Об автоматных неисправностях при алфавитном кодировании

П. С. Дергач[1] Д. Б. Бахрамова[1]

В данной работе исследован вопрос о возможных неисправностях регулярных языков, сохраняющих свойство неоднозначности алфавитного кодирования. Показано, что любая диаграмма Мура, задающая неоднозначно кодируемый язык, всегда может сохранить свойство неоднозначности при разовой неисправности выходного значения на стрелке.

Ключевые слова: алфавитное кодирование, диаграмма Мура, автоматные неисправности.

1. Введение

В настоящее время автоматы, использующие алфавитное кодирование, широко применяются в различных областях, таких как телекоммуникации, компьютерные системы, промышленность и другие. Однако при использовании таких автоматов могут возникать неисправности, которые могут привести к сбоям в работе системы.

Одним из ключевых элементов обработки информации является кодирование, которое позволяет преобразовывать информацию из одной формы в другую, сохраняя при этом целостность и точность. Однако, при использовании различных методов кодирования могут возникать проблемы, такие как потеря однозначности или возникновение неоднозначности при восстановлении схем кодирования.

Целью данной статьи является описание класса диаграмм Мура, которые могут сохранить свойство неоднозначности декодирования при разовой неисправности.

Для желающих подробнее изучить проблематику алфавитного кодирования рекомендуются к прочтению работы [6-8]. С проблематикой тестирования и диагностики неисправностей логических устройств можно ознакомиться в работах [9-11].

[1] *Дергач Пётр Сергеевич* — к.ф.-м.н., м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: dergachpes@gmail.com.

Dergach Peter Sergeevich — Ph.D., junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

[2] *Бахрамова Диляра Бахрамовна* — выпускник Филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Ташкенте, e-mail: bkhr.lia.1807@gmail.com.

Bakhramova Dilyara Bakhramovna — Graduate of the M. V. Lomonosov Moscow State University Branch in Tashkent.

2. Постановка задачи

Рассматриваем Диаграмму Мура с входным и выходным алфавитами $0, 1$ и функцию алфавитного кодирования с теми же входным и выходным алфавитами. Пусть эта Диаграмма Мура распознает по выходному символу 1 регулярный язык P и f неоднозначно на P. Требуется определить, всегда ли найдется единичная неисправность выходного значения на стрелке диаграммы, для которой новый распознаваемый по выходному символу 1 регулярный язык по-прежнему неоднозначен на f.

3. Основные определения и формулировки

Определения этого раздела взяты по большей части из источников [1-5].

Пусть C - некоторое конечное множество, называемое *алфавитом.* Элементы этого множества называем *буквами.* Если $\gamma = c(1)...c(n)$ - конечная последовательность букв алфавита C , то говорим, что γ есть *слово* в алфавите C. Число n называем *длиной слова* γ и обозначаем $|\gamma|$. *Абстрактным конечным автоматом* называется набор

$$V = (A, Q, B, \phi, \psi),$$

где A, Q, B - конечные множества, ϕ - функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из Q, ψ - функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из B. Множества A, Q, B называются соответственно *входным алфавитом, алфавитом состояний* и *выходным алфавитом* автомата V. Функция ϕ – называется *функцией переходов*, а функция ψ - *функцией выходов автомата* V.

Пусть $V = (A, Q, B, \phi, \psi)$ – конечный абстрактный автомат. Для каждого состояния q автомата V можно рассмотреть набор (A, Q, B, ϕ, ψ, q), определяющий автомат V с выделенным начальным состоянием q. Такие наборы (A, Q, B, ϕ, ψ, q) называются *инициальными конечными абстрактными автоматами.*

Класс инициальных конечных абстрактных автоматов с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$ обозначаем через K_2.

