) \\ f_s(x, x, y) &= g_{k_s}(x, y) \end{aligned}$$

2) Для каждой пары $i, j \in \{1, \dots, m\}$ такой, что $i \neq j$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$f_i(x, x, x) = f_j(x, x, x).$$

В получившемся минорном условии каждому вхождению $1IN3$ в \mathcal{I} будет соответствовать определенный функциональный символ f_i , а каждой переменной u_j – функциональный символ g_j .

Рассмотрим экземпляр $\mathcal{I} = 1IN3(u_1, u_2, u_3) \wedge 1IN3(u_2, u_4, u_5)$. Тогда соответствующее ему минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y, x, x) &= g_1(x, y) \\ f_1(x, y, x) &= g_2(x, y) \\ f_1(x, x, y) &= g_3(x, y) \\ f_2(y, x, x) &= g_2(x, y) \\ f_2(x, y, x) &= g_4(x, y) \\ f_2(x, x, y) &= g_5(x, y) \\ f_1(x, x, x) &= f_2(x, x, x). \end{aligned}$$

Более подробно конструкция минорных условий и их применение в алгебраическом анализе сложности CSP описаны в [20, 12].

Пусть \mathcal{I} – произвольный экземпляр $\text{CSP}(1IN3)$, E – произвольное множество, $|E| > 1$. Решения \mathcal{I} и $\psi(\mathcal{I})$ связаны: \mathcal{I} имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на Proj_E . Эта лемма является следствием замечания 3.15 и примера 2.17 из [20].

Рассмотрим произвольное минорное условие \mathcal{T} . Покажем, что для произвольного $E, |E| > 1$, решение \mathcal{T} на множестве проекций Proj_E соответствует решению этого минорного условия на множестве функций с ровно одной существенной переменной.

Лемма 8. Пусть $S = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – сигнатура, \mathcal{T} – минорное условие над S , E, V – произвольные множества, $|E|, |V| > 1$, $n \geq 4$, \mathcal{F}_V^{un} – множество функций, определённых на V , существенно зависящих ровно от одной переменной. Тогда \mathcal{T} имеет решение на \mathcal{F}_V^{un} тогда и только тогда, когда \mathcal{T} имеет решение на Proj_E .

Доказательство. Пусть \mathcal{T} имеет решение на Proj_E . Любое множество проекций из Proj_E будет соответствовать аналогичному множеству проекций на Proj_V . Так как $|V| > 1$, то $\text{Proj}_V \subset \mathcal{F}_V^{un}$, и \mathcal{T} имеет решение на \mathcal{F}_V^{un} .

Пусть \mathcal{T} имеет решение на \mathcal{F}_V^{un} . Рассмотрим $P = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ – множество функций из решения. Пусть $F : S \rightarrow P$ – решение. Каждая функция из P имеет вид

$$p_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}) = g_i(x_{i_j})$$

для некоторой унарной g_i и $j \in \{1, \dots, n_i\}$, $i \in \{1, \dots, l\}$. Построим отображение $F' : S \rightarrow \text{Proj}_V$ следующим образом: если

$$F(f_i) = g_i(x_{i_j}),$$

то

$$F'(f_i) = x_{i_j}.$$

Данное отображение является решением \mathcal{T} : если при подстановке F тождество принимало вид $g(x_t) = g(x_t)$ для некоторой переменной x_t и унарной функции g , то при подстановке F' это тождество примет вид $x_t = x_t$. Отсюда, \mathcal{T} имеет решение на Proj_V , которое соответствует решению на Proj_E . \square

Следствие 4. Пусть $n \geq 4$, \mathcal{I} – произвольный экземпляр $\text{CSP}(1IN3)$. Тогда \mathcal{I} имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$.

Рассмотрим произвольный полиморфизм $f(x_1, \dots, x_k) \in \text{Pol}(C_n^{ref})$. Он определяется множеством своих значений на всех n^k наборах переменных из E_n^k . При этом $f(x_1, \dots, x_k)$ является полиморфизмом отношения $C_n^{ref} \iff \forall x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in E_n : \rho((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) \leq 1 \Rightarrow$

$(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k)) \in C_n^{ref}$. Тогда, если закодировать значения полиморфизма n^k переменными $f(0, \dots, 0), \dots, f(n-1, \dots, n-1)$, то определение полиморфизма можно записать в виде формулы \mathcal{J}_f над отношением C_n^{ref} :

$$\mathcal{J}_f = \bigwedge_{\substack{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in E_n: \\ \rho((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) \leq 1}} C_n^{ref}(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k)).$$

Иными словами, необходимо рассмотреть все соседние наборы $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in E_n^k$ и записать для них условие $C_n^{ref}(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k))$.

