Графы ортогональности матриц над коммутативными кольцами

О. Г. Стырт[1] [2]

Работа посвящена исследованию графа ортогональности кольца матриц над коммутативным кольцом. Доказано, что граф ортогональности кольца матриц размера более 1 над коммутативным нецелостным кольцом связен и имеет диаметр 3 либо 4; получен критерий для каждого из значений. Также доказано, что любая его вершина удалена от некоторой скалярной матрицы не более, чем на 2.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо с единицей, коммутативное кольцо, делитель нуля, кольцо матриц, граф делителей нуля, граф ортогональности.

1. Введение

В современной математике важное место занимает изучение свойств ассоциативных колец в терминах графов некоторых алгебраических бинарных отношений, возникающих естественным образом. Так, *граф делителей нуля* был впервые определён в 1986 г. И. Беком [1] для коммутативного кольца. Его вершинами были все делители нуля, а рёбра проводились в точности между всеми парами различных элементов с нулевым произведением. Однако с 1999 г. используется более удобная его интерпретация, которую ввели Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [2], исключив нулевой элемент кольца из множества его вершин. Также в ней доказано, что граф делителей нуля коммутативного кольца связен и имеет диаметр не более трёх; в прежней трактовке графа данные утверждения были бы бессодержательными. В ряде дальнейших работ также изучаются различные характеристики графа делителей нуля: центр и радиус [8], вопросы планарности [4] и однозначности восстановления кольца по графу

[1] *Стырт Олег Григорьевич* — доцент каф. дискретной математики Физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ, e-mail: oleg_styrt@mail.ru.

Styrt Oleg Grigoryevich — associate professor, MIPT, The Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Chair of Discrete Mathematics.

[2] *Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание) №075-00337-20-03, номер проекта 0714-2020-0005.*

The research is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Goszadaniye) 075-00337-20-03, project No. 0714-2020-0005.

с точностью до изоморфизма [3, 5]. Для некоммутативных колец имеется несколько разновидностей графов, определённых делителями нуля:

Название	Ориентация рёбер	Вершины	Ребро из x в y	См.
Ор. граф делителей нуля	есть	1- и 2-стор. делители нуля	$xy = 0$	[6, 7]
(Неор.) граф делителей нуля	нет	Ненулевые 1- и 2-стор. делители нуля	$(xy = 0) \vee (yx = 0)$	[7]
Граф ортогональности	нет	Ненулевые двустор. делители нуля	$(xy = 0) \wedge (yx = 0)$	[9, 10]

Основные имеющиеся к текущему моменту результаты для графов ортогональности некоммутативных колец относятся прежде всего к матричным кольцам. Так, в случае, если основное кольцо является телом, получены следующие свойства графа ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц: при $n = 2$ он несвязен, и все его связные компоненты имеют диаметры не более 2, а при $n \geq 3$ он связен и имеет диаметр 4. Эти утверждения доказаны в 2014 г. для поля [9], а позднее, в 2017 г. — для произвольного тела [10]; их также легко обобщить на целостные кольца (путём перехода к полю частных).

В данной же работе изучен граф ортогональности кольца матриц над коммутативным нецелостным кольцом и доказаны следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо с множеством делителей нуля $Z_R \neq \{0\}$. Тогда для любого $n > 1$ граф ортогональности кольца $(n \times n)$-матриц над R связен и имеет диаметр 3 либо 4, причём значение 3 равносильно соотношению*

$$\forall\, a_0 \in Z_R \quad \exists\, a_1, a_2 \in R \setminus \{0\} \qquad \forall\, i, j \in \{0, 1, 2\},\ i \neq j: \quad a_i a_j = 0, \quad (1)$$

а каждая его вершина удалена от некоторой скалярной матрицы не более, чем на 2.

Теорема 2. *Пусть r — радиус графа в условиях теоремы 1. Тогда*

1) $2 \leq r \leq 4$;

2) если выполнено (1), то $r \in \{2; 3\}$;

3) $r = 2$, если и только если найдётся элемент $c \in R \setminus \{0\}$, такой что

$$\forall\, a \in Z_R \quad Ann(c) \cap Ann(a) \neq 0. \tag{2}$$

2. Вспомогательные соглашения

В работе будут использованы следующие обозначения и соглашения.