Функции переходов и выходов алфавита

$$V = (A, Q, B, \phi, \psi, q)$$

доопределим на множестве $Q \times A^*$ (сохраним за ними те же обозначения). Именно, полагаем по определению

$$\phi(q, \alpha a) = \phi(\phi(q, \alpha), a),$$

где $q \in Q, \alpha \in A^*, a \in A$. Аналогично,

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\phi(q, \alpha), a).$$

Автомат

$$V = (\{0,1\}, Q, \{0,1\}, \phi, \psi, q)$$

допускает слово α, если при подаче на вход α последний символ слова $\phi(q, \alpha)$ соответствующего выходного слова равен 1. Множество слов, допускаемых автоматом, обозначаем через $1(V)$ и называем его *распознаваемым автоматом.*

Диаграммой Мура автомата

$$V = (\{0,1\}, Q, \{0,1\}, \phi, \psi, q)$$

называется ориентированный граф G, вершинами которого являются состояния $q \in Q$ и для каждого равенства вида $\phi(a, q) = q^*$ граф имеет ребро, идущее из q в q^*, на котором стоит метка a, b, где $b = \psi(q, a)$. Начальное состояние q помечается на диаграмме звездочкой.

Для построения диаграммы Мура для каждого состояния q_i алфавита $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ на плоскости размещается свой круг, внутри каждого круга пишется символ q_i. Далее рассматриваются всевозможные пары (q_i, a_j), где $q_i \in Q, a_j \in A, A = \{0,1\}$. Для каждой такой пары от круга, в котором записан символ q_i, проводится стрелка к кругу, в котором записан символ $\phi(q_i, a_j)$. Этой стрелке приписывается пара $(a_j, \psi(q_i, a_j))$.

Пусть $A = \{a_1, ..., a_r\}$ – произвольный конечный непустой алфавит. Пусть P_1, P_2 – непустые множества слов в алфавите A. Определим следующие операции над P_1 и P_2.

1) *Объединение* множеств P_1 и P_2 (обозначим $P_1 \cup P_2$) есть множество всех слов вида α, где $\alpha_1 \in P_1$ или $\alpha_2 \in P_2$.

2) *Итерация* множества P_1 (обозначаем $(P_1)^*$) есть множество всех слов вида $\alpha_1, ..., \alpha_k$, где $\alpha_1 \in P_1, ..., \alpha_k \in P_1, k \geq 1$.

3) *Конкатенация* множеств P_1 и P_2 (обозначаем $P_1 \cdot P_2$) есть множество всех слов вида $\alpha_1 \alpha_2$, где $\alpha_1 \in P_1, \alpha_2 \in P_2$.

Введем понятие регулярного множества в алфавите A. Множество P называется *регулярным в алфавите* A, если его можно получить из пустого множества и одноэлементных однобуквенных множеств $a, a \in A$, применением конечного числа конкатенаций, объединений и итераций. Более подробно, определение регулярных множеств таково:

1) $\emptyset$ – регулярное множество в алфавите A;

2) a, где a – произвольная буква алфавита A, – регулярное множество в алфавите A;

3) Если P_1, P_2 – регулярное множества в алфавите A, то и множества $P_1 \cup P_2, P_1 \cdot P_2, (P_1)^*$ – регулярные множества в алфавите A;

4) Регулярность произвольного множества в алфавите A устанавливается в соответствиями с пунктами (1)-(3) за конечное число шагов.

Отображение $f : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ следующего вида

$$f(0) = \alpha,$$

$$f(1) = \beta$$

называем *схемой кодирования из алфавита* $\{0,1\}$ *в алфавит* $\{0,1\}$. Множество всех схем кодирования из алфавита $\{0,1\}$ в алфавит $\{0,1\}$ обозначаем через F_2.

Пусть β – непустое слово в алфавите A. Если существует слово α в алфавите A, для которого при некотором $k \in \mathbb{N}$ имеем $\beta = \alpha^k$, то называем слово α *измельчением слова* β.

Пусть $f \in F_2$ и слова $f(0), f(1)$ соизмеримы. Называем класс таких схем соизмеримым и обозначаем его через $\hat{F}_2$.

Доопределим отображение $f \in F_2$ до отображения $\tilde{f} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ следующим образом:

$$\tilde{f}(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}) = f(a_{i_1}) f(a_{i_2}) ... f(a_{i_n}).$$

Отображение $\tilde{f}$ называется *алфавитным кодированием из алфавита* $\{0,1\}$ *в алфавит* $\{0,1\}$.

