

Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

А. А. Медведев¹

Исследована алгоритмическая сложность задачи о поиске семейства простых циклов, обходящих каждую вершину орграфа с полустепенями вершин, не превосходящими 2. Рассмотрены поисковый и оптимизационный ее варианты. Показана полиномиальная разрешимость задачи в обоих вариантах, предложен алгоритм со временем работы $O(n^3)$, для частной постановки представлен алгоритм, требующий $O(n^2)$ операций; n — количество вершин орграфа.

Ключевые слова: ориентированные графы, простые циклы, задачи поиска, оптимизация, класс P, полиномиальная разрешимость.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются частные постановки задачи о поиске в заданном ориентированном графе такого набора непересекающихся простых циклов, который покрывал бы все множество вершин этого графа. Она, в свою очередь, является обобщением задачи о гамильтоновом цикле, известной в разрешимостном (определить, является ли заданный граф гамильтоновым) и нескольких оптимизационных вариантах (требуется найти гамильтонов цикл с ограниченным тем или иным образом весом, если такой цикл существует). На сегодняшний день доказана NP-полнота поисковой задачи о гамильтоновом цикле в общей постановке (на произвольных ориентированных и неориентированных графах) [1], трехсвязных 3-регулярных двудольных графах [2], подграфах квадратных решеток [3] и кубических подграфах квадратных решеток [4], орграфах с полустепенями вершин не более 2 [5]. В то же время известна полиномиальная разрешимость этой задачи на четырехсвязных планарных графах [6], неориентированных графах с максимальной степенью вершин, не превосходящей 3 [7], и в оптимизационной постановке (иначе — задачи коммивояжера) на графах, матрицы весов которых являются матрицами Демиденко [8] и в общей постановке [9]. Кроме того, по-

¹Медведев Анатолий Александрович — студент каф. "Высшая математика"(ФН-1) факультета "Фундаментальные науки"(ФН) МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: medvedevaa@student.bmstu.ru.

Medvedev Anatoly Alexandrovich — student, Bauman Moscow State Technical University, Department of Fundamental Sciences, Chair of Higher Mathematics.

лучен ряд проверяемых за полиномиальное время достаточных условий существования гамильтонова цикла: Дирака–Оре [10, 11], Гуйя–Ури [12], Woodall [13], Christofides [14], Keevash [15], Kelly [16]. Задача, исследование которой проводится в настоящей работе, представляет интерес как связанная с задачей о гамильтоновом цикле, поскольку всякое решение последней может служить решением задачи о семействе циклов. Ниже эта задача рассмотрена в разрешимостной и оптимизационной постановках.

2. Неоптимизационная задача о семействе простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

Определение 1. Вершинно-простым циклом в ориентированном графе $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, называется такая последовательность из m вершин и m дуг $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m$, что $\forall i (i = \overline{1, m-1})(v_i \in V)(e_i \in E)(e_i = (v_i, v_{i+1}))$ и, кроме того, $e_m = (v_m, v_1)$, причем если $i \neq j$, то $v_i \neq v_j$.

Определение 2. Ориентированный граф $G = (V, E)$ со множеством вершин V и дуг E называется взвешенным, если для него определена функция $w = w(v, u), v, u \in V$, равная некоторому значению из $R \setminus \{0\}$, если $(v, u) \in E$, и 0 в противном случае.

Определение 3. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей весов W взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности $|V| \times |V|$, что $W_{ij} = w(v_i, v_j)$.

Определение 4. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей смежности A взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности $|V| \times |V|$, что $A_{ij} = 1$, если $(v_i, v_j) \in E$, и 0 в противном случае.

Определение 5. Ориентированный граф $G = (V, E)$ со множеством вершин V и дуг E невзвешенный, если его матрица весов W тождественна матрице смежности A .

Определение 6. (Задача НСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v (v \in V)(deg^{out} v \leq 2)(deg^{in} v \leq 2)$. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них.

Пример 1. Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поиском в глубину находим в нем простые циклы: $1 - 2 - 3 - 1$, $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$, $1 - 3 - 1$, $1 - 3 - 4 - 5 - 1$, $4 - 5 - 4$.

Следующие наборы циклов являются решением задачи НСЦ для этого орграфа: $\{1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1\}$, $\{1 - 2 - 3 - 1, 4 - 5 - 4\}$.