1) Теоретико-множественные:

- При перечислении элементов неупорядоченного набора (или множества) используются фигурные скобки. Элементы же упорядоченного набора перечисляются в круглых скобках и могут повторяться.
- $D^n := \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n}$ — n-я декартова степень множества D.

2) Общие алгебраические:

- Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и с единицей.
- R — произвольное кольцо.
- Для произвольного подмножества $D \subset R$ положим $D^* := D \setminus \{0\}$. В частности, через R^* обозначается подмножество всех ненулевых (необязательно обратимых, как в общепринятой интерпретации) элементов R.
- Идеал в R *собственный*, если он не равен R.
- $M_{m\times n}(R)$ — R-модуль $(m \times n)$-матриц над R; $M_n(R)$ — кольцо $M_{n\times n}(R)$. Если в скобках вместо кольца указывается некоторое его подмножество D, то такая запись означает подмножество всех матриц с элементами из D.
- 0_n^m — нулевая $(m \times n)$-матрица; $0_n := 0_n^n$; E_n — единичная $(n \times n)$-матрица; J_r — жорданова клетка размера r с собственным значением 0. Если размеры матрицы ясны из контекста, то индексы могут опускаться.
- E_{kl} — матричная единица (a_{ij}), $a_{ij} := \delta_{ki}\delta_{lj}$.
- Для квадратной матрицы A над коммутативным кольцом: $\widetilde{A}$ — матрица её алгебраических дополнений; $\widehat{A} := \big(\widetilde{A}\big)^T$.
- Если $A = (a_{k_1,k_2}) \in M_{n_1\times n_2}(R)$, $P_i \in \{1, \ldots, n_i\}^{m_i}$ $(i = 1, 2)$, то $A_{P_2}^{P_1}$ — матрица $(b_{l_1,l_2}) \in M_{m_1\times m_2}(R)$, $b_{l_1,l_2} := a_{k_1(l_1),k_2(l_2)}$, где

$k_i(l_i)$ — l_i-й элемент P_i. Если ни в P_1, ни в P_2 числа не повторяются, то $A_{P_2}^{P_1}$ есть подматрица A с номерами строк и столбцов из P_1 и P_2 соответственно.

3) По видам делителей нуля:

- Элемент $a \in R$ называется
  - *левым (*соотв. *правым) делителем нуля*, если найдётся элемент $b \in R^*$, такой что $ab = 0$ (соотв. $ba = 0$);
  - *делителем нуля*, если он является левым либо правым делителем нуля;
  - *двусторонним делителем нуля*, если он является одновременно левым и правым делителем нуля.

  При этом
  - в коммутативном кольце понятия всех видов делителей нуля равносильны;
  - нуль есть двусторонний делитель нуля; если других делителей нуля нет, то R называют *кольцом без делителей нуля*.
- *Целостное кольцо* — коммутативное кольцо без делителей нуля.

4) Из общей теории графов:

- Все рассматриваемые графы предполагаются неориентированными.
- $\Gamma = (V, E)$ — произвольный граф; V и E — множества его вершин и рёбер соответственно. При этом можно (и зачастую удобно) задавать E при помощи симметричного бинарного отношения на V.
- Две вершины *смежны*, если они соединены ребром.
- *Подграф* — граф с множеством вершин $V' \subset V$ и, если не оговорено противное, с прежним бинарным отношением, ограниченным на V'.
- *Путь* — последовательность вершин, из которых любые две соседних вершины смежны.
- *Длина* пути — число его рёбер.
- *Расстояние* между вершинами v и w (обозн. $d(v, w)$) — наименьшая длина соединяющего их пути; при его отсутствии полагаем $d(v, w) := +\infty$; знак в данном контексте очевиден и поэтому будет опускаться. Ясно, что $\big(d(v, w) = 0\big) \Leftrightarrow (v = w)$.