Пусть $f \in F_2$ и $P \subseteq \{0,1\}^*$ – регулярный язык. Кодирование $\tilde{f}$ называется *взаимно однозначным* на P, если разные слова из P переходят в разные слова.

Пусть G – диаграмма Мура. *Единичной неисправностью выхода* называем замену выходного значения $\phi(q,a)$ на одном из ребер диаграммы (0 заменяется на 1, 1 заменяется на 0).

Пусть $f \in F_2$ и G – диаграмма Мура, для автомата $V \in K_2$, причем $\tilde{f}$ неоднозначно на $1(V)$. Пусть ρ – ребро диаграммы G. Говорим, что единичная неисправность выхода на ρ *сохраняет свойство неоднозначности на* f, если f неоднозначно на языке, задаваемом диаграммой после неисправности.

Теорема 1. *Пусть G – диаграмма Мура автомата $V \in K_2$ и пусть $f \in F_2$ – алфавитное кодирование, неоднозначное на $1(V)$. Тогда в G найдется такое ребро, замена выходного значения которого сохраняет свойство неоднозначности на f.*

4. Доказательства вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Пусть A – конечный алфавит, $\alpha, \beta \in A^* \setminus \{\Lambda\}$ и $\alpha^k = \beta^m$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\nu \in A^* \setminus \{\Lambda\}$ такое, что*

$$|\nu| = (|\alpha|, |\beta|), \alpha = \nu^{|\alpha|/|\nu|}, \beta = \nu^{|\beta|/|\nu|}.$$

Доказательство. Доказательство леммы приведено во второй главе [1]. □

Лемма 2. *Пусть $f \in F_2$ и $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$. Тогда f неоднозначно на $\{0, 1\}^*$ тогда и только тогда, когда α и β соизмеримы.*

Доказательство. Доказательство леммы приведено в [2] (Лемма 10). □

Лемма 3. *Если язык $P \subseteq \{0, 1\}^*$ неоднозначен на $f \in F_2$, то при единичной неисправности замены выходного значения $0 \to 1$ сохраняется неоднозначность.*

Доказательство. В неоднозначном регулярном языке, который мы рассматриваем изначально, есть пара различных слов, имеющих одинаковый код. При расширении языка это свойство сохраняется. □

Лемма 4. *Если язык $P \subseteq \{0, 1\}^*$ однозначен на $f \in F_2$, то при единичной неисправности замены выходного значения $1 \to 0$ сохраняется однозначность.*

Доказательство. В однозначном регулярном языке, который мы рассматриваем изначально, нет пары различных слов, имеющих одинаковый код. При сужении языка это свойство сохраняется. □

Лемма 5. *Пусть $f \in \hat{F}_2$, $V \in K_2$ и G – его диаграмма Мура, причем все выходные значения на стрелках в ней равны 1. Пусть в G есть достижимое из начальной вершины q_0 состояние q, через которое проходит пара циклов с входными значениями слов α и β, причем эта пара слов несоизмерима. Тогда $\tilde{f}$ не взаимно однозначно на $1(V)$.*

Доказательство. Пусть γ – слово в алфавите $\{0,1\}$, при подаче которого на q_0 автомат переходит в состояние q. Тогда множества $\gamma\alpha^*$ и $\gamma\beta^*$ лежат в $1(V)$, так как все выходные значения диаграммы равны 1. Так как $f(0)$ и $f(1)$ соизмеримы, то

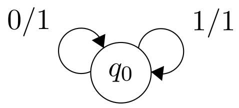
$$f(0) = \nu^r,$$

$$f(1) = \nu^s$$

для некоторых $\nu \in \{0,1\}^*$, $r,s \in \mathbb{N}$. Тогда $\tilde{f}(\alpha) = \nu^{r_1}, \tilde{f}(\beta) = \nu^{s_1}$ для некоторых $r_1, s_1 \in \mathbb{N}$. В этом случае слова $\gamma\alpha^{s_1}$ и $\gamma\beta^{r_1}$ имеют одинаковый код. Но они не равны, так как иначе они были бы соизмеримы (по Лемме 1). $\square$

