О континуальных структурах классов конечных автоматов

С. В. Алешин[1]

Дается описание новых континуальных структур замкнутых классов автоматов.

Ключевые слова: континуальные структуры, замкнутые классы, автоматы.

Структуры замкнутых классов автоматных отображений привлекали внимание авторов с первых исследований по теории автоматов. Уже первые работы структурной теории автоматом, в частности, работы В. Б. Кудрявцева [1, 2], обнаружили континуальные семейства классов автоматов, связанные с решением задачи выразимости. Для функциональной системы автоматных отображений с операциями суперпозиции и обратной связи P им была доказана континуальность множества предполных (максимальных) классов. Его доказательство распространяется и на оператор замыкания относительно только операций суперпозиции. Однако, для этой функциональной системы сравнительно недавно Д. Н. Бабиным было доказано существование замкнутых классов, не содержащихся ни в каком предполном классе, что, конечно, создает принципиально новую ситуацию в проблематике функциональной полноты.

Другое континуальное семейство классов, предполных относительно суперпозиции и обратной связи, было обнаружено в работе [3]. Каждый из этих классов содержит множество K всех автоматных функций, в каждом состоянии у которых реализуются функции алгебры логики, существенно зависящие не более чем от одной переменной (в разных состояниях могут быть разные переменные).

Как известно, проблема полноты конечных систем автоматов из P алгоритмически неразрешима [4]. В отличие от этого, для систем функций из P, содержащих множество K, то есть имеющих вид KUS, где S — конечная система автоматов, существует алгоритм распознавания полноты таких систем [5].

Заметим также, что в P существует базис относительно операции суперпозиции [2], то есть неприводимая полная система автоматов, при

[1] *Алешин Станислав Владимирович* — доктор физ-мат наук, профессор, каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — Dr.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

этом все элементы базиса, кроме автомата с одним состоянием, в котором вычисляется функция Шеффера, это автоматы из множества K.

Все сказанное привлекает внимание к множеству K, которое, как выяснилось, само обладает рядом свойств, подобных выше перечисленным свойствам класса всех автоматных функций P. Нетрудно видеть, что множество K замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи, то есть является классом. Класс K является классом конечной глубины в P — достаточно добавить автомат без памяти, реализующий функцию Шеффера.

1. Класс K

Напомним стандартные определения. Через $[\Pi]$ обозначим замыкание множества Π относительно операций суперпозиции и обратной связи. Множество Π замкнуто, если $[\Pi] = \Pi$. Множество Π называется предполным классом в K, если

1) $\Pi \neq K$,

2) для любого автомата $f \notin \Pi$ имеет место $[\Pi \cup f] = K$.

Предполный класс, очевидно, замкнут.

Теорема 1. *В K имеется континуум предполных классов.*

Доказательство. Доказательство, в основном, использует конструкцию, предложенную В. Б. Кудрявцевым в работе [1], которую он применил для теоремы о континуальности множества предполных в P классов. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ — автоматная функция, а схема на рис. 1 вычисляет функцию $W(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ такую, что при подстановке последовательности γ на место входной переменной x_{n+1} эта схема вычисляет автоматную функцию f :

$$f(x_1, ..., x_n) = W(x_1, ..., x_n, \gamma),$$

а при подстановке любой последовательности $\beta \neq \gamma$ схема переключается в состояние, в котором вычисляется функция $\varphi(x) = x$. Заметим, что если о.-д. функция $f(x_1, ..., x_n)$, используемая в этой схеме, принадлежит K, то есть в каждом состоянии реализуется функция алгебры логики не более чем одной переменной, то и функция принадлежит K. Поэтому эта конструкция может быть использована для класса K.

Как обычно, наряду с употреблением термина ограниченно-детерминированная функция (о.-д. функция) мы используем название «а-функция (автоматная функция)».