- *Расстояние* от вершины v до подмножества $W \subset V$ (обозн. $d(v, W)$) — число $\min\{d(v, w) : w \in W\}$.
- $d(v) := \sup\{d(v, w) : w \in V\}$ $(v \in V)$.
- *Диаметр* Γ — число $\operatorname{diam}(\Gamma) := \sup\{d(v, w) : v, w \in V\} = \max\{d(v) : v \in V\}$.
- *Радиус* Γ — число $\operatorname{rad}(\Gamma) := \min\{d(v) : v \in V\}$. Ясно, что
$$\operatorname{rad}(\Gamma) \leq \operatorname{diam}(\Gamma) \leq 2 \cdot \operatorname{rad}(\Gamma). \tag{3}$$
- Граф *связен*, если любые две его вершины можно соединить путём.

  Замечание 1. *Легко видеть, что граф с конечным диаметром связен. Обратное неверно; пример — множество натуральных чисел с отношением соседства.*

5) По специальным графам в алгебраических структурах:

- $O(R)$ — граф ортогональности кольца R (для коммутативного кольца это не что иное как граф делителей нуля).
- Вершинами $O(R)$ служат все ненулевые двусторонние делители нуля кольца R; соотношение ортогональности ($xy = yx = 0$) записывается как ($x \perp y$); $O_R(x)$ — множество всех вершин, ортогональных x.

3. Доказательства результатов

Рассмотрим произвольное коммутативное кольцо R. Через $\operatorname{Ann}(a)$ ($a \in R$) обозначим идеал $\{x \in R : ax = 0\}$, через Z_R — множество $\{a \in R : \operatorname{Ann}(a) \neq 0\}$ всех делителей нуля. Пусть, далее, S — кольцо $M_n(R)$ ($n > 1$). Посредством естественного вложения колец $R \hookrightarrow S$, $a \to aE$ отождествим R с подкольцом $RE \subset S$ (и, таким образом, $O(R)$ — с подграфом графа $O(S)$). Для $A \in S$ положим $I_A := \operatorname{Ann}(\det A) \lhd R$.

Граф $O(R)$ связен и имеет диаметр не более 3 (см. теорему 2.3 в [2, § 2]). Кроме того, если R — тело, то

1) при $n = 2$ граф $O(S)$ несвязен, и все его связные компоненты имеют диаметры ≤ 2;

2) при $n \geq 3$ граф $O(S)$ связен и имеет диаметр 4.

Эти результаты получены в [9, § 4] для полей (лемма 4.1 и теорема 4.5 соответственно), а в [10, § 2] обобщены на произвольные тела (лемма 2.2 и теорема 2.1 соответственно). Переносятся они и на целостные кольца (путём перехода к полю частных).

Теорема 3. *Для любых матрицы $A \in S$ и собственного идеала $I \lhd R$, содержащего* $\det A$, *найдётся матрица $B \in S \setminus \big(M_n(I)\big)$, такая что $AB, BA \in M_n(I)$.*

Доказательство. Положим $Q_m := \{1, \ldots, m\}$ и $P_m := (1, \ldots, m) \in \mathbb{N}^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Рассмотрим всевозможные тройки (k, P', P'') $(k \geq 0,\ P', P'' \in (Q_n)^k)$, удовлетворяющие соотношению $\det(A^{P'}_{P''}) \notin I$. Для любой из них ни в P', ни в P'' нет повторяющихся чисел и, согласно условию, $k < n$. Кроме того, по крайней мере одна такая тройка существует: для $k := 0$ и пустых наборов P', P'' соответствующая (0×0)-матрица имеет определитель $1 \notin I$. Значит, мы можем фиксировать одну из этих троек с наибольшим возможным k, и тогда $0 \leq k < n$, $m := k + 1 \in Q_n$.

Случай 1). $P' = P'' = P_k$.