Для произвольной сигнатуры $\Sigma = \{f_1, \dots, f_l\}$ требование того, что все f_1, \dots, f_l являются полиморфизмами C_n^{ref} можно записать в виде формулы \mathcal{J}_Σ :

$$\mathcal{J}_\Sigma = \bigwedge_{i \in \{1, \dots, l\}} \mathcal{J}_{f_i}.$$

Рассмотрим произвольное минорное условие \mathcal{T} над $\Sigma = \{f_1, \dots, f_l\}$. Построим формулу $\phi(\mathcal{T})$ над C_n^{ref} следующим образом: для каждого тождества \mathcal{T} вида $f_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}) = f_j(x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j})$ отождествим в \mathcal{J}_Σ значения $f_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})$ и $f_j(x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j})$ на всех наборах переменных $x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}, x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j} \in E_n$. Набор полиморфизмов, удовлетворяющий \mathcal{T} , задает подстановку, которая по построению удовлетворяет $\phi(\mathcal{T})$. Аналогично, любое решение $\phi(\mathcal{T})$ соответствует набору полиморфизмов, который является решением \mathcal{T} . Отсюда, справедлива следующая лемма:

Лемма 9. Пусть \mathcal{T} – минорное условие. Тогда каждое решение \mathcal{T} на $\text{Pol}(C_n^{ref})$ соответствует решению $\phi(\mathcal{T})$, а каждое решение $\phi(\mathcal{T})$ соответствует решению \mathcal{T} на $\text{Pol}(C_n^{ref})$. Если \mathcal{T} имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$, то $\phi(\mathcal{T})$ имеет сюръективное решение.

Рассмотрим \mathcal{I} – экземпляр CSP(1IN3). Пусть $\psi(\mathcal{I})$ задается над сигнатурой $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, \dots, f_k, u_1, \dots, u_l\}$, где f_1, \dots, f_k – трехместные, u_1, \dots, u_l – двуместные. Рассмотрим формулу $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. По следствию 4 и лемме 10 если \mathcal{I} имеет решение, то $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение. Докажем, что для $n \geq 7$ если $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение, то $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$ (откуда по следствию 4 будет следовать, что \mathcal{I} имеет решение).

Рассмотрим сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Каждая переменная в этом решении соответствует значению полиморфизма $p_i(x, y, z)$ для некоторых $i \leq k, x, y, z \in E_n$ (по построению каждая двуместная $p_i, i > k$ получается из некоторой трехместной $p_j, j \leq k$ путем отождествления пары переменных). По построению $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}, x \in E_n : p_i(x, x, x) = p_j(x, x, x)$. Через $p(x, x, x)$ будем обозначать значение каждой $p_i(x, x, x)$.

Диагональю решения d будем называть количество различных значений $p(x, x, x)$ на всех $x \in E_n$, $1 \leq d \leq n$. Заметим, что если показать, что $d = n$, то это докажет, что каждый полиморфизм p_1, \dots, p_{k+l} является сюръективным.

Докажем несколько лемм, помогающих оценить d .

Лемма 10. Для любых $x, y, z \in E_n$ существует $r \in E_n$ такой, что $\rho((x, y, z), (r, r, r)) \leq c$, $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.

Доказательство. Заметим, что если в E_n есть путь длины s , то все элементы, через которые проходит этот путь (включая начальный и конечный), лежат в $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ окрестности какого-то элемента E_n .