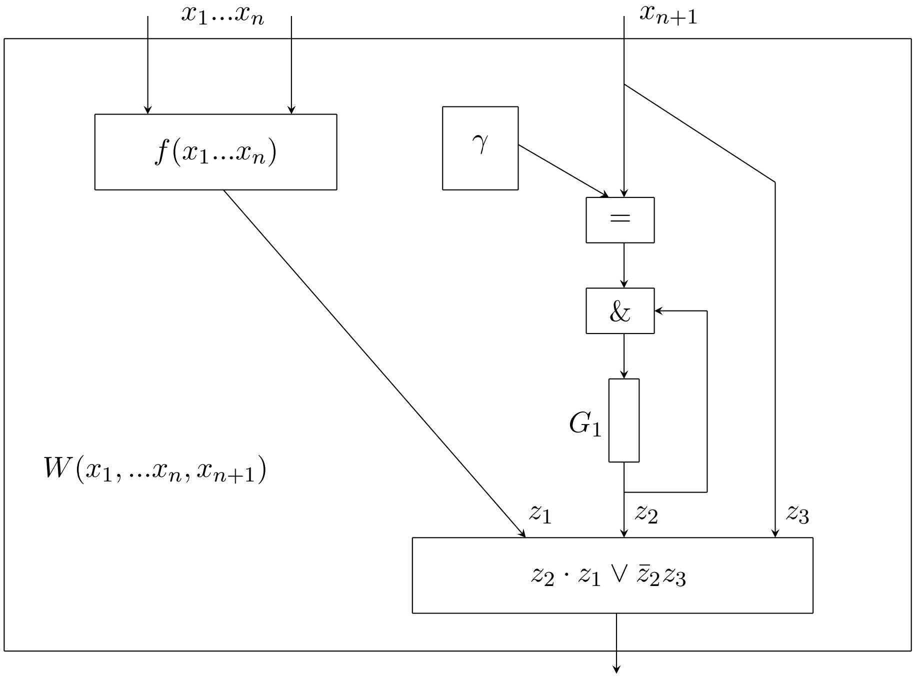

Рис. 1.

Пусть B — множество последовательностей из 0 и 1. Скажем, что а-функция $f(x_1, ..., x_n)$ сохраняет B, если для любого набора $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ последовательностей из B значение $f(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ принадлежит B.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_i \mid \gamma_i = \overbrace{0..0}^{i}1\overbrace{0..0}^{i}1\overbrace{0..0}^{i}1..., i = 1, 2, ...\}$. Для подмножества $\Gamma' \subseteq \Gamma$ через $]\Gamma'[$ обозначим множество последовательностей, отличающихся от последовательностей из Γ' в конечном числе разрядов. Очевидно, что если $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma, \Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то $]\Gamma_1[\neq]\Gamma_2[$.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется почти константной, если существует t_f и последовательность $\beta = \beta(1)\beta(2)...$, такие что для любого набора последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, если $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \gamma(1)\gamma(2)...$, то $\gamma(t) = \beta(t)$ при $t \geq t_f$.

Скажем, что а-функция $f(x_1, ..., x_n)$ имеет переменную x_i, обладающую F-свойством на множестве последовательностей $B =]\Gamma'[$, если при подстановке на место переменной x_i последовательности $\beta \in B$, $\beta = \beta_1\beta_2...$ наступает момент t_β, в который автомат переходит в состояние, которое в дальнейшем не меняется, и в котором реализуется выходная функция x_i.

Пусть $U(B)$, $B =]\Gamma'[$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ — множество а-функций, которое содержит

а) любую почти константную функцию, сохраняющую B,

б) любую функцию, которая имеет переменную, обладающую F-свойством на B.

Нетрудно видеть, что $U(B)$ замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи.

Обозначим через $R(\gamma, F)$ функцию от $n+1$ переменных, вычисляемую схемой рис. 1.

$$R(\gamma, F) = W(x_1, ..., x_n, x_{n+1}).$$

Заметим, что если последовательность γ не содержится в множестве B, то для любой функции $f(x_1, ..., x_n)$ имеет место $R(\gamma, F) \in U(B)$. Таким образом, если добавить к $U(B)$ константную функцию γ, то замыкание $[U(B) \cup \gamma] = K$, так как для любой функции f подставляя γ на вход $R(\gamma, F)$, получим f.

Если B_1, B_2 — разные подмножества Γ, то найдется γ такая, что $\gamma \in B_1$, $\gamma \notin B_2$, и , следовательно $\gamma \in U(B_1)$, $\gamma \notin U(B_2)$. Поэтому $[U(B_1) \cup U(B_2)] \supseteq [U(B_2) \cup \gamma [= K$, т.е. $U(B_1) \neq U(B_2)$.