По построению $\det(A^{P_k}_{P_k}) \notin I$. Далее, положим $C := A^{P_m}_{P_m} \in M_m(R)$,

$$B := \begin{pmatrix} \widehat{C} & 0^m_{n-m} \\ 0^{n-m}_m & 0_{n-m} \end{pmatrix} \in S.$$

Тогда $b_{m,m} = \det(A^{P_k}_{P_k}) \notin I$, откуда $B \notin M_n(I)$. Покажем, что $AB, A^T B^T \in M_n(I)$, т. е. что для любых $p, q \in Q_n$ матричные элементы $(AB)_{p,q}$ и $(A^T B^T)_{p,q}$ лежат в I. Будем считать, что $p \in Q_n$ и $q \in Q_m$ (иначе $(AB)_{p,q} = (A^T B^T)_{p,q} = 0$). Пусть $P \in (Q_n)^m$ — набор, полученный из P_m заменой q-го элемента на p. Ввиду максимальности k, а также неравенства $m > k$, имеем $\det(A^P_{P_m}), \det(A^{P_m}_P) \in I$,

$$(AB)_{p,q} = \sum_{i \in Q_n} (a_{p,i} b_{i,q}) = \sum_{i \in Q_m} \big(a_{p,i} (\widehat{C})_{i,q}\big) = \sum_{i \in Q_m} \big(a_{p,i} (\widetilde{C})_{q,i}\big) = \det(A^P_{P_m}) \in I;$$

$$(A^T B^T)_{p,q} = \sum_{i \in Q_n} \big((A^T)_{p,i} (B^T)_{i,q}\big) = \sum_{i \in Q_m} \big(a_{i,p} (\widetilde{C})_{i,q}\big) = \det(A^{P_m}_P) \in I.$$

Тем самым установлено, что $AB, (BA)^T = A^T B^T \in M_n(I)$, откуда $BA \in M_n(I)$.

Случай 2). $P', P'' \in (Q_n)^k$ *— произвольные наборы.*

В каждом из наборов P' и P'' все числа попарно различны. Значит, надлежащими перестановками строк и столбцов можно из A получить матрицу A_0, попадающую под случай 1) с тем же k. По уже доказанному, существует матрица $B_0 \in S \setminus \big(M_n(I)\big)$, для которой $A_0 B_0, B_0 A_0 \in M_n(I)$. При этом найдутся мономиальные (стало быть, обратимые) матрицы $C_1, C_2 \in S$, такие что $A = C_1 A_0 C_2^{-1}$. Умножение матрицы слева (соотв. справа) на мономиальную переставляет её строки (соотв. столбцы), и, следовательно, $B := C_2B_0C_1^{-1} \in S \setminus \bigl(M_n(I)\bigr)$, $AB = C_1(A_0B_0)C_1^{-1}, BA = C_2(B_0A_0)C_2^{-1} \in M_n(I)$. □

Следствие 1. *Если $A \in S$ и $c \in I_A^*$, то в подмножестве $(cS)^* \subset S$ существует элемент, ортогональный A.*

Доказательство. По условию $I := \mathrm{Ann}(c) \lhd R$ — собственный идеал, содержащий $\det A$. Согласно теореме 3, найдётся матрица $B \in S \setminus \bigl(M_n(I)\bigr)$, для которой $AB, BA \in M_n(I)$. В таком случае $C := cB \neq 0$ и $c(AB) = c(BA) = 0$, т. е. $C \in (cS)^*$ и $AC = CA = 0$. □

Лемма 1. *Для произвольного $A \in S$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\det A \in Z_R$*;*

2) $I_A \neq 0$*;*

3) в S^* существует элемент, ортогональный A;

4) A — двусторонний делитель нуля;

5) A — делитель нуля.

Доказательство. Импликации 1) $\Leftrightarrow$ 2) и 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) очевидным образом вытекают из определений, а импликация 2) $\Rightarrow$ 3) — из следствия 1.

Докажем импликацию 5) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что, не умаляя общности, A — левый делитель нуля, т. е. что $AB = 0$ для некоторого $B \in S^*$. Тогда $\widehat{A}A = (\det A)E$, откуда $(\det A)B = \widehat{A}AB = 0$. Осталось воспользоваться нетривиальностью B. □

Следствие 2. *Все делители нуля в S двусторонние.*

Пусть $Z_S \subset S$ — подмножество всех элементов $A \in S$, удовлетворяющих каждому из эквивалентных условий 1)—5) леммы 1, т. е. множество всех делителей нуля кольца S. Тогда множество вершин графа $O(S)$ есть Z_S^*.