Далее рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_2 ,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на котором задача НСЦ решения не имеет.

Поиском в глубину находятся циклы: $1 - 2 - 5 - 4 - 1$, $1 - 5 - 4 - 1$.

Никакой набор, составленный из этих циклов, очевидно не может быть решением задачи хотя бы потому, что ни один из них не содержит вершины 3.

Определение 7. XOR-КНФ называется форма представления булевой функции в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^m \bigoplus_{j=1}^{|A_k|} x_{\alpha_{kj}}^{\sigma_{kj}} = \bigwedge_{k=1}^m R_k(x, \Sigma_k, A_k), \quad (1)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — булева функция,

$x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, — булевы переменные,

A_k — упорядоченное по возрастанию множество индексов переменных, входящих в k -й XOR-дизъюнкт R_k , $A_k \subseteq \overline{1, 2, 3, \dots, n}$,

α_{kj} — j -й элемент множества A_k ,

$\sigma_{kj} \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n}$, — степени, трактуемые таким образом: если $\sigma_{kj} = 0$, то переменная $x_{\alpha_{kj}}$ входит в R_k без отрицания; если $\sigma_{kj} = 1$, то с отрицанием,

x — булев вектор, координатами которого являются переменные x_i , $i = \overline{1, n}$,

Σ_k — множество степеней переменных, входящий в k -й XOR-дизъюнкт R_k , упорядоченное так, что первый его элемент, σ_{k1} , является степенью первой переменной в R_k , второй, σ_{k2} , — второго и т. д.

Определение 8. (Задача XOR-SAT) Пусть имеется булева функция, представленная в XOR-КНФ 1. Требуется найти хотя бы один такой набор значений ее переменных, при котором она выполняется.

Теорема 1. Задача XOR-SAT принадлежит к классу P и может быть решена за время $O(n^3)$, где n — число переменных, методом Гаусса [17].

Лемма 1. Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно; всякий его подграф, имеющий для каждой вершины ровно одну исходящую и одну входящую дугу, является семейством вершинно-простых циклов, обходящим все вершины графа G . Если же такого семейства граф G не содержит, то нет и подграфа, обладающего указанным свойством.

Доказательство. Так как для каждой вершины была выбрана лишь одна исходящая и одна входящая дуга, то между двумя любыми смежными вершинами в полученном подграфе существует единственный путь. Кроме того, это означает, что каждая вершина смежна лишь с одной по вхождению и лишь с одной по исходу. Таким образом, если путь между двумя вершинами рассматриваемого подграфа существует, то он единствен. Следовательно, подграф состоит из набора вершинно-простых цепей. Покажем теперь, что все цепи в этом наборе являются замкнутыми, то есть вершинно-простыми циклами. Предположим противное, то есть, что хотя бы одна из цепей незамкнута. Если это так, то подграф должен содержать две вершины, у одной из которых исходящая, а у другой входящая степень равна нулю. Но это невозможно по построению. Значит, подграф представляет собой семейство простых циклов. Оно обходит все вершины графа G , так как для каждой его вершины была выбрана пара инцидентных ей дуг. Далее, рассмотрим орграф G' , о котором известно, что он не содержит семейства вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Допустим, что при этом удалось выделить в G' подграф, включающий все его вершины, причем такой, что каждая из них инцидентна лишь одной дуге по вхождению и лишь одной по исходу. Но, в силу доказанного выше, это означает, что в орграфе G' содержится семейство вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Из этого противоречия следует, что если в орграфе нет такого семейства, то его подграфа с указанным свойством также не существует, это совпадает с утверждением теоремы. \square

Теорема 2. Задача НСЦ принадлежит к классу P .

Доказательство. Сведем задачу НСЦ к задаче XOR-SAT. Пусть орграф G задан в виде матрицы смежности или матрицы весов. Заметим, что

так как по условию задачи, каждая его вершина должна содержаться ровно в одном цикле искомого семейства, все циклы которого должны быть вершинно-простыми, то в подграфе, являющемся решением задачи, из каждой вершины будет исходить ровно одна дуга, также как и входит в нее будет только одна. Таким образом, в тех случаях, когда входящая или исходящая степень вершины более единицы, необходимо выбрать лишь одну из входящих (или, соответственно, исходящих) дуг, причем для каждой вершины такой набор из одной входящей и одной исходящей дуги должен быть найден, если только исходное семейство существует (если граф его не содержит, то для какой-либо вершины такой набор получить невозможно, иначе она оказалась бы включенной в цикл).