Покажем, что расширяется до предполного в класса. Разобьем множество всех функций из K на две части. В первую войдут такие функции φ, что $[\varphi \cup U(B_2)] = K$. В частности, в эту группу попадет константная функция γ. Во вторую группу войдут все остальные функции, эту группу мы упорядочим, элементы группы занумеруем —

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s, ..., [\varphi_i \cup U(B_2)] \neq K.$$

Пусть $\mathfrak{N}_1 = [\varphi_1 \cup U(B_2)] \neq K$. Если для $i > 1$ $\varphi_i \in \mathfrak{N}_1$, то $\mathfrak{N}_1$ — предполный класс. В противном случае возьмем первый номер i_1 такой, что $\varphi_{i_s} \notin \mathfrak{N}_1$, и рассмотрим подпоследовательность Π_2 последовательности $\varphi_1, \varphi_2, ...$, в которую войдут все $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, ...$, такие что $\varphi_{i_s} \notin \mathfrak{N}_1$. Пусть $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \varphi_{i_1}]$, для него повторим процедуру, которую провели для $\mathfrak{N}_1$ — либо $\mathfrak{N}_2$ — предполный класс, либо рассмотрим $\mathfrak{N}_3$, и т.д.

Возможны два варианта

1) процесс заканчивается на некотором номере — мы построили предполный класс.

2) процесс бесконечен. Рассмотрим класс $\mathfrak{N} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i+1}$. Множество $\mathfrak{N}$ — это предполный класс. В самом деле а) $\mathfrak{N}$ — замкнутое множество.

б) $\mathfrak{N} \neq P$, поскольку $\gamma \notin \mathfrak{N}$.

в) если $f \notin \mathfrak{N}$, то f принадлежит первой части разбиения, следовательно $[f \cup U(B_2)] = K$.

Поскольку у множества Γ континуум подмножеств, теорема доказана.

□

Как и при рассмотрении класса всех автоматов, в случае класса K обнаруживается второе континуальное семейство предполных множеств.

Обозначим через L множество всех автоматов из K, у которых в состояниях реализуются функции из множества $\{0, 1, x_i, i \in N\}$. Можно заметить, что $K = [L \cup \bar{x}]$.

Теорема 2. *В классе K имеется континуум предполных классов, каждый из которых содержит L.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2 ...$ — последовательность всех простых чисел, $p_1 = 3$. Пусть R_1, R_2 — две последовательности из 0 и 1, $R_1 = \{r^{(1)}_{p_1}, r^{(1)}_{p_2}, ...\}$, $R_2 = \{r^{(2)}_{p_1}, r^{(2)}_{p_2}, ...\}$, $r^{(1)}_{p_1} = r^{(2)}_{p_1}, ..., r^{(1)}_{p_{m-1}} = r^{(2)}_{p_{m-1}}, r^{(1)}_{p_m} \neq r^{(2)}_{p_m}, r^{(1)}_{p_m} = 0, r^{(2)}_{p_m} = 1$.

Для каждого p_i, $i = 1, 2, ...$ рассмотрим две функции переменных x_1, x_2:

$$g^0_{p_i}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1,\ d = 0, 1, ... \\ \bar{x}_2(t), & t \text{ — остальные} \end{cases}$$

$$g^1_{p_i}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2,\ d = 0, 1, 2, ... \\ \bar{x}_2(t), & t \text{ — остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $g^0_{p_i}, g^1_{p_i}$ принадлежат классу K.

Обозначим через S_{R_1} класс функций

$$S_{R_1} = L \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g^{(r_i)}_{p_i}$$

и через S_{R_2} класс функций

$$S_{R_2} = L \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g^{(r_i)}_{p_i}.$$

Заметим, что $r^{(1)}_{p_m} \neq r^{(2)}_{p_m}, r^{(1)}_{p_m} = 0, r^{(2)}_{p_m} = 1$, и $g^{(0)}_{p_m} \in S_{R_1}, g^{(1)}_{p_m} \in S_{R_2}$, так что $S_{R_1} \neq S_{R_2}$ и при этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g^{(0)}_{p_m}(x_1, x_2), g^{(1)}_{p_m}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1(t), & t=d\cdot p_m+1\\ x_2(t), & t \text{ — остальные}\end{cases}$$

принадлежит L так как при всех (x_1,x_2) она принимает либо значение $x_1\in\{0,1,x\}$, либо $x_2\in\{0,1,x\}$.