Возьмем произвольные $x, y, z \in E_n$. Они соответствуют вершинам x, y, z в C_n^{ref} . Между любыми двумя из выбранных вершин есть два пути: один имеет длину s и не проходит через третью вершину, другой проходит через третью вершину и имеет длину $n - s$. Можно выбрать две вершины так, чтобы путь, который не проходит через третью вершину, имел длину $s \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Отсюда, путь между этими вершинами, проходящий через третью вершину, имеет длину $s' \leq n - \lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Значит, эти вершины лежат в $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$ -окрестности какого-то элемента r , откуда $\rho(x, r) \leq c$, $\rho(y, r) \leq c$ и $\rho(z, r) \leq c$. \square

Лемма 11. Пусть f — k -местный полиморфизм C_n^{ref} , $\bar{x}, \bar{y} \in E_n^k$, $f(\bar{x}) = a$, $f(\bar{y}) = b$, P — путь из \bar{x} в \bar{y} . Тогда P проходит через элементы со значениями $a \oplus 1, a \oplus 2, \dots, b \ominus 1$ или значениями $b \oplus 1, b \oplus 2, \dots, a \ominus 1$.

Доказательство. Пусть P имеет вид

$$P = \bar{x}^0 - \bar{x}^1 - \dots - \bar{x}^s,$$

где $\bar{x}^0 = \bar{y}$, $\bar{x}^s = \bar{x}$. Рассмотрим последовательность значений элементов этого пути в f . Так как f — полиморфизм, то для любого $i \in \{0, \dots, s-1\}$ элементы $f(\bar{x}^i)$ и $f(\bar{x}^{i+1})$ являются соседями. Тогда эта последовательность образует путь G в E_n :

$$G = f(\bar{x}^0) - f(\bar{x}^1) - \dots - f(\bar{x}^s).$$

G соответствует пути в графе C_n^{ref} из вершины $f(\bar{x}^0) = a$ в вершину $f(\bar{x}^s) = b$. Этот путь проходит через вершины $a \oplus 1, a \oplus 2, \dots, b \ominus 1$ или $b \oplus 1, b \oplus 2, \dots, a \ominus 1$, откуда P также проходит через элементы с этими значениями. \square

Лемма 12. Если произвольный $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ принимает больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ значений, то он сюръективен.

Доказательство. Пусть $f \in \text{Pol}(C_n^{ref})$ принимает только m значений $s, s \oplus 1, \dots, s \oplus m \ominus 1$ (по лемме 11 f должна принимать последовательные значения). Пусть также $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 < m < n$. Заметим, что в таком случае f не принимает $s \ominus 1, s \oplus m$. Тогда существуют \bar{x}, \bar{y} такие, что $f(\bar{x}) = s, f(\bar{y}) = s \oplus m \ominus 1$. По лемме 1 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, значит, по лемме 2 существует путь из \bar{x} в \bar{y} длиной не более, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Однако, по лемме 11 любой путь из \bar{x} в \bar{y} должен принимать все $m - 2$ промежуточных значений, отсюда, длина этого пути должна быть $m - 1$. Но $m - 1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Противоречие. Значит, либо $m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, либо $m = n$. \square

Лемма 13. Пусть \mathcal{I} – произвольный экземпляр задачи $\text{CSP}(1IN3)$. Тогда для каждого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ диагональ этого решения $d \geq n - 2c$, где $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.

Доказательство. По лемме 10 любой элемент $(x, y, z) \in E_n^3$ находится на расстоянии не больше, чем c от какого-то диагонального (r, r, r) , при этом из сюръективности каждое значение $\{0, \dots, n - 1\}$ принимается в какой-то точке (x, y, z) на какой-то функции p_i . Это значит, что если на диагонали принимаются значения $\{s, s \oplus 1, \dots, s \oplus d \ominus 1\}$, то c -окрестность этих значений должна покрывать все $\{0, \dots, n - 1\}$, то есть $d + 2c \geq n$. \square

Лемма 14. Пусть \mathcal{I} – произвольный экземпляр $\text{CSP}(1IN3)$. Для каждого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ верно:

- Если n – чётное, то диагональ решения $d = n$ или $d < 3$.
- Если n – нечётное, то диагональ решения $d = n$ или $d < 2$.

Доказательство. Пусть n – чётное, $d \geq 3$, на диагонали принимаются значения $s, s \oplus 1, s \oplus 2$. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k – решение, $\forall i \in \{1, \dots, k\} : p_i(r, r, r) = s \oplus 1$.