Лемма 6. *Пусть $f \in \hat{F}_2$, $V \in K_2$ и G – его диаграмма Мура, имеющая не больше двух ребер и причем все выходные значения диаграммы равны* 1*. Тогда в G существует единичная неисправность выхода, сохраняющая свойство неоднозначности на f.*

Доказательство. Заметим, что единственная диаграмма Мура, имеющая не более двух ребер, выглядит так:



Поэтому $1(V) = \{0,1\}^*$. Очевидно, что f неоднозначна на $1(V)$, так как для $f \in \hat{F}_2$ имеем

$$f(0) = \nu^r,$$

$$f(1) = \nu^s$$

для некоторых $\nu \in \{0,1\}^*$, $r,s \in \mathbb{N}$. И $\tilde{f}(01) = \tilde{f}(10)$.

Покажем теперь верность основного утверждения леммы. Применим единичную неисправность к выходу ребра с входным значением 0. Получим диаграмму, задающую множество $\{0,1\}^*1$. Так как $\tilde{f}(011) = \tilde{f}(101)$, то наша неисправность сохраняет свойство неоднозначности на f. Утверждение леммы доказано. $\square$

5. Доказательства основных утверждений

Теорема 1. Пусть G – диаграмма Мура автомата $V \in K_2$ и пусть $f \in F_2$ – алфавитное кодирование, неоднозначное на $1(V)$. Тогда в G найдется такое ребро, замена выходного значения которого сохраняет свойство неоднозначности на f.

Доказательство. Если в G есть хотя бы одно ребро с выходным значением 0, то при единичной неисправности на таком ребре язык расширится и по лемме 3 получаем сохранение свойства неоднозначности на f.

Далее будем считать, что все ребра в G имеют выходные значения 1. Будем подавать последовательность из 0 на начальное состояние диаграммы G. В какой-то момент мы вернемся к вершине (назовем ее q_1), в которой были ранее, то есть образуется цикл. Теперь на q_1 подаем последовательность из 1. В какой-то момент мы встретим вершину (назовем ее q_2), которая была ранее на 0 или вершину (назовем ее q_3), которая была на 1.

Рассмотрим случай, когда вернулись на вершину q_2 и эта вершина была в последовательности по 0 до вершины q_1 (показано на Рис. 1).

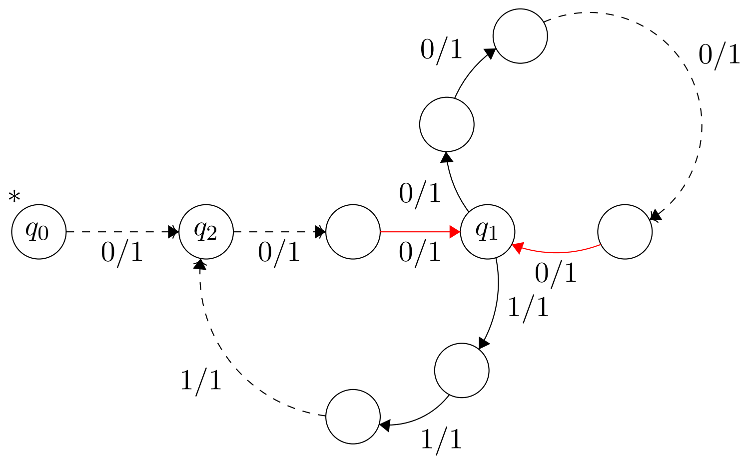


Рис.1.

Тогда через вершину q_1 проходит два цикла, причем в одном из циклов подаются только 0, а в другом – и 0, и 1. Поэтому в силу леммы 5 $\tilde{f}$ неоднозначно на $1(V)$. Чтобы это свойство сохранилось, нам достаточно применить единичную неисправность к ребру, которое отлично от последних ребер циклов. Это всегда можно сделать, если в диаграмме G есть хотя бы три ребра. Если же в G нет трех ребер, то утверждение следует из леммы 6.