Рассмотрим суперпозицию

$$h_{p_m}(g^1_{p_m}(x_1,x_2),g^0_{p_m}(x_1,x_2))=\begin{cases}g^{(1)}_{p_m}(x_1,x_2), & t=d\cdot p_m+1\\ g^0_{p_m}(x_1,x_2), & \text{ост. } t\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\bar{x}_2(t), & \text{т.к. } d\cdot p_m+1\neq d\cdot p_m+2\\ \bar{x}_2(t), & \text{т.к. } t\neq d\cdot p_m+1\end{cases}$$

Таким образом, $h_{p_m}(g^1_{p_m},g^0_{p_m})\equiv\bar{x}_2(t)$, следовательно

$$[S_{R_1}\cup S_{R_2}]\supseteq[L\cup\bar{x}]=K. \tag{1}$$

Кроме того, для любого R_i любая функция из S_{R_i} в некоторые моменты времени t реализует функцию $x(t)$: пусть взята суперпозиция функций $g^{r_{i_1}}_{p_{i_1}},g^{r_{i_2}}_{p_{i_2}},...,g^{r_{i_s}}_{p_{i_s}}$, тогда имеет место равенство $g^{r_{i_1}}_{p_{i_1}}=x_1(t)$ при $t=p_{i_2}\cdot p_{i_1}+1$, то есть $x_1(t)$ при $t=p_{i_2}\cdot p_{i_1}+1$, $g^{r_{i_2}}_{p_{i_2}}=x_1(t)$ при $t=d\cdot p_{i_2}+1$, $d=0,1,...$, то есть $t=p_{i_2}\cdot p_{i_1}+1$ при $t=p_{i_2}\cdot p_{i_1}+1$.

Аналогично для $i_1,i_2,i_3,...,i_s$ $g^{r_{i_k}}_{p_{i_k}}=x_1(t)$ при $t=p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot...\cdot p_{i_k}+1$.

Таким образом $[S_{R_i}]=K$.

Разных множеств S_{R_i} как и разных последовательностей из 0 и 1 — континуум. При этом S_{R_1},S_{R_2} расширяются до предполных классов Π_1,Π_2, соответственно, а из равенства (1) следует, что $\Pi_1\neq\Pi_2$, что и требовалось.

Класс K наследует и такое важное свойство класса P как наличие базиса относительно суперпозиции, то есть системы (очевидно, бесконечной), в которой нет собственной полной подсистемы.

□

Теорема 3. *В классе K существует неприводимая полная относительно суперпозиции система (базис).*

Доказательство. Рассмотрим систему автоматов $\Phi=\{\bar{x},0,\Gamma_1,\Gamma_2,...\}$. Представим эту систему в виде последовательности наборов $G_0=\{\bar{x},0\},G_1=\{\Gamma_1,...,\Gamma_{i_1}\},G_2=\{\Gamma_{i_1+1},...,\Gamma_{i_2}\},...,G_{s+1}=\{\Gamma_{i_s+1},...,\Gamma_{i_{s+1}}\},...$, то есть $\Phi=\{G_0,G_1,G_2,...\}$.

Набор G_i, $i=1,2,...$ состоит из всех автоматов с не более чем 2^i состояниями, $i=1,2,...$ и не более чем i входами, при этом в состояниях реализуются функции x_m, в разных состояниях разные переменные. Заметим, что отождествляя переменные и подставляя константы 0 и 1, или отрицание $\bar{x}$, можно получить все автоматы с $\leq 2^i$ состояниями из класса K. Таким образом, меняя $i = 1, 2, ...$, получим полную в K систему относительно суперпозиции.

Покажем, как, используя систему Φ, можно построить базис относительно суперпозиции в классе K.