Далее будем считать, что $Z_R^* \neq \varnothing$.

Утверждение 1. *Если $I \lhd R$ и $I \neq 0$, то $Z_R \cap I \neq \{0\}$.*

Доказательство. Предположим, что $Z_R \cap I = \{0\}$. Существуют элементы $b \in I^*$ и $c \in Z_R^*$; тогда $bc \in Z_R \cap I = \{0\}$. Итак, $bc = 0 \neq c$, откуда $b \in Z_R \cap I^* = \varnothing$. Получили противоречие. □

Лемма 2. *Если для подмножества $D \subset S$ идеал $I := \bigcap\limits_{A \in D} I_A \lhd R$ ненулевой, то существуют элементы $b \in Z_R^*$ и $C_A \in S^*$, $A \in D$, такие что $bE \perp C_A \perp A$ $(A \in D)$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1, идеал I содержит элемент $c \in Z_R^*$. Тогда $bc = 0$, где $b \in Z_R^*$. Далее, для произвольного $A \in D$ имеем $c \in I_A^*$ и, ввиду следствия 1, найдётся элемент $C_A \in (cS)^*$, ортогональный A; при этом $bC_A \in bcS = 0$, $bE \perp C_A$. □

Следствие 3.

1) *Для любого* $A \in Z_S^*$ *имеем* $d\big(A, O(R)\big) \le 2$.

2) *Если* $A_1, A_2 \in Z_S^*$ *и* $I_{A_1} \cap I_{A_2} \neq 0$, *то* $d(A_1, A_2) \le 4$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 2 к подмножествам $\{A\}$ и $\{A_1, A_2\}$ множества S. □

Лемма 3. *Если* $A_i \in Z_S^*$, $c_i \in I_{A_i}^*$ $(i = 1, 2)$ *и* $c_1 c_2 = 0$, *то* $d(A_1, A_2) \le 3$.

Доказательство. В силу следствия 1, для любого $i = 1, 2$ найдётся элемент $C_i \in (c_i S)^*$, такой что $C_i \perp A_i$. При этом $C_1C_2, C_2C_1 \in c_1c_2S = 0$, $C_1 \perp C_2$. □

Определение. Будем говорить, что идеал $I \lhd R$ *не имеет делителей нуля*, если $I^*I^* \not\ni 0$, т. е. если *кольцо* (вообще говоря, без единицы) I не имеет делителей нуля.

Лемма 4. *Если* $A_1, A_2 \in Z_S^*$ *и* $d(A_1, A_2) > 3$, *то* I_{A_i} $(i = 1, 2)$ *— один и тот же идеал без делителей нуля.*

Доказательство. Согласно лемме 3, $I_{A_1}^* I_{A_2}^* \not\ni 0$. Осталось доказать, что $I_{A_1} = I_{A_2}$.

Допустим, что $I_{A_1} \neq I_{A_2}$. Не умаляя общности, будем считать, что найдётся элемент $c \in I_{A_1} \setminus I_{A_2}$. Полагая $a := \det A_2$, имеем $I_{A_2} = \operatorname{Ann}(a)$, $b := ca \in I_{A_1}^*$ и $bI_{A_2} = caI_{A_2} = 0$, откуда $bI_{A_2}^* \subset \{0\} \cap (I_{A_1}^* I_{A_2}^*) = \varnothing$, $I_{A_2}^* = \varnothing$, $I_{A_2} = 0$, что невозможно. □

Теорема 4. *Граф* $O(S)$ *связен и имеет диаметр не более* 4.