Пусть $m = |E|$. Произвольным образом упорядочим и пронумеруем элементы множества E . Введем булевы переменные x_1, \dots, x_m , такие, что

$$x_i = \begin{cases} 1, & e_i \in E_C; \\ 0, & e_i \notin E_C. \end{cases}$$

Где E_C — множество дуг искомого семейства.

Составим булеву функцию в XOR-КНФ, объединив в XOR-дизъюнкты сначала переменные, соответствующие дугам, исходящим из одной вершины, а затем исходящие. Полученная функция, в силу леммы 1, имеет непустой носитель тогда и только тогда, когда существует решение задачи НСЦ. \square

Пример 2.

Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_1 . Поставим в соответствие дугам орграфа булевы переменные в порядке обхода матрицы слева направо и сверху вниз:

$$\begin{aligned} e_{12} &\leftrightarrow x_1, e_{13} \leftrightarrow x_2, e_{23} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} &\leftrightarrow x_4, e_{34} \leftrightarrow x_5, e_{42} \leftrightarrow x_6, \\ e_{45} &\leftrightarrow x_7, e_{51} \leftrightarrow x_8, e_{54} \leftrightarrow x_9; \end{aligned}$$

и составим булеву функцию по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_9) &= (x_1 \oplus x_2) \wedge x_3 \wedge (x_4 \oplus x_5) \wedge (x_6 \oplus x_7) \wedge (x_8 \oplus x_9) \wedge \\ &\wedge (x_4 \oplus x_8) \wedge (x_1 \oplus x_6) \wedge (x_2 \oplus x_3) \wedge (x_5 \oplus x_9) \wedge x_7. \end{aligned}$$

В силу свойств конъюнкции, функция f истинна лишь тогда, когда истинен каждый из XOR-дизъюнктов, это значит, что поиск набора значений ее переменных, при котором это условие выполнено, тождествен

решению системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 \oplus x_7 = 1; x_8 \oplus x_9 = 1; x_4 \oplus x_8 = 1; \\ x_1 \oplus x_6 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1; x_5 \oplus x_9 = 1; x_7 = 1. \end{cases}$$

Так как любое множество с заданными на нем операциями исключающего «или» (\oplus) и умножения на 0 или 1 образует кольцо относительно этих операций, то к уравнениям над ней применим метод Гаусса (с учетом тождеств $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$ и $1 \oplus 1 = 0$).

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода.

Изначально:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Система вырождена, количество свободных переменных — одна. Выберем в качестве свободной переменную x_9 и, придав ей значение 1, найдем решение задачи ОНСЦ: $x_1 = x_3 = x_4 = x_7 = x_9 = 1$, $x_2 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$. Возвращаясь от булевых переменных к дугам орграфа, видим, что в решение задачи НСЦ входят дуги $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$. Вместе с инцидентными им вершинами они образуют семейство циклов

$\{1-2-3-1, 4-5-4\}$, которое действительно является решением задачи НСЦ.

Теперь применим метод к орграфу, заданному матрицей смежности A_2 , который, как показано выше, не содержит подграфов — решений НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{aligned} e_{12} &\leftrightarrow x_1, e_{15} \leftrightarrow x_2, e_{25} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} &\leftrightarrow x_4, e_{32} \leftrightarrow x_5, e_{41} \leftrightarrow x_6, e_{54} \leftrightarrow x_7. \end{aligned}$$

Система —

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 = 1; x_7 = 1; x_4 \oplus x_6 = 1; \\ x_1 \oplus x_5 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода Гаусса.

Изначально:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Из шестого уравнения $x_6 = 0$, но в то же время из седьмого $x_6 = 1$, что означает несовместность системы. Таким образом, ее решение не существует, как не существует и решения задачи НСЦ.

3. Оптимизационная задача о семействе циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

Определение 9. (Задача ОНСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v (v \in V) (deg^{out} v \leq 2) (deg^{in} v \leq 2)$, и вещественное число q . Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил q .