Для каждого набора G_i, $i = 1, 2, ...$ возьмем набор схем $R(A, \gamma_i)$, $A \in G_1$ [рис. 1] , которые «управляются» единой для всех схем набора периодической последовательностью γ_i, такой что $\gamma_i \in Z_i$, но $\gamma_i \notin Z_{i-1}$. Заметим, что количество схем для каждого i конечно, и возникает система конечных наборов схем $\{R(A, \gamma_i)\}$.

Последовательно рассматривая наборы из системы $\{R(A, \gamma_i)\}$, будем исключать из этих наборов те автоматы, которые выразимы через остальные автоматы. Отметим два свойства этого процесса. В силу конечности каждого набора процесс сокращения этого набора конечен. Кроме того, в каждом наборе останется по крайней мере один элемент. В противном случае этот единственный элемент A группы с номером i будет выражаться через элементы других групп. Однако все автоматы из групп с номерами меньшими i сохраняют множество последовательностей Z_{i-1}. Также и автоматы из групп с номерами большими i. Это свойство сохраняется при суперпозиции, тем самым автомат A не может быть получен суперпозицией элементов других групп, поскольку он не сохраняет множество Z_{i-1}.

Таким образом система множеств Φ может быть сокращена до независимой системы, то есть до базиса.

$\square$

2. Класс L

Этот класс является подклассом конечной глубины класса K. Он содержит а-функции, в состояниях которых реализуются переменные или константы 0 и 1 (но не реализуются отрицания переменных). Нетрудно показать, что $K = [L \cup \bar{x}]$. Для класса L справедлив аналог теоремы Кудрявцева.

Теорема 4. *В классе L существует континуум предполных классов.*

Доказательство. Можно заметить, что у автомата построенного с помощью схемы из теоремы Кудрявцева, в состояниях реализуются функции из множества $\{0, 1, x_i\}$, что наглядно проверяется , если построить диаграмму переходов-выходов (рис. 2).

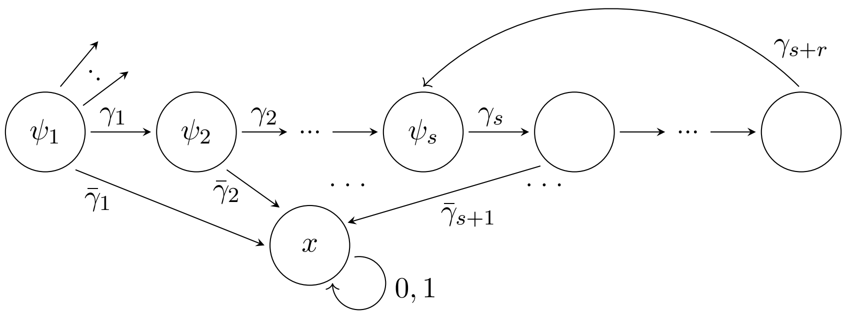

Рис. 2.

Дальше доказательство следует схеме доказательства теоремы Кудрявцева с рассмотрением континуального семейства подмножеств множества Г.

□

Через Q обозначим класс автоматов, в состояниях которых реализуются функции из множества $\{0, x_i\}$.

Теорема 5. *В классе L существует континуум предполных подклассов, каждый из которых содержит подкласс Q.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, p_3, ...$ — последовательность всех простых чисел, $p_1 = 3$. Пусть R_1, R_2 — две последовательности из нулей и единиц:

$$R_1 = \{r_{p_1}^{(1)}, r_{p_2}^{(1)}, r_{p_3}^{(1)}, ...\}; \quad R_2 = \{r_{p_1}^{(2)}, r_{p_2}^{(2)}, r_{p_3}^{(2)}, ...\},$$

$$r_{p_1}^{(1)} = r_{p_1}^{(2)};\ r_{p_2}^{(1)} = r_{p_2}^{(2)}; ...\ r_{p_{m-1}}^{(1)} = r_{p_{m-1}}^{(2)};\ r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)};\ r_{p_m}^{(1)} = 0;\ r_{p_m}^{(2)} = 1.$$

Для каждого p_i рассмотрим две функции переменных x_1, x_2:

$$g_{p_i}^{(0)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1,\ d = 0, 1, ... \\ 1, & t \text{ — остальные} \end{cases}$$

$$g_{p_i}^{(1)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2,\ d = 0, 1, ... \\ 1, & t \text{ — остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $g_{p_i}^{(0)}, g_{p_i}^{(1)}$ принадлежат классу L.

