Семантика Крипке объединённой логики задач и высказываний

А. А. Оноприенко[1]

Рассматривается объединённая логика задач и высказываний QHC, введённая С. А. Мелиховым. Доказана теорема о полноте данной логики относительно моделей Крипке, получающихся обогащением моделей Крипке с отмеченными мирами для её пропозиционального фрагмента HC. Кроме того, показано, что логика QHC является консервативным расширением предикатного варианта интуиционистской эпистемической логики IEL^{+}, предложенной С. А. Артёмовым и Т. Протопопеску.

Ключевые слова: неклассические логики, модальная логика, семантика Крипке

А. Н. Колмогоров рассматривал интерпретацию интуиционистской логики высказываний как логики задач [1]. А. Н. Колмогоров критически исследовал интуиционистскую логику и указывал, что её объекты — это, по существу, задачи, а не теоретические высказывания. Поэтому интуиционистская логика должна быть заменена исчислением задач. По замыслу А. Н. Колмогорова работа [1] должна была стать предпосылкой к созданию «единого логического аппарата», работающего одновременно с объектами двух типов: задачами и высказываниями. Такое исчисление содержало бы в себе интуиционистскую логику как логику решения задач и вместе с тем не запрещало «грязные теоремы существования», без которых математика часто не может обойтись.

С. А. Мелихов в [2], [3] ввёл в рассмотрение объединённую логику задач и высказываний QHC, содержащую переменные двух сортов — сорта высказывание и сорта задача. Формулы логики QHC строятся из переменных с помощью стандартных классических и интуиционистских связок и кванторов $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$ (не меняющих сорт формул), а также модальностей ! и ?. Формулы сорта высказывание подчиняются аксиомам и правилам вывода классической логики предикатов, а формулы сорта задача — аксиомам и правилам вывода интуиционистской логики

[1] *Оноприенко Анастасия Александровна* — аспирантка каф. математической логики и теории алгоритмов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ansidiana@yandex.ru. Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

Onoprienko Anastasia Alexandrovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms. This research has been supported by the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University «Brain, Cognitive Systems, Artificial Intelligence»

предикатов. Модальности меняют сорт формул: если p — формула сорта высказывание, то $!p$ — задача «найди доказательство p». Если α — формула сорта задача, то $?\alpha$ — высказывание «задача α имеет решение». Эти модальности связаны между собой следующими аксиомами и правилами вывода [2]:

1. $!(p \to q) \to (!p \to !q)$;
2. $?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$;
3. $\dfrac{p}{!p}$;
4. $\dfrac{\alpha}{?\alpha}$;
5. $?!p \to p$;
6. $\alpha \to !?\alpha$;
7. $\neg !0$.

С.А. Мелихов рассмотрел несколько типов моделей логики QHC (топологические модели, модели на основе понятия пучка), но даже для пропозиционального фрагмента HC этой логики не было известно полной семантики [3]. Автором в [4] рассмотрены следующие типы моделей логики HC: алгебраическая семантика, модели Крипке с двумя независимыми множествами миров, а также модели Крипке с отмеченными мирами. Доказано, что логика HC полна относительно конечных моделей каждого из этих типов.

В [5] были введены следующие шкалы Крипке с отмеченными мирами и рассмотрены в качестве моделей эпистемической логики IEL^{+}.

Определение 1. *Тройка* $(W, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ *называется шкалой Крипке с отмеченными мирами, если* $(W, \preccurlyeq)$ *— стандартная модель Крипке интуиционистской логики высказываний (*W *— непустое множество,* $\preccurlyeq$ *— частичный порядок),* $\mathrm{Aud} \subseteq W$ *— множество отмеченных миров и выполнено следующее свойство*

$$\forall a \in W \ \exists b \in W (a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud}).$$

Определим истинность интуиционистских переменных и интуиционистских связок как в стандартных моделях Крипке, истинность классических переменных — в мирах множества Aud, а истинность классических связок естественным образом. Наконец, определив оценки для формул, получаемых при помощи модальностей,

$$a \models ?\alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \text{ (для } a \in \mathrm{Aud})$$
$$a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \text{ (для } a \in W),$$