Доказательство. Предположим, что существуют элементы $A_1, A_2 \in Z_S^*$, такие что $d(A_1, A_2) > 4$. По лемме 4 $0 \neq I_{A_1} = I_{A_2} = I_{A_1} \cap I_{A_2}$, что противоречит следствию 3. □

Теорема 5. *Имеем* $\operatorname{diam}\big(O(S)\big) \ge 3$, *причём строгое неравенство эквивалентно существованию идеала вида* $\operatorname{Ann}(a) \lhd R$ $(a \in Z_R)$ *без делителей нуля.*

Доказательство. Наподобие примеров из [9, 10], дающих нижние оценки диаметра, для произвольного $a \in Z_R$ положим $I := \operatorname{Ann}(a) \lhd R$ и $A := J_n + aE_{n1} \in S$. Заметим, что

- $A, A^T \in Z_S^*$, $O_S(A) = I^* E_{1n}$, $O_S(A^T) = I^* E_{n1}$;
- $a_{12} = 1 \neq a_{21}$, $(AA^T)_{11} = 1$ и $O_S(A) \cap O_S(A^T) = \varnothing$, откуда $d(A, A^T) \geq 3$;
- если $I^* I^* \not\ni 0$, то $\bigl(O_S(A)\bigr)\bigl(O_S(A^T)\bigr) = (I^* I^*) E_{11} \not\ni 0$ и, значит, $d(A, A^T) \geq 4$.

Ввиду вышесказанного, $\operatorname{diam}\bigl(O(S)\bigr) \geq 3$, причём для строгого неравенства достаточно существования идеала вида $\operatorname{Ann}(a) \lhd R$ ($a \in Z_R$) без делителей нуля. Обратно, в случае строгого неравенства по лемме 4 для некоторых элементов $A \in Z_S$ и $a := \det A \in Z_R$ идеал $I_A = \operatorname{Ann}(a) \lhd R$ не имеет делителей нуля. □

Теперь основная теорема 1 вытекает из теорем 4 и 5, а также следствия 3. Из неё, а также из неравенств (3) следуют утверждения 1) и 2) теоремы 2. Докажем 3).

Предположим, что $\operatorname{rad}\bigl(O(S)\bigr) = 2$. Найдутся элементы $C \in Z_S^*$, $c \in R^*$ и $k, l \in Q_n$, такие что $d(C, A) \leq 2$ ($A \in Z_S^*$) и $c_{kl} = c$. Далее, существует подстановка $\sigma \in S_n$, для которой $m := \sigma(k) \neq l$.

Пусть $a \in Z_R$ — произвольный элемент.

Положим $I := \operatorname{Ann}(a) \lhd R$ и $A := \Bigl(\sum\limits_{i \neq k} E_{i,\sigma(i)}\Bigr) + aE_{km} \in S$. Заметим, что

- $A \in Z_S^*$, $O_S(A) = I^* E_{mk}$;
- $A \neq C$ (иначе $a_{kl} = c \neq 0$, $m = l$);
- $(m, k) \neq (k, l)$ (иначе $m = k = l$), откуда $C \notin O_S(A)$.

Таким образом, $d(C, A) = 2$, и тогда найдётся элемент $B \in Z_S^*$, ортогональный C и A. Имеем $B = bE_{mk}$, где $b \in I^*$. При этом $BC = 0$, $0 = (BC)_{ml} = bc$, $b \in \operatorname{Ann}(c) \cap I^*$.

Ввиду произвольности $a \in Z_R$, элемент $c \in R^*$ удовлетворяет (2).

Обратно, предположим, что для некоторого $c \in R^*$ выполнено (2). Покажем, что элемент $C := cE \in S^*$ удовлетворяет для каждого $A \in Z_S^*$ неравенству $d(C, A) \leq 2$.

Пусть $A \in Z_S^*$ — произвольный элемент. Тогда $\det A \in Z_R$, и, ввиду (2), существует элемент $b \in I_A^*$, такой что $cb = 0$. Далее, согласно следствию 1, найдётся элемент $B \in (bS)^*$, ортогональный A; при этом $cB \in cbS = 0$, $C \in Z_S^*$, $C \perp B \perp A$, $d(C, A) \leq 2$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Благодарности

Автор благодарит д. ф.-м. н. проф. $\boxed{\text{Э. Б. Винберга}}$ за привитый интерес к алгебре.