Рассмотрим случай, когда мы вернулись в цикл по 0 (показано на Рис. 2).

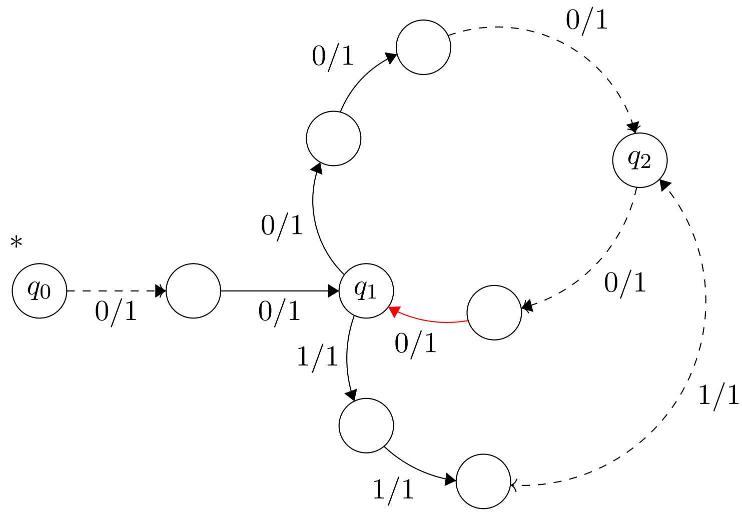


Рис.2.

Тогда через вершину q_1 проходит два цикла, причем в одном из циклов подаются только 0, а в другом – и 0, и 1. или только 1 (когда $q_1 = q_2$). Далее рассуждение полностью повторяет доказательство предыдущего случая.

Рассмотрим случай, когда вернулись на вершину по 1 (показано на Рис.3.)

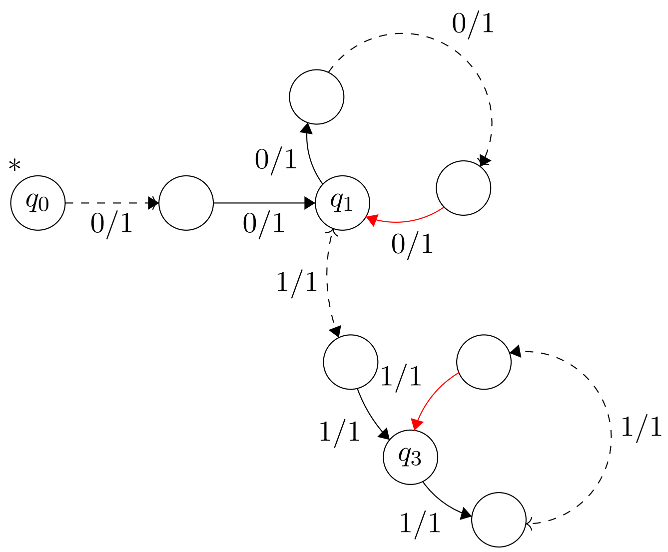


Рис.3.

Тогда подадим последовательность из 0 на вершину q_3. Здесь опять возможны три случая. Либо мы вернемся к вершине, которая была до последнего цикла из 1, либо мы вернемся к вершине, которая была на этом цикле, либо мы образуем новый цикл. В первых двух случаях рассуждения полностью аналогичны рассуждениям, приводимым выше (с образованием двух циклов, один из которых состоит или только из 0, или только из 1, а другой – либо и из 0, и из 1, либо только из противоположного бита к первому циклу). А в третьем случае, образуется новый цикл по 0. В какой-то момент новые циклы образовываться перестанут и рассуждение завершится. Утверждение доказано. □

6. Заключение

В данной статье было исследовано важное свойство автоматов, связанное с неоднозначностью алфавитного кодирования на диаграммах Мура. Было установлено, что для произвольной диаграммы Мура G автомата $V \in K_2$ и для произвольного алфавитного кодирования $f \in F_2$, неоднозначного для $1(V)$, всегда найдется единичная неисправность выходного значения на ребре, сохраняющая свойство неоднозначности на f.