Теорема 3. *Задача ОНСЦ принадлежит к классу P и может быть решена за время $O(n^3)$.*

Доказательство. Поскольку орграф принадлежит к тому же классу, на котором поставлена задача НСЦ, можно построить систему алгебраических уравнений с исключаяющим «или» по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2. Применим к этой системе прямой ход метода Гаусса. В общем случае система может содержать линейно зависимые уравнения. Матрица системы содержит $2n$ строк (максимальное возможное число переменных), обозначим k число свободных переменных (оно равно числу нулевых строк матрицы после приведения ее к ступенчатому виду). Каждому конкретному набору их значений будет соответствовать одно из решений системы. Очевидно, $k \leq 2n$, где $n = |V|$. Выберем первую свободную переменную и зададим ей значение (0 или 1), обратным ходом метода Гаусса получим значения некоторого количества базисных переменных. Вычислим две суммы: сумму весов дуг, соответствующих свободной переменной, и тех базисных, которые приняли значение 1, а затем тех базисных, которые приняли значение 0. Прделаем то же для каждой свободной переменной. В силу равенств: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 1$ — и того, что каждое уравнение содержит не более двух переменных, следует, что все единичные значения, полученные при свободной переменной, равной 1, станут нулевыми, и наоборот, если приравнять ее нулю. Из каждой пары сумм выберем максимальную и, присвоив базисным и свободным переменным соответствующие значения, получим решение системы с наибольшим суммарным весом дуг.

Для каждой свободной переменной существует множество базисных, которые определяются при обратном ходе метода Гаусса в зависимости от ее значения. Для любых двух свободных переменных множества базисных, определяемых их значениями, не пересекаются. В противном случае, в силу того, что при обращении свободной переменной (смене

значения на противоположное) обращаются и все зависящие от нее базисные, можно было бы получить одновременно два разных значения одной и той же базисной переменной. Таким образом, суммы весов дуг, соответствующих переменным, зависящим от разных свободных, вычисляются независимо, а значит, выбирая для каждой свободной переменной значение, дающее максимальную сумму, можно получить максимальное по весу дуг семейство циклов. Если его вес превосходит q , то это семейство и будет решением задачи, в противном случае, решения не существует.

Покажем, что описанный алгоритм решения ОНСЦ требует числа операций, выражаемого полиномом конечной степени от n . Прямой ход метода Гаусса требует $O(n^2)$ операций (каждая строка объединенной матрицы системы содержит не более трех ненулевых элементов). Применение обратного хода при одной заданной свободной переменной и вычисление сумм потребует $O(m^2) + O(r)$ действий, где m – количество уравнений, в которые входит свободная переменная, а r – количество переменных, значения которых определились по выполнению обратного хода; поскольку $m \leq 2n, r \leq 2n$ и сложность оценивается сверху, можно выразить эти числа как $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$. Учитывая, что аналогичный набор операций производится для каждой свободной переменной и что $k \leq 2n$, имеем: вся процедура вычисления сумм требует $O(kn^2) = O(n^3)$ действий. Сравнение суммы дуг с числом q потребует $O(1)$ операций. Итого $O(n^2) + O(n^3) + O(1) = O(n^3)$ действий. Таким образом, задача является полиномиально разрешимой (принадлежит к классу P). \square

Пример 3. Рассмотрим орграф, заданный матрицей весов

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы сравнить результат полиномиального решения с истинным решением, найдем последнее поиском в глубину. Он дает следующие семейства простых циклов: $\{1 - 4 - 3 - 2 - 1\}$ с весом 10, $\{1 - 4 - 1, 2 - 3 - 2\}$ с весом -1 , $\{1 - 2 - 1, 3 - 4 - 3\}$ с весом 16 и $\{1 - 2 - 3 - 4 - 1\}$ с весом 5.

Теперь применим метод решения, описанный в доказательстве теоремы 3.

Составим систему уравнений, дающую решение задачи НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{aligned} e_{12} &\leftrightarrow x_1, e_{14} \leftrightarrow x_2, \\ e_{21} &\leftrightarrow x_3, e_{23} \leftrightarrow x_4, \\ e_{32} &\leftrightarrow x_5, e_{34} \leftrightarrow x_6, \\ e_{41} &\leftrightarrow x_7, e_{43} \leftrightarrow x_8. \end{aligned}$$

Система —

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 \oplus x_4 = 1; \\ x_5 \oplus x_6 = 1; x_7 \oplus x_8 = 1; \\ x_3 \oplus x_7 = 1; x_1 \oplus x_5 = 1; \\ x_4 \oplus x_8 = 1; x_2 \oplus x_6 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений и применим к ней прямой ход метода Гаусса.