получим модель Крипке логики HC. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Логика HC полна относительно моделей Крипке с отмеченными мирами. Кроме того, выполнено свойство конечных моделей.*

Описанные модели можно обогатить до моделей предикатного варианта логики HC — логики QHC — следующим образом: к каждому миру $a \in W$ приписывается некоторое непустое множество D_a, которое можно воспринимать как совокупность объектов, построенных к этому моменту [6]. Подобная техника была использована в [7] для построения семантики интуиционистской логики предикатов. Предполагается, что если $a \preccurlyeq b$, то $D_a \subseteq D_b$, кроме того, если $a \models A(x_1, \ldots, x_n)$, то $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq D_a$, и если $A(x_1, \ldots, x_n)$ — атом сорта задача и $a \preccurlyeq b$, то $b \models A(x_1, \ldots, x_n)$ (то есть для атомов сорта задача выполнена монотонность). Индуктивный переход в определении отношения истинности для классических и интуиционистских кванторов следующий.
Классические кванторы ($a \in \mathrm{Aud}$):

$$a \models \exists x\ p(x) \Leftrightarrow (\exists v \in D_a) a \models p(v);$$
$$a \models \forall x\ p(x) \Leftrightarrow (\forall v \in D_a) a \models p(v).$$

Интуиционистские кванторы ($a \in W$):

$$a \models \exists x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \exists v \in D_a\ a \models \alpha(v);$$
$$a \models \forall x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \forall b \succcurlyeq a\ \forall v \in D_b\ b \models \alpha(v).$$

Для данной семантики получены следующие результаты [6].

Теорема 2. *Для любой непротиворечивой теории* Γ *логики* QHC *существует модель Крипке* $\mathcal{K}$ *и её отмеченный мир* x *такие, что в этом мире данной модели* $\mathcal{K}$ *истинны все формулы из* Γ.

Теорема 3. *Логика* QHC *является консервативным расширением предикатного варианта логики* IEL^+, *если понимать модальность* ∇ *логики* IEL^+ *как производную модальность* !? *логики* QHC.

Теорема 4. *Для интуиционистского фрагмента логики* QHC *имеют место дизъюнктивное и экзистенциальное свойство.*

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985.

[2] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax”, 2013/17 arXiv:1312.2575.

[3] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics”, 2015/18 arXiv:1504.03379.

[4] А. А. Оноприенко, “Семантика типа Крипке для пропозициональной логки задач и высказываний”, *Математический сборник*, **211**:5 (2020), 98-125.

[5] S. Artemov, T. Protopopescu, “Intuitionistic Epistemic Logic”, 2014/16 arXiv:1406.1582v2.

[6] А. А. Оноприенко, “Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний”, *(подана в журнал).*

[7] В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян, *Интуиционистская логика*, Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, М., 2009.

Kripke type semantics for the joint logic of problems and propositions

Onoprienko A.A.

We consider the joint logic of problems and propositions QHC suggested by S. A. Melikhov. We prove that this logic is complete with respect to Kripke models obtained by enrichment of Kripke models with audit set for a propositional part HC of this logic. We also show that this logic conservatively extends the predicate version of intuitionistic epistemic logic IEL^{+} constructed by S. Artemov and T. Protopopesku.

Keywords: non-classical logics, modal logic, Kripke semantic

References

[1] Tikhomirov V. M. (ed.), *Selected Works of A. N. Kolmogorov: Volume I: Mathematics and Mechanics (Vol. 25)*, Springer Science & Business Media, 1991.

[2] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax”, 2013/17 arXiv:1312.2575.

[3] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics”, 2015/18 arXiv:1504.03379.

[4] A. A. Onoprienko, “Kripke semantics for the logic of problems and propositions”, *Sbornik: Mathematics*, **211**:5 (2020), 709–732.

[5] S. Artemov, T. Protopopescu, “Intuitionistic Epistemic Logic”, 2014/16 arXiv:1406.1582v2.

[6] A. A. Onoprienko, “Predicate version for the joint logic of problems and propositions”, *(submitted in journal)* (In Russian).

[7] V. E. Plisko, V. H. Hahanyan, *Intuitionistic logic*, publishing house at the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, M., 2009 (In Russian).