Обозначим через S_{R_1} множество функций

$$S_{R_1} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g_{p_i}^{(r_i)}$$

и через S_{R_2} множество функций

$$S_{R_2} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g_{p_i}^{(r_i)}.$$

Напомним, что $g_{p_m}^{(0)} \in S_{R_1}, g_{p_m}^{(1)} \in S_{R_2}$ и таким образом $S_{R_1} \neq S_{R_2}$.

При этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_m + 1,\ d = 1, 2, ... \\ x_2(t), & \text{ост. } t \end{cases}$$

принадлежит Q, так как при всех t она принимает либо значение $x_1(t)$, либо $x_2(t)$.

Рассмотрим суперпозицию

$$h_{p_m}(g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}) = \begin{cases} g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), & t = d \cdot p_m + 1 \\ g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2), & t - \text{ост.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \text{ [т.е. } \neq d \cdot p_m + 2] \\ 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \end{cases}$$

Таким образом, $h_{p_m}(g_{p_m}^1, g_{p_m}^0) \equiv 1$, следовательно

$$[S_{R_1} \cup S_{R_2}] \supseteq \{\{g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}\} \cup \{0, x\} \cup \{1\}\} = L.$$

Кроме того, для любого i любая функция из S_{R_i} в некоторые моменты времени t реализует функцию $x(t)$.

Пусть взята суперпозиция функций $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}}, g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}}, ..., g_{p_{i_s}}^{r_{i_s}}$.

Тогда имеет место равенство $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}} = x_1(t)$ при $t = d \cdot p_{i_2} + 1,\ d = 0, 1, ...$ То есть, в том числе при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$.

Также имеет место равенство $g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}} = x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$. То есть $x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$.

Аналогично для $i_1, i_2, ..., i_s$ $g_{p_{i_k}}^{r_{i_k}} = x_1(t)$, $k = 1, 2, ..., s$ при $t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{i_k} + 1$.

Поэтому $[S_{R_i}] \neq L$.

Разных множеств S_{R_i}, как и разных последовательностей из нулей и единиц — континуум. При этом S_{R_1}, S_{R_2} — расширяются до предполных классов Π_1, Π_2 соответственно, а из равенства $[S_{R_1} \cup S_{R_2}] = L$ следует, что $\Pi_1 \neq \Pi_2$, что и требовалось.

$\square$

Теорема 6. *В классе L существует базис относительно суперпозиции.*

Доказательство. Оно фактически повторяет доказательство теоремы о базисе в классе K. Теперь в качестве полной системы рассмотрим $\Phi = \{0, 1, \Gamma_1, \Gamma_2, ...\}, G_0 = \{0, 1\}, G_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{i_1}\}, G_2 = \{\Gamma_{i_1+1}, ..., \Gamma_{i_2}\}, ...$

Заметим, что автоматы $\Gamma_i, i \geq 1$ принадлежат классу L. Таким образом, можно провести построение базиса в L с помощью той же схемы рассуждений.

$\square$

Обозначим через M класс автоматов Мура, то есть таких, у которых в состояниях реализуются константы 0 и 1. Нетрудно видеть, что класс L целиком содержит класс M.

Теорема 7 (типа Ку)**.** *В классе M существует континуум предполных классов.*

Доказательство. Всякая константная функция, в том числе и константы из Γ, содержатся в M. Пусть $U(B), B =]\Gamma'[, \Gamma' \subseteq \Gamma$ — множество почти константных функций из M. Класс $U(B)$ замкнут. Рассмотрим схему Σ_f рис. 3.