Изначально:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Система вырождена, количество свободных переменных — две. Выберем в качестве свободных переменные x_5 и x_7 и найдем решение задачи ОНСЦ.

Пусть $x_5 = 1$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_6 = 0, x_2 = 1, x_1 = 0$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S_{x_5=1}^1 = w(e_{14}) + w(e_{32}) = -8$.

Пусть $x_5 = 0$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_6 = 1, x_2 = 0, x_1 = 1$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S_{x_5=0}^1 = w(e_{12}) + w(e_{34}) = -2$.

Максимальное в паре — -2 при $x_1 = 1, x_6 = 1$.

Пусть $x_7 = 1$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_8 = 0, x_4 = 1, x_3 = 0$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S_{x_7=1}^1 = w(e_{23}) + w(e_{41}) = 7$.

Пусть $x_7 = 0$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_8 = 1, x_4 = 0, x_3 = 1$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S_{x_7=0}^1 = w(e_{21}) + w(e_{43}) = 18$.

Максимальное в паре — 18 при $x_3 = 1, x_8 = 1$.

Решение состоит из дуг, соответствующих переменным x_1, x_3, x_6, x_8 . Это набор циклов $\{1 - 2 - 1, 3 - 4 - 3\}$ с весом $18 - 2 = 16$.

4. Случай решения задачи ОНСЦ за квадратичное время

Рассмотрим задачу ОНСЦ на более узком классе орграфов, которые будем задавать не матрицей весов, а списком смежности, и покажем, что в таком случае существует более эффективный алгоритм решения.

Определение 10. (Задача ОНСЦ-СПЕЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v(v \in V)(deg^{out}v = 2)(deg^{in}v = 2)$, и вещественное число q . Количество вершин является четным, а орграф задан списком смежности следующего вида: для каждой вершины существует лишь одна, за исключением ее самой, имеющая в точности такой же список смежности, и ни одна другая вершина, кроме этих двух, не смежна по исходящей дуге с теми же вершинами, с которыми смежны они. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил q .

Теорема 4. *Задача ОНСЦ-СПЕЦ может быть решена за время $O(n^2)$.*

Доказательство. Примем за элементарные операции (операции, выполняемые за время $O(1)$) просмотр элемента в списке смежности и сложение двух чисел. Пусть $|V| = n$, построим по списку смежности матрицу весов заданного орграфа. Поскольку, вследствие указанного в постановке задачи свойства этого списка, множество вершин орграфа может быть разбито на пары, в каждой из которых вершины смежны по исходящей дуге лишь с двумя другими, с которым не смежны никакие иные, то матрица будет иметь $\frac{n}{2}$ пар одинаковых строк, причем в строках из разных пар не будет ни одного ненулевого элемента на одной и той же позиции. Таким образом, если в заданной строке обнулить какой-либо ненулевой элемент, то кроме строки с единственным ненулевым элементом будет получен также столбец, содержащий только один ненулевой элемент, причем это будет тот же столбец, в котором находится ненулевой элемент другой строки из той же пары, что и заданная. Исходя из леммы 1

можно заключить, что семейство простых циклов, являющееся решением, должно задаваться матрицей смежности (матрицей весов), в каждой строке и каждом столбце которой есть лишь один ненулевой элемент. Как показано выше, обнуление элемента в заданной строке предопределяет обнуление элемента лишь в другой строке из той же пары, поскольку в ней появляется элемент, оставшийся единственным в своем столбце (то есть обнулен должен быть другой элемент, что сделает оставшийся единственным в своей строке, а первый обнуленный также единственным в своем столбце). То есть при поиске семейства, являющегося решением, мы можем независимо удалять дуги, исходящие из вершин разных пар; это означает, что выбрав в каждой паре строк два элемента из разных столбцов с наибольшей суммой, мы получим семейство циклов с наибольшим возможным весом. Если этот вес превосходит q , то полученное семейство есть решение задачи. Выбор элементов можно осуществлять и по упорядоченному списку смежности, где роль номера столбца будет играть позиция номера вершины в строке списка. Группировка строк по парам простой сортировкой потребует $O(n^2)$ операций, поиск максимальной суммы в каждой паре — $2\frac{n}{2}(O(1) + 2O(1) + O(1)) = O(n)$ операций. Итого $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$. \square

