Об условиях полноты линейных автоматов над рациональными числами с добавками

Д. В. Ронжин[1]

Прпедставлены условия K-полноты и A-полноты автоматных систем с добавками в классе автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел.

Ключевые слова: конечные автоматы, линейные автоматы, рациональные числа, K-полнота, A-полнота.

1. Введение

Одной из классических задач теории автоматов является задача проверки полноты конечных автоматных систем по фиксированному набору операций – как правило, в качестве операций рассматриваются операции суперпозиции (Σ) и композиции (K)[1]. В силу того, что задача проверки полноты на множестве конечных автоматов оказывается алгоритмически неразрешимой[1], возникли различные подходы к дальнейшему исследованию задачи. Ряд исследований был направлен на изучение альтернативных операций замыкания[2] и на вопросы полноты автоматных систем с добавками[3], в то время как другое направление исследований посвящено рассмотрению проблемы проверки полноты в некоторых подклассах конечных автоматов. В частности подробно изучена задача полноты в классе линейных автоматов, функционирующих над произвольными конечными полями[4, 5], причем для всякого конечного поля представлена критериальная система для проверки A-полноты и K-полноты. Более того, в классе линейных автоматов задачи проверки A-полноты и K-полноты конечных систем оказываются алгоритмически разрешимыми.

Настоящая работа касается исследования вопросов полноты по операциям композиции и A-замыкания линейных автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел[6]. Ранее автором исследованы вопросы полноты в классе линейных автоматов, фукнционирующих над

[1] *Ронжин Дмитрий Владимирович* — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, преподаватель математики в ОАНО "Новая школа e-mail: d.v.ronzhin@gmail.com.

Ronzhin Dmitry Vladimirovich — graduated from Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, math teacher at non-profit organization "New School".

кольцом двоично-рациональных чисел[7, 8], где в терминах предполных классов получены условия полноты для автоматных систем с добавками. В классе автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел доказан ряд утверждений, касающихся задачи полноты, в частности доказано отсутствие конечных K-полных систем, а также наличие нетривиальных бесконечных Σ-полных систем.

2. Постановка задачи

Поле рациональных чисел обозначим через $\mathbb{Q}$.$\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы[1] с входным алфавитом $\mathbb{Q}^l$, выходным алфавитом $\mathbb{Q}$ и алфавитом состояний $\mathbb{Q}^k$, функции переходов и выходов являются линейными[4, 5]. Данное множество будем называть множеством линейных автоматом над полем рациональных чисел, и обозначим $L(\mathbb{Q})$[6].

Для описания функционирования линейных автоматов удобно использовать аппарат формальных степенных рядов. Определим множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}^{\infty}(\xi) = \left\{\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \mid a_i \in \mathbb{Q}\right\}$$

Степенным рядам ставятся в соответствие сверхслова на входах и выходе автоматов. Сложение и умножение элементов из $\mathbb{Q}^{\infty}(\xi)$ определелтся естественным образом.

Кольцо многочленов над $\mathbb{Q}$ будем обозначать $\mathbb{Q}[\xi]$, а для обозначения того, что многочлены $P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ взаимно просты будем использовать запись $\gcd\left(P\left(\xi\right), Q\left(\xi\right)\right) = 1$.

Определим множество дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}) = \left\{\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi], Q(0) = 1, \gcd\left(P(\xi),\ Q(\xi)\right) = 1\right\}$$

Для автоматов в классе $L(\mathbb{Q}$ верны следующие леммы о представлении[6]:

Лемма 1. $\forall V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}), \exists R_0, R_1, ..., R_l \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q})$*, такие что:*

$$V(x_1, ..., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i.$$

Лемма 2. $\forall V(x_1, ..., x_l) \colon (\mathbb{Q}^{\infty})^l \ \to \mathbb{Q}^{\infty}$*, такого что:*

$$V(x_1,...,x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i$$
$$R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}), i \in [0,l]$$

верно, что $V(x_1,...,x_l) \in L(\mathbb{Q})$.