$\exists x, y, z \in E_n, j \in \{1, \dots, k\} : p_j(x, y, z) = \frac{n}{2} \oplus s \oplus 1$. По лемме 1 $\rho((x, y, z), (r, r, r)) \leq \frac{n}{2}$, откуда по лемме 2 между этими элементами есть путь длины не более, чем $\frac{n}{2}$, принимающий на p_j значения

$$s \oplus 1, s \oplus 2, \dots, \frac{n}{2} \oplus s, \frac{n}{2} \oplus s \oplus 1$$

или

$$\frac{n}{2} \oplus s \oplus 1, \frac{n}{2} \oplus s \oplus 2, \dots, s, s \oplus 1.$$

Заметим, что этот путь не принимает либо s , либо $s \oplus 2$. При этом, оба этих значения принимаются на диагонали. Тогда функция p_j всего принимает как минимум $\frac{n}{2} + 2$ значения, откуда по лемме 11 она сюръективна, и по следствию 3 $d = n$.

Пусть теперь n – нечётное, $d \geq 2$, на диагонали принимаются элементы $s, s \oplus 1$. Пусть $\forall i \in \{1, \dots, k\} : p_i(r, r, r) = s \oplus 1$. Из сюръективности $\exists x, y, z \in E_n, j \in \{1, \dots, k\} : p_j(x, y, z) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s \oplus 1$. По лемме 1 $\rho((x, y, z), (r, r, r)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, откуда по лемме 2 между этими элементами есть путь длины не более, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Этот путь принимает на p_j значения

$$s \oplus 1, s \oplus 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s \oplus 1$$

(и не принимает значение s), откуда всего функция p_j принимает $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2$ значения, значит, по лемме 12 она сюръективна, и по следствию 3 $d = n$. \square

Теорема 4. Пусть \mathcal{I} – произвольный экземпляр CSP(1IN3), $n \geq 7$. Тогда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$ тогда и только тогда, когда $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.

Доказательство. Пусть $\psi(\mathcal{I})$ задается над $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, \dots, f_k, u_1, \dots, u_l\}$, где f_1, \dots, f_k – трехместные символы, u_1, \dots, u_l – двуместные.

Пусть $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$. Рассмотрим решение – множество сюръективных полиморфизмов $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+l}$. Оно соответствует подстановке в переменные $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. По построению эта подстановка будет решением, при этом, так как каждая функция p_1, \dots, p_{k+l} – сюръективная, то и подстановка в $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ будет сюръективной.

Пусть существует сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Оно соответствует набору полиморфизмов $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+l}$. Пусть d – диагональ этого решения. Пусть также $d < n$. Тогда по лемме 14 $d < 3$ для четных n и $d < 2$ для нечётных n . Но по лемме 13 $d \geq n - 2c(n)$, где $c(n) = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$. Пусть $t(n) = n - 2c(n)$. Заметим, что $t(n+6) = t(n) + 2$. При этом $t(7) = 3, t(8) = 2, t(9) = 3, t(10) = 4, t(11) = 3, t(12) = 4$. Отсюда для четных n таких, что $n \geq 10$ верно $d \geq n - 2c(n) \geq 3$, но $d < 3$ – противоречие. Аналогично, для нечетных n таких, что $n \geq 7$ верно $d \geq n - 2c(n) \geq 2$, но $d < 2$. Отсюда, для $n = 7, n \geq 9$ имеем $d = n$, каждая функция принимает на диагональных элементах все значения, значит, сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на $\text{SPol}(C_n^{ref})$.

Рассмотрим теперь случай $n = 8$. Из леммы 14 следует, что для любого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ верно $d < 3$ или $d = 8$. При этом, если $d < 8$, то из леммы 13 следует, что $d \geq 2$.

Пусть $d = 2$. Тогда на диагональных элементах принимаются какие-то значения $s, s \oplus 1$. Пусть m – число различных диагональных элементов, на которых принимается значение s , $1 \leq s \leq 8$. Тогда значение $s \oplus 1$ принимается на $8 - m$ элементах. Из сюръективности решения существуют $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $x, y, z, x', y', z' \in E_8$ такие, что $p_i(x, y, z) = s \oplus 4$ и $p_j(x', y', z') = s \oplus 5$. Расстояние от (x, y, z) до всех (r, r, r) таких, что