Теорема 5. *Орграф и задачи ОНСЦ-СПЕЦ всегда содержит семейство простых циклов, обходящее все его вершины.*

Доказательство. Поскольку любая пара строк в списке или матрице смежности орграфа описанного вида допускает процедуру обнуления, описанную в доказательстве теоремы 4 (для каждой пары она проводится независимо и для нее не потребовалось введения никаких дополнительных ограничений вида строк), то проведя ее для каждой пары строк можно получить матрицу смежности, у которой в каждой строке и каждом столбце есть лишь один ненулевой элемент, или список смежности, который можно в такую матрицу преобразовать. Из леммы 1 следует, что таким образом будет задано семейство циклов данного орграфа, обходящее все его вершины. \square

Пример 4. Рассмотрим орграф, заданный списком смежности (вес соответствующей дуги указан в фигурных скобках, список представлен в отсортированном виде):

$$\begin{aligned} 2 &: 1\{8\}, 4\{-1\}; \\ 5 &: 1\{2\}, 4\{10\}; \\ 4 &: 2\{1\}, 3\{-1\}; \\ 6 &: 2\{1\}, 3\{-2\}; \\ 1 &: 5\{2\}, 6\{2\}; \\ 3 &: 5\{6\}, 6\{-3\}. \end{aligned}$$

Имеем разбиение строк на пары: 2-ая и 5-ая, 4-ая и 6-ая, 1-ая и 3-ая. Для каждой найдем сочетание дуг с максимальной суммой весов:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & S_1^1 = w(2, 1) + w(5, 4) = 18, S_1^2 = w(2, 4) + w(5, 1) = 1. \\
 & \max S_1^j = S_1^1 = 18. \\
 2) \quad & S_2^1 = w(4, 2) + w(6, 3) = -1, S_2^2 = w(4, 3) + w(6, 2) = 0. \\
 & \max S_2^j = S_2^2 = 0. \\
 3) \quad & S_3^1 = w(1, 5) + w(3, 6) = -1, S_3^2 = w(1, 6) + w(3, 5) = 8. \\
 & \max S_3^j = S_3^2 = 8.
 \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное семейство циклов задается набором дуг $\{(2, 1), (5, 4), (4, 3), (6, 2), (1, 6), (3, 5)\}$. Оно состоит из двух циклов: $1 - 6 - 2 - 1$ и $3 - 5 - 4 - 3$; их общий вес равен 26.

Проверим решение, найдя максимальное семейство циклов поиском в глубину. Имеем следующие циклы: $1 - 5 - 1$ с весом 4; $1 - 5 - 4 - 2 - 1$ с весом 21; $1 - 5 - 4 - 3 - 6 - 2 - 1$ с весом 17; $1 - 6 - 2 - 1$ с весом 11; $1 - 6 - 2 - 4 - 3 - 5 - 1$ с весом 9; $1 - 6 - 3 - 5 - 4 - 2 - 1$ с весом 25; $1 - 6 - 3 - 5 - 1$ с весом 8; $2 - 4 - 2$ с весом 0; $2 - 4 - 3 - 6 - 2$ с весом -4; $3 - 5 - 4 - 3$ с весом 15; $3 - 6 - 3$ с весом -5.

Они образуют семейства (указан общий вес): $\{1-5-1, 2-4-2, 3-6-3\}$ с весом -1, $\{1-5-1, 2-4-3-6-2\}$ с весом 0, $\{1-5-4-2-1, 3-6-3\}$ с весом 16, $\{1-5-4-3-6-2-1\}$ с весом 17, $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$ с весом 26, $\{1-6-2-4-3-5-1\}$ с весом 9, $\{1-6-3-5-4-2-1\}$ с весом 25, $\{1-6-3-5-1, 2-4-2\}$ с весом 8.

Максимальным является семейство $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$ с весом 26, что совпадает с решением, полученным на основании теоремы 4.