Дальнейшим направлением исследования могло бы послужить нахождение классов диаграмм Мура, сохраняющих свойсто однозначности хотя бы при одной единичной неисправности. Также интерес представляет исследование для случая, когда рассматривается свойство онднозначности/неоднозначности при произвольной единичной неисправности.

Список литературы

[1] Дергач П.С., “Алфавитное кодирование регулярных языков с полиномиальной функцией роста.”, *Кандидатская диссертация,*, 2016,, стр. 1–213..

[2] Дергач П.С., “О проблеме вложения допустимых классов.”, *Интеллектуальные системы, изд. МГУ, М.,*, **том 19, № 2.** (2015,), стр. 143–174..

[3] Дергач П.С., “Об однозначности алфавитного декодирования.”, *Дискретная математика -М.: Наука,*, **том 24, № 4,** (2012,), стр. 80–90..

[4] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин., “Введение в теорию автоматов.”, *М.: Наука*, 1985..

[5] Яблонский С.В., “Введение в дискретную математику.”, *М.: Наука,*, 1986..

[6] Dergach P.S., “On uniqueness of alphabetical decoding of -regular languages.”, *Discrete Mathematics and Applications, издательство V S P (Netherlands),*, **том 24, № 3,** (2014,), стр. 139–152..

[7] Марков А. А., “Введение в теорию кодирования.”, *М: Наука,*, 1982..

[8] Жильцова П. Л., “Современные проблемы теории кодирования.”, *Учебное пособие, Нижний Новгород.*, 2007..

[9] Редькин П. Н., “Надёжность и диагностика схем.”, *М.: Изд-во МГУ,*, 1992,, стр. 192..

[10] Попков А. К., “Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов.”, *Дискретная математика.*, **том. 29. Вып. 2.** (2017,), стр. 53–69..

[11] Романов С. Д., “Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины.”, *Discrete Mathematics.*, **том. 26. Вып. 2.** (2014.), стр. 100–130..

About automaton malfunctions in alphabetical coding

Dergach P.S., Bahramova D.B.

The question of possible faults in regular languages that preserve the property of ambiguity in alphabet coding is investigated in this work. It is shown that any Moore diagram that defines a language with ambiguous encoding can always maintain the property of ambiguity in the event of a one-time fault in the output value on an arrow.

Keywords: alphabet encoding, Moore diagram, automaton faults.

References

[1] Dergach P.S., “Alphabetic encoding of regular languages with polynomial growth function”, *PhD thesis*, 2016, 1–213.

[2] Dergach P.S., “About the problem of embedding permissible classes.”, *Intelligent Systems, published by MSU, Moscow,*, **Volume 19 No. 2.** (2019), 143–174.

[3] Dergach P.S., “On the unambiguity of alphabet decoding.”, *Discrete Mathematics - Moscow: Nauka*, **Volume 24 No. 4.** (2012), 80–90.

[4] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V, Podkolzin A.S., “Introduction to automata theory”, 1985.

[5] Yablonskiy S.V., “Introduction to discrete math”, 1986.

[6] Dergach P.S., “On uniqueness of alphabetical decoding of -regular languages”, *Discrete Mathematics and Applications, publisher V S P (Netherlands),*, **Volume 24, No. 3.** (2014), 139–152.

[7] Markov A. A., “Introduction to Coding Theory”, *Moscow: Nauka.*, 1982.

[8] Zhiltsova P. L., “Introduction to Coding Theory”, *Educational Manual, Nizhny Novgorod.*, 2007.

[9] Redkin P. N., “Reliability and Fault Diagnosis of Circuits.”, *Moscow: Moscow State University Publishing.*, 1992, 192.

[10] Popkov A. K., “Lower Bounds on the Lengths of Unit Tests for Circuits Composed of Functional Elements.”, *Discrete Mathematics.*, **Volume 29. Issue 2.** (2017), 53–69.

[11] Romanov S. D., “Method of Synthesis of Easily Testable Circuits Allowing Unit-Length Checking Tests.”, *Discrete Mathematics.*, **Volume 26. Issue 2.** (2014.), 100–130.