$p_i(r, r, r) = s$ должно быть 4. Заметим, что таких элементов может быть не более трех: это $(x \oplus 4, x \oplus 4, x \oplus 4)$, $(y \oplus 4, y \oplus 4, y \oplus 4)$ и $(z \oplus 4, z \oplus 4, z \oplus 4)$ (некоторые из них могут совпадать). Отсюда, $m \leq 3$. Аналогично, если $p_j(x', y', z') = s \oplus 5$, то значение $s \oplus 1$ может приниматься только на элементах $(x' \oplus 4, x' \oplus 4, x' \oplus 4)$, $(y' \oplus 4, y' \oplus 4, y' \oplus 4)$ и $(z' \oplus 4, z' \oplus 4, z' \oplus 4)$ откуда $8 - m \leq 3$. Противоречие. Отсюда, при $n = 8$ верно $d = n$ и сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на $\text{SPol}(C_n^{ref})$. \square

Наконец, докажем теорему 3 об NP-трудности $\text{SCSP}(C_n^{ref})$.

Теорема 3. $\text{SCSP}(C_n^{ref})$ является NP-трудной при $n \geq 7$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный экземпляр $\mathcal{I} \in \text{CSP}(1IN3)$. По следствию 4 \mathcal{I} имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$, при этом по теореме 4 при $n \geq 7$ $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\text{SPol}(C_n^{ref})$ тогда и только тогда, когда существует сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Отсюда при $n \geq 7$ произвольный экземпляр $\mathcal{I} \in \text{CSP}(1IN3)$ имеет решение тогда и только тогда, когда определенный экземпляр $\text{SCSP}(C_n^{ref})$ имеет решение. Таким образом мы свели решение $\text{CSP}(1IN3)$ к решению $\text{SCSP}(C_n^{ref})$. При этом $\text{CSP}(1IN3)$ является NP-трудной, откуда при $n \geq 7$ $\text{SCSP}(C_n^{ref})$ также является NP-трудной. \square

2.3. Контрпримеры для случаев $n = 5, 6$

В данном разделе мы продемонстрируем примеры, которые показывают, почему предложенная в разделе 2.2 конструкция не подходит для определения сложности рефлексивных циклов длины 5, 6. Так как доказательство строилось на сведении NP-трудной задачи $\text{CSP}(1IN3)$, достаточно показать такой экземпляр \mathcal{I} этой задачи, что он не имеет удовлетворяющей подстановки, тогда как формула $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективную подстановку.

Теорема 5. Пусть $n = 5, 6$. Тогда существует такой экземпляр \mathcal{I} задачи $\text{CSP}(1IN3)$, что \mathcal{I} не имеет решения, но $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.

Доказательство. Рассмотрим следующий \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = 1IN3(x_1, x_2, x_3) \wedge 1IN3(x_4, x_5, x_6) \wedge 1IN3(x_1, x_5, x_7).$$

Очевидно, он не имеет решения, так как $1IN3(x_1, x_1, x_1)$ либо содержит три единицы, либо не содержит единиц вообще. Минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y, x, x) &= g_1(x, y) & f_2(y, x, x) &= g_4(x, y) & f_3(y, x, x) &= g_1(x, y) \\ f_1(x, y, x) &= g_2(x, y) & f_2(x, y, x) &= g_5(x, y) & f_3(x, y, x) &= g_5(x, y) \\ f_1(x, x, y) &= g_3(x, y) & f_2(x, x, y) &= g_6(x, y) & f_3(x, x, y) &= g_7(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x, x, x) &= f_2(x, x, x) \\ f_2(x, x, x) &= f_3(x, x, x). \end{aligned}$$

Любое решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на полиморфизмах C_n^{ref} .

Пусть $n = 5$. Рассмотрим следующие полиморфизмы:

$$p_1(x, y, z) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x, y, z) = (2, 3, 0), \\ 1, & \text{если } \rho((x, y, z), (2, 3, 0)) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x, y, z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x, y, z) = (1, 4, 2), \\ 4, & \text{если } \rho((x, y, z), (1, 4, 2)) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_3(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y, z) \in \{(1, 4, 4), (2, 4, 4), (3, 4, 4)\} \\ 4, & \text{если } (x, y, z) \in \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1), \\ & (2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 2)\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_{1_1}(x, y) &= p_1(y, x, x), & p_{2_1}(x, y) &= p_2(y, x, x), \\ p_{1_2}(x, y) &= p_1(x, y, x), & p_{2_2}(x, y) &= p_2(x, y, x), \\ p_{1_3}(x, y) &= p_1(x, x, y), & p_{2_3}(x, y) &= p_2(x, x, y), \\ h(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Затем, рассмотрим следующее отображение F :

$$\begin{aligned} F(f_1) &= p_1, & F(g_3) &= p_{1_3}, \\ F(f_2) &= p_2, & F(g_4) &= p_{2_1}, \\ F(f_3) &= p_3, & F(g_5) &= p_{2_2}, \\ F(g_1) &= p_{1_1}, & F(g_6) &= p_{2_3}, \\ F(g_2) &= p_{1_2}, & F(g_7) &= h. \end{aligned}$$