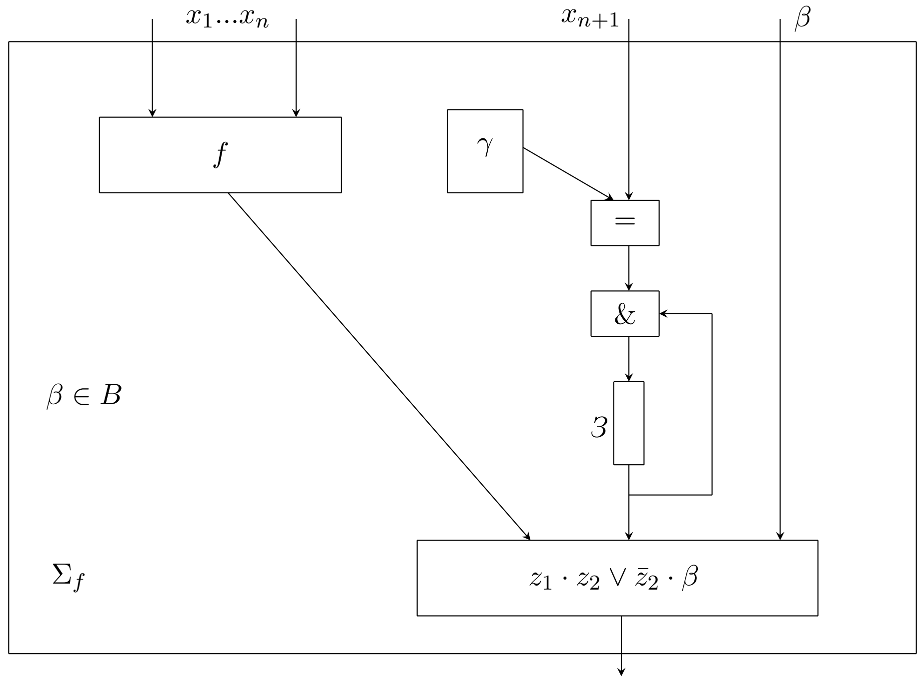

Рис. 3.

Диаграмма автомата, который реализуется схемой, частично приведена на рис. 4.

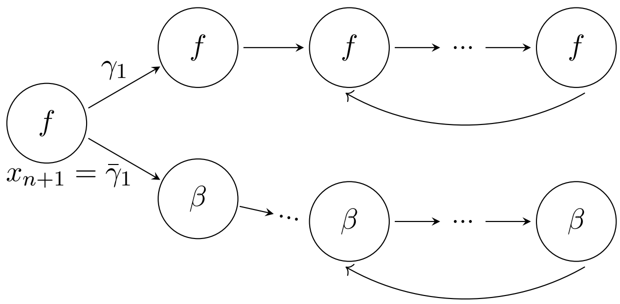

Рис. 4.

Если функция $f(x_1, ..., x_n) \in M$ реализуется автоматом Мура, то в каждом состоянии этого автомата, очевидно, реализуется некоторая константа, то есть автомат схемы Σ_f — это автомат Мура.

Таким образом, для последовательности γ и любого автомата Мура $f(x_1, ..., x_n)$ существует схема Σ_f, такая что $F_\Sigma = \Sigma_f(f, x_{n+1})$, и для последовательности γ выполнено $f = \Sigma_f(f, \gamma)$. Поэтому, если $f \in M$, то автомат Σ_f содержится в M, и следовательно для всякой функции $f \in M$ имеет место $f \in [\gamma, \Sigma_f]$. Следовательно $M \subseteq [\gamma \cup \Sigma_{f_i}]$. При этом все автоматы из $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$ сохраняют множество $\{\Gamma \backslash \gamma\}$, поэтому $[\{\Sigma_{f,\gamma}\} \neq M$.

Покажем, что $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$ расширяется до предполного в M класса. Пусть $\Pi_0 = \varphi_1, \varphi_2, ...$ — последовательность всех таких автоматов, что $[\varphi_i \cup U(B)] = M$. Эта последовательность не пуста, так как, например, можно взять $\varphi_i = \gamma$.

Пусть $\Pi_1 = \psi_1, \psi_2, ...$ — все функции, не принадлежащие последовательности Π_0.

Пусть $\mathfrak{N}_1 = [\psi_1 \cup U(B)]$. Если для всех $i > 1$ $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_i] = M$, то $\mathfrak{N}_1$ — предполный класс, и процесс окончен. В противном случае имеется подпоследовательность последовательности Π_1, которая начинается с i_1, что для i_1 выполнено $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_i] \neq M$.