5. Основные результаты

Рассмотрены поисковый (разрешимостный) и оптимизационный варианты задачи о поиске такого семейства непересекающихся простых циклов в орграфе с полустепенями вершин не более 2, которое покрывает все вершины этого орграфа. Показана принадлежность задачи в обоих вариантах к классу полиномиально разрешимых задач P, предложенный алгоритм для матрицы весов, находит решение как поисковой, так и оптимизационной задачи о максимизации веса семейства циклов за время $O(n^3)$; доказано, что в более частной постановке на орграфах, заданных списком смежности с весами и имеющими полустепени всех вершин, строго равные 2, существует асимптотически более эффективный алгоритм решения задачи в обоих вариантах, требующий $O(n^2)$ операций, где n — количество вершин орграфа. Поскольку решение оптимизационной задачи осуществляется фактически путем сокращенного перебора

по экспоненциальному пространству поиска, то можно сделать предположение о существовании полиномиального алгоритма для задачи о поиске гамильтонова цикла и задачи коммивояжера на рассматриваемом классе орграфов или на его подклассе со строгим ограничением полустепеней вершин, так как среди решений задач НСЦ и ОНСЦ могут быть гамильтоновы циклы.

Finding a family of simple circuits in a digraph with semidegree bound 2

Medvedev A.A.

The present paper investigates the algorithmic complexity of finding a family of simple circuits passing every vertice of a digraph with semidegree bound 2. The problem is considered in two variants: as a search and as an optimization problem. It proves to be polynomially solvable in both variants, subsequently an algorithm using time $O(n^3)$ and, for a particular formulation of the problem, an algorithm using time $O(n^2)$ are suggested where n is the number of the digraph's vertices.

Keywords: digraphs, simple circuits, search problems, optimization, P class, polynomial solvability.

References

- [1] Karp, R. M., "Reducibility Among Combinatorial Problems", *Complexity of Computer Computations. The IBM Research Symposia Series*, 1972, 85–103.
- [2] Akiyama, T.; Nishizeki, T.; Saito N., "NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs", *Journal of Information Processing*, **3:2** (1980–1981), 73–76.
- [3] Itai, A.; Papadimitriou, Ch.; Szwarcfiter, J., "Hamilton Paths in Grid Graphs", *SIAM Journal on Computing*, **4:11** (1982), 676–686.
- [4] Buro, M., "Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs", *Conference on Computers and Games, Lecture Notes in Computer Science.*, **2063:CG '00** (2000), 250–261.
- [5] Plesník, J., "The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two", *Information Processing Letters*, **8:4** (1979), 199–201.
- [6] Chiba, N.; Nishizeki, T., "The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs", *Journal of Algorithms*, **10:2** (1989), 187–211.

- [7] Goray, Ivan. I., “On polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem for graphs of degree less than or equal to 3”, *arXiv: Optimization and Control*, 2010, <https://arxiv.org/abs/1007.0235>.
- [8] Çela, E.; Deineko, V. G.; Woeginger G. J., “Travelling salesman paths on Demidenko matrices”, *Discrete Applied Mathematics*, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.11.019>.
- [9] Orponen, P.; Mannila, H., “On approximation preserving reductions: Complete problems and robust measures”, *Department of Computer Science, University of Helsinki. Technical Report. C-1987-28*, 1987.
- [10] Ore, O., “Note on Hamiltonian circuits”, *American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 55.
- [11] Dirac, G. A., “Some theorems on abstract graphs”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2:3** (1952), 69–81.
- [12] Ghouila-Houri, A., “Une condition suffisante d’existence d’un circuit Hamiltonien”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences Paris*, **251** (1960), 495–497.
- [13] Woodall, D., “Sufficient conditions for cycles in digraphs”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **24** (1972), 739–755.
- [14] Christofides, D.; Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., “A semi-exact degree condition for Hamilton cycles in digraphs”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **24:3** (2010), 709–756.
- [15] Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., “An exact minimum degree condition for Hamilton cycles in oriented graphs”, *Journal of the London Mathematical Society*, **79:1** (2009), 144–166.
- [16] Kelly, L.; Kühn, D.; Osthus, D., “A Dirac-type result on Hamilton cycles in oriented graphs”, *Combinatorics, Probability and Computing*, **17:5** (2008), 689–709.
- [17] Moore, C.; Mertens, S., *The Nature of Computation.*, Oxford University Press, Oxford, 2011, 366 pp.