Можно легко убедиться в том, что это отображение действительно будет решением $\psi(\mathcal{I})$ на $\text{Pol}(C_5^{ref})$. При этом, решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$, соответствующее F , будет сюръективным, так как $p_1(0, 0, 0) = 0, p_1(1, 4, 0) = 1, p_2(2, 3, 0) = 2, p_2(4, 1, 2) = 3, p_2(0, 0, 1) = 4$. Значит, \mathcal{I} не имеет решения, а $\psi(\phi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.

Пусть теперь $n = 6$. Если полиморфизмы из решения $\psi(\mathcal{I})$ не сюръективны, то, согласно леммам 14, 15, диагональ d этого решения должна быть равна 2. Рассмотрим следующие полиморфизмы:

$$p_1(x, y, z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x, y, z) = (0, 2, 4), \\ 2, & \text{если } \rho((x, y, z), (0, 2, 4)) = 1, \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (3, 3, 3), (5, 5, 5)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x, y, z) &= \begin{cases} 4, & \text{если } (x, y, z) = (1, 3, 5), \\ 5, & \text{если } \rho((x, y, z), (1, 3, 5)) = 1, \\ 1, & \text{если } (x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (2, 2, 2), (4, 4, 4)\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\
p_3(x, y, z) &= \begin{cases} 2, & \text{если } (x, y, z) \in \{(5, 3, 3), (0, 3, 3), (1, 3, 3)\} \\ 5, & \text{если } (x, y, z) \in \{(0, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 4, 0)\} \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (3, 3, 3), (5, 5, 5)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \\
p_{1_1}(x, y) &= p_1(y, x, x), & p_{2_1}(x, y) &= p_2(y, x, x), \\
p_{1_2}(x, y) &= p_1(x, y, x), & p_{2_2}(x, y) &= p_2(x, y, x), \\
p_{1_3}(x, y) &= p_1(x, x, y), & p_{2_3}(x, y) &= p_2(x, x, y), \\
h(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

Затем, рассмотрим следующее отображение:

$$\begin{aligned}
F(f_1) &= p_1, & F(g_3) &= p_{1_3}, \\
F(f_2) &= p_2, & F(g_4) &= p_{2_1}, \\
F(f_3) &= p_3, & F(g_5) &= p_{2_2}, \\
F(g_1) &= p_{1_1}, & F(g_6) &= p_{2_3}, \\
F(g_2) &= p_{1_2}, & F(g_7) &= h.
\end{aligned}$$

Данное отображение удовлетворяет всем тождествам (так, на диагональных элементах все полиморфизмы совпадают и выводят 0 или 1). Значит, F является решением $\psi(\mathcal{I})$ на $\text{Pol}(C_6^{ref})$. Подстановка, в $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствующая этому решению, является сюръективной, так как $p_1(1, 1, 1) = 0, p_1(0, 0, 0) = 1, p_1(1, 2, 3) = 2, p_1(0, 2, 4) = 3, p_2(1, 3, 5) = 4, p_2(0, 2, 4) = 5$. Значит, \mathcal{I} не имеет решения, но $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение. \square

Complexity of surjective homomorphism problem to reflexive cycles

Korchagin N.P.

In this article we explore the complexity of the decision problem which takes a graph as an input and asks, if there is a surjective homomorphism from it to some fixed graph \mathcal{G} . We prove, that if \mathcal{G} is a reflexive cycle with 7 or more vertices, then this problem is NP-hard.

The proof is based on a novel approach, which enables reduction of a constraint satisfaction problem to the problem of satisfying a system of equations, which, in turn, is reduced to solving surjective constraint satisfaction problem.

Keywords: surjective homomorphisms, computation complexity, constraint satisfaction, polymorphisms.