Снова, пусть для $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \psi_{i_1}]$ имеет место $\mathfrak{N}_2 \neq M$, тогда $\mathfrak{N}_2$ — предполный класс, иначе ... и т.д.

Если процесс бесконечен, то рассмотрим класс $\hat{\mathfrak{N}} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$. Этот класс предполон — выполнены условия предполноты.

Заметим, что если $B_1 \neq B_2$, то они расширяются до разных предполных классов. В самом деле, пусть $\Pi_1 = \Pi_2$. Так как $\gamma \in B_1, \gamma \notin B_2$, то $[U(B_2) \cup \gamma] = M$, следовательно $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Таким образом, разным подмножествам B_i соответствуют разные предполные классы, отсюда мощность множества предполных классов равна континууму. Теорема доказана.

$\square$

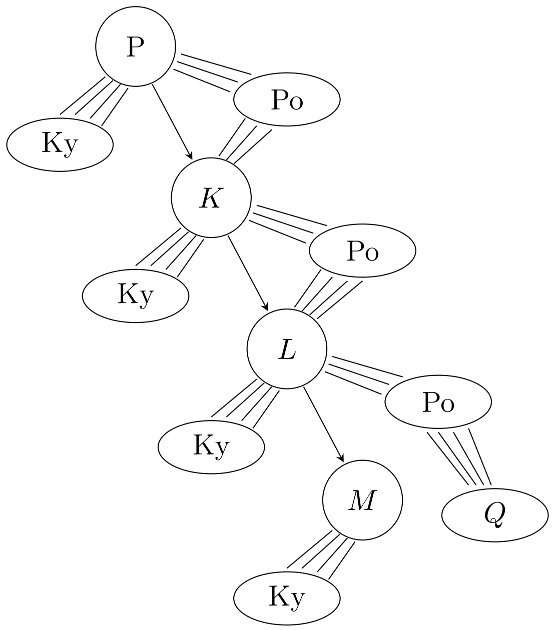

Рис. 5. Диаграмма классов.

Ку — континуум классов типа континуума Кудрявцева
Ро — континуум классов типа континуума Родина
K — класс функций $< 0, 1, x, x >$, L — класс функций $< 0, 1, x >$
M — класс автоматов Мура

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, "О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами", *Проблемы кибернетики*, **вып. 13**, М. Наука (1965), 45–74.

[2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Издательство МГУ, 2019.

[3] А. А. Родин, "О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений", *Интеллектуальные системы*, **16**:1–4 (2012), 329–334.

[4] М. И. Кратко, “Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов”, **155**:1, М. ДАН СССР (1964).

[5] С. В. Алешин, *Алгебраические системы автоматов*, стр. 108–116, М., МАКС ПРЕСС, 2016.

On continuum structures of finite automata classes

Aleshin S.V.

The description of new continuum structures of closed automata classes.

Keywords: continuum structures, closed classes, automata.

References

[1] V. B. Kudryavcev, “O moshchnosti mnozhestv predpolnykh mnozhestv nekotorykh funktsional'nykh sistem, svyazannykh s avtomatami [On the Cardinality of Sets of Precomplete Sets of Some Functional Systems Related to Automata]”, *Problemy kibernetiki*, **13** (1965), 45–74 (in Russian).

[2] V. B. Kudryavcev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov [Introduction to automata theory]*, MSU Press, 2019 (in Russian).

[3] A. A. Rodin, “O kontinual'nosti mnozhestva spetsial'nykh predpolnykh klassov vo mnozhestve avtomatnykh otobrazhenii [On the continuity of the set of special precomplete classes in the set of automatic mappings]”, *Intelligent systems*, **16**:1–4 (2012), 329–334 (in Russian).

[4] M. I. Kratko, “Algoritmicheskaya nerazreshimost' problemy raspoznavaniya polnoty dlya konechnykh avtomatov [Algorithmic undecidability of the completeness recognition problem for finite automata]”, **155**:1, Doklady Akademii Nauk USSR (1964) (in Russian).

[5] S. V. Aleshin, *Algebraicheskie sistemy avtomatov [Algebraic systems of automata]*, стр. 108–116, MaxPress, Moscow, 2016 (in Russian).