Автор посвящает статью заместителю директора департамента министерства сельского хозяйства РФ Е. Н. Трошиной.

Список литературы

[1] Beck I., “Coloring of commutative rings”, *J. Algebra*, **116** (1988), 208–226.

[2] Anderson D. F., Livingston P. S., “The zero-divisor graph of a commutative ring”, *J. Algebra*, **217** (1999), 434–447.

[3] Anderson D. F., Frazier A., Lauve A., Livingston P. S., “The zero-divisor graph of a commutative ring, II”, *Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York*, **220** (2001), 61–72.

[4] Akbari S., Maimani H. R., Yassemi S., “When zero-divisor graph is planar or a complete r–partite graph”, *J. Algebra*, **270** (2003), 169–180.

[5] Akbari S., Mohammadian A., “On the zero-divisor graph of a commutative ring”, *J. Algebra*, **274** (2004), 847–855.

[6] Akbari S., Mohammadian A., “Zero-divisor graphs of non-commutative rings”, *J. Algebra*, **296** (2006), 462–479.

[7] Akbari S., Mohammadian A., “On zero-divisor graphs of finite rings”, *J. Algebra*, **314** (2007), 168–184.

[8] Redmond S. P., “Central sets and radii of the zero-divisor graphs of commutative rings”, *Comm. in Algebra*, **34**:7 (2006), 2389–2401.

[9] Бахадлы Б. Р., Гутерман А. Э., Маркова О. В., “Графы, определённые ортогональностью”, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **428** (2014), 49–80.

[10] Гутерман А. Э., Маркова О. В., “Графы ортогональности матриц над телами”, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **463** (2017), 81–93.

Orthogonality graphs of matrices over commutative rings

Styrt O.G.

The paper is devoted to studying the orthogonality graph of the matrix ring over a commutative ring. It is proved that the orthogonality graph of the ring of matrices with size greater than 1 over a commutative ring with zero-divisors is connected and has diameter 3 or 4; a criterion for each value is obtained. It is also shown that each of its vertices has distance at most 2 from some scalar matrix.

Keywords: associative ring with identity, commutative ring, zero-divisor, matrix ring, zero-divisor graph, orthogonality graph.

Список литературы

[1] Beck I., "Coloring of commutative rings", *J. Algebra*, **116** (1988), 208–226.

[2] Anderson D. F., Livingston P. S., "The zero-divisor graph of a commutative ring", *J. Algebra*, **217** (1999), 434–447.

[3] Anderson D. F., Frazier A., Lauve A., Livingston P. S., "The zero-divisor graph of a commutative ring, II", *Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York*, **220** (2001), 61–72.

[4] Akbari S., Maimani H. R., Yassemi S., "When zero-divisor graph is planar or a complete r–partite graph", *J. Algebra*, **270** (2003), 169–180.

[5] Akbari S., Mohammadian A., "On the zero-divisor graph of a commutative ring", *J. Algebra*, **274** (2004), 847–855.

[6] Akbari S., Mohammadian A., "Zero-divisor graphs of non-commutative rings", *J. Algebra*, **296** (2006), 462–479.

[7] Akbari S., Mohammadian A., "On zero-divisor graphs of finite rings", *J. Algebra*, **314** (2007), 168–184.

[8] Redmond S. P., "Central sets and radii of the zero-divisor graphs of commutative rings", *Comm. in Algebra*, **34**:7 (2006), 2389–2401.

[9] Bakhadly B. R., Guterman A. E., Markova O. V., "Graphs defined by orthogonality", *Computational methods and algorithms. Part XXVII, Zap. Nauchn. Sem. POMI, St. Petersburg*, **428** (2014), 49–80 (In Russian).

[10] Guterman A. E., Markova O. V., "Orthogonality graphs of matrices over skew fields", *Computational methods and algorithms. Part XXX, Zap. Nauchn. Sem. POMI, St. Petersburg*, **463** (2017), 81–93 (In Russian).