Список литературы

- [1] Bodirsky, M., Kára, J. & Martin, B. The complexity of surjective homomorphism problems—a survey. *Discrete Applied Mathematics*. **160**, 1680-1690 (2012), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X12001333>
- [2] Chen, H. An algebraic hardness criterion for surjective constraint satisfaction. *Algebra Universalis*. **72** pp. 393-401 (2014)
- [3] Golovach, P., Johnson, M., Martin, B., Paulusma, D. & Stewart, A. Surjective H-colouring : new hardness results.. *Computability*.. **8**, 27-42 (2019), <http://dro.dur.ac.uk/24228/>
- [4] Bulatov, A. A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs. *2017 IEEE 58th Annual Symposium On Foundations Of Computer Science (FOCS)*. pp. 319-330 (2017), <http://arxiv.org/abs/1703.03021>
- [5] Zhuk, D. A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture. *J. ACM*. **67** (2020,8), <https://doi.org/10.1145/3402029>
- [6] Focke, J., Goldberg, L. & Živný, S. The Complexity of Counting Surjective Homomorphisms and Compactions. *SIAM Journal On Discrete Mathematics*. **33**, 1006-1043 (2019),
- [7] Larose, B., Martin, B. & Paulusma, D. Surjective H-Colouring over Reflexive Digraphs. *ACM Trans. Comput. Theory*. **11** (2018,11), <https://doi.org/10.1145/3282431>
- [8] Vikas, N. Computational Complexity Relationship between Compaction, Vertex-Compaction, and Retraction. *Journal Of Discrete Algorithms*. **52-53** pp. 168-181 (2018), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570866718301631>, Combinatorial Algorithms – Special Issue Devoted to Life and Work of Mirka Miller
- [9] Vikas, N. A complete and equal computational complexity classification of compaction and retraction to all graphs with at most four vertices and some general results. *Journal Of Computer And System Sciences*. **71**, 406-439 (2005), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000004000911>
- [10] Martin, B. & Paulusma, D. The computational complexity of disconnected cut and 2K2-partition. *Journal Of Combinatorial Theory, Series B*. **111** pp. 17-37 (2015), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895614001026>

- [11] Schaefer, T. The Complexity of Satisfiability Problems. *Proceedings Of The Tenth Annual ACM Symposium On Theory Of Computing*. pp. 216-226 (1978), <https://doi.org/10.1145/800133.804350>
- [12] Barto, L. Algebraic Theory of Promise Constraint Satisfaction Problems, First Steps. *Fundamentals Of Computation Theory: 22nd International Symposium, FCT 2019, Copenhagen, Denmark, August 12-14, 2019, Proceedings*. pp. 3-17 (2019), https://doi.org/10.1007/978-3-030-25027-0_1
- [13] Vikas, N. Algorithms for Partition of Some Class of Graphs under Compaction and Vertex-Compaction. *Algorithmica*. **67** pp. 180 - 206 (2011)
- [14] Zhuk, D. No-Rainbow Problem and the Surjective Constraint Satisfaction Problem. *Proceedings Of The 36th Annual ACM/IEEE Symposium On Logic In Computer Science*. (2021), <https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470632>
- [15] Golovach, P., Paulusma, D. & Song, J. Computing vertex-surjective homomorphisms to partially reflexive trees. *Theoretical Computer Science*. **457** pp. 86-100 (2012), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397512006561>
- [16] Vikas, N. Computational complexity of compaction to irreflexive cycles. *Journal Of Computer And System Sciences*. **68**, 473-496 (2004), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000003000345>
- [17] Vikas, N. Computational Complexity of Graph Partition under Vertex-Compaction to an Irreflexive Hexagon. *42nd International Symposium On Mathematical Foundations Of Computer Science, MFCS 2017, August 21-25, 2017 - Aalborg, Denmark*. **83** pp. 69:1-69:14 (2017), <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.MFCS.2017.69>
- [18] Larivière, I., Larose, B. & Pullas, D. Surjective polymorphisms of reflexive cycles. (2022)
- [19] Feder, T. & Vardi, M. The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory. *SIAM Journal On Computing*. **28**, 57-104 (1998),
- [20] Barto, L., Buln, J., Krokhin, A. & Opršal, J. Algebraic Approach to Promise Constraint Satisfaction. *J. ACM*. **68** (2021,7), <https://doi.org/10.1145/3457606>