Таким образом, линейные автоматы из $L(\mathbb{Q})$ реализуют отображения:

$$\forall V \in L(\mathbb{Q}), \exists l \in \mathbb{N},\ V(x_1,...,x_l) \colon (\mathbb{Q}^{\infty})^l \ \to \mathbb{Q}^{\infty}$$

Множители R_k будем называть коэффициентами отображения, причем через $R_k[\tau]$ будем обозначать коэффициенты при ξ^{τ} формальных степенных рядов R_k. Будем говорить, что автомат $V(x_1,...,x_l) \in L(\mathbb{Q})$ непосредственным образом зависит от x_i, $i \in [1,l]$, если R_i в приведенном виде не кратен ξ. Линейный автомат называется существенным, если он представляет собой отображение с не менее чем двумя непосредственными входами.

Система линейных автоматов $M \subset L(\mathbb{Q})$ будет называться A-полной[2], если $\forall V \in L(\mathbb{Q})$ и $\forall \tau \in \mathbb{N}$, в $K(M)$ существует автомат V', совпадающий с автоматом V на словах длины τ. A - замыкание системы M будем обозначать через $A(M)$.

3. Результаты

Пусть $V(x_1,x_2,...,x_n)$ – существенный линейный автомат из $L(\mathbb{Q})$. Справедливы следующие условия полноты систем автоматов в $L(\mathbb{Q})$ с добавками:

Теорема 1. *Пусть* $V'^{(1)}$ *– все линейные автоматы из* $L(\mathbb{Q})$ *арности не более 1. Тогда* $K(\{V(x_1,x_2,...,x_n)\} \cup V'^{(1)}) = L(\mathbb{Q})$.

Теорема 2. *Пусть* $V'^{(1,1)} = \{R_1 \cdot x, x + R_2 | R_1[0] = c_1, R_2[0] = c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}$*. Тогда* $A(\{V(x_1,x_2,...,x_n), \xi \cdot x\} \cup V'^{(1,1)}) = L(\mathbb{Q})$.

Автор выражает признательность своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту кафедры МаТИС Часовских Анатолию Александровичу за помощь в постановке и решении задачи.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.

[2] Буевич В.А., “О полноте, A-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1-4 (2006), 613–638

[3] Бабин Д.Н., Летуновский А.А., “О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:3 (2015), 15–22

[4] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 134–151

[5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104

[6] Ронжин Д.В., “Линейные автоматы над полем рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 144–155

[7] Ронжин Д.В., “Об условиях А-полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами”, *Дискретная математика*, **32**:2 (2020), 45–62

[8] Ронжин Д.В., “Распознавание А-полноты конечных систем линейных автоматов с добавками над кольцом двоично-рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:1 (2021), 149–163

Conditions of completeness for linear automata systems over the field of rational numbers with additives

Ronzhin Dmitry Vladimirovich

Conditions for K-completeness and A-completeness for linear automata systems, functioning over the field of rational numbers are described.

Keywords: finite state automata, linear automata, rationals, K-completeness, A-completeness.

References

[1] Kudryavcev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985, 320 с.

[2] Buyevich V.A., “About completeness, A-completeness and t-completness in the class of automata mappings.”, *Intellectual systems.*, **10**:1-4 (2006), 613–638

[3] Babin D.N., Letunovskiy A.A., “About superposition potential, with having boolean functions and delay element as an addition to basis.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **19**:3 (2015), 15–22

[4] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics*, **27**:2 (2015), 134–151

[5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions.”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104

[6] Ronzhin D.V., “Linear automata over the field of rational numbers.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **21**:4 (2017), 144–155

[7] Ronzhin D.V., “About A-completeness conditions for the automata over dyadic rationals.”, *Discrete Mathematics*, **32**:2 (2020), 45–62

[8] Ronzhin D.V., “A-completeness recognition for finite systems with additives of linear automata over the ring of dyadic rationals.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **25**:1 (2021), 149–163