Интерполяционно упорядоченные алгебраические системы

А. В. Михалев[1], Е. Е. Ширшова[2]

Рассматриваются частично упорядоченные алгебраические системы: линейные пространства над частично упорядоченными телами, псевдоупорядоченные кольца и алгебры над частично упорядоченными полями.

Такое упорядочение колец и алгебр аналогично частичному упорядочению алгебр Ли, определенному ранее. Частичный порядок аддитивной группы кольца (алгебры) индуцирует данный порядок на неассоциативных кольцах (алгебрах) (кольцах (алгебрах) Ли, йордановых кольцах, например).

Доказываются вторая и третья теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных упорядоченных систем.

Ключевые слова: частично упорядоченные линейные пространства, кольца и алгебры, интерполяционная группа, порядковые гомоморфизмы.

1. Введение

Пусть $R =< R, +, \cdot >$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное). Если $< R, +, \leq >$ является частично упорядоченной группой, то кольцо R принято называть *частично упорядоченным кольцом*, если выполняется условие: из $a \leq b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $a, b, c \in R$.

(1) Если $< R, +, \leq >$ является частично упорядоченной группой, то кольцо R называется *частично псевдоупорядоченным кольцом* (см. [1]), если выполняется условие: если $0 \leq a$ в $< R, +, \leq >$, то $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для любого $b \in R$.

(2) Левое линейное пространство ${}_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ над частично упорядоченным телом F называется *частично упорядоченным*

[1] *Михалев Александр Васильевич* — заведующий кафедрой, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, e-mail: aamikhalev@mail.ru

Mikhalev Aleksander Vasil'evich — M. is the chairmen of the department, professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics

[2] *Ширшова Елена Евгеньевна* — профессор кафедры алгебры, доцент, Московский педагогический государственный университет, институт математики и информатики, e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Shirshova Elena Evgen'evna — professor for the chair of algebra, associate professor, Moscow Pedagogical State University, Institute of Mathematics and Informatics.

линейным пространством (см. [2]), если $< V, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из $0 \leqslant v$ следует $0 \leqslant \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела F.

(3) Алгебра $A =< A, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \cdot, \leq >$ над частично упорядоченным полем F называется *частично псевдоупорядоченной алгеброй* (см. [3]), если выполняются условия: 1) $< A, +, \{\alpha| \ \alpha \in F\}, \leq >$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F; 2) $< A, +, \cdot, \leq >$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Данное упорядочение алгебр согласуется с определением частично упорядоченной алгебры Ли, принадлежащим В.М. Копытову (см. [4]).

Речь пойдет о влиянии интерполяционной упорядоченности на структурную теорию перечисленных алгебраических систем.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть алгебраическая система A удовлетворяет одному из определений (1) – (3).

Обозначим символом A^+ множество всех положительных элементов системы A.

Отображение f частично упорядоченной системы A в частично упорядоченную систему B называется *о-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом)*, если выполняются условия:

1) f является гомоморфизмом соответствующих алгебраических систем;

2) $f(A^+) \subseteq B^+$.

При этом, f называется *строгим о-гомоморфизмом*, если выполняется условие

4) $f(A^+) = B^+ \cap f(A)$.

Если для o-гомоморфизма f существует o-гомоморфизм f^{-1}, то f называется *о-изоморфизмом.*

Отметим, что *если f – о-гомоморфизм алгебраических систем, являющийся изоморфизмом этих систем, то он не обязан быть о-изоморфизмом.*

Например, пусть ${}_{\mathbb{R}}V =< \mathbb{R}^2, +, \{a| \ a \in \mathbb{R}\} >$ над $\mathbb{R}$. Рассмотрим частично упорядоченное пространство $V_1 = {}_{\mathbb{R}}V$, где $(a, b) \in V_1{}^+$, если $a = b = 0$ или $a > 0$ и $b \geq 0$, и частично упорядоченное пространство $V_2 = {}_{\mathbb{R}}V$, где $(a, b) \in V_2{}^+$, если $a = b = 0$ или $a > 0$ и $b > 0$. Тождественное отображение $f : V_2 \to V_1$ является изоморфизмом и o-гомоморфизмом. С другой стороны, пара $(2, 0) \in V_1{}^+$, но $(2, 0)f^{-1} \parallel (0, 0)$ в пространстве V_2.

Теорема 1. *Если $f : A \to B$ – строгий о-гомоморфизм частично упорядоченных алгебраических систем, то существует о-изоморфизм $\varphi : A/\ker f \to f(A)$, где $\varphi(r + \ker f) = f(r)$ для всех $r \in A$.*

Идеал (подпространство) I частично упорядоченной системы A называется *выпуклым (направленным)*, если абелева группа $< I, +, \leq >$ является выпуклой (направленной) подгруппой (см. [4]) группы $< A, +, \leq >$.

Заметим, что для произвольных частично упорядоченных систем справедливы не все аналоги теорем об изоморфизмах для соответствующих систем.

Например, пусть A – ассоциативная алгебра строго верхнетреугольных матриц над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$.

Будем обозначать матрицу $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c)$.

Рассмотрим в частично псевдоупорядоченной алгебре $B = A$ над полем $\mathbb{R}$, где $(a, b, c) \in B^+$, если $0 \leq a, 0 < b$, или $a = b = 0$ и $0 \leq c$, выпуклые идеалы

$$I = \{(a, 0, c)\}, \qquad J = \{0, b, c)\}, \qquad K = I \cap J.$$

При этом, факторалгебра I/K над полем $\mathbb{R}$ упорядочена тривиально, а B/J – линейно псевдоупорядоченная алгебра над полем $\mathbb{R}$.

Учитывая вышесказанное, для доказательства некоторых следствий из теоремы 1 (второй и третьей теорем об o-изоморфизмах) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично упорядоченных систем.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой* (см. [5]), если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает класс решеточно упорядоченных групп, сохраняя многие важные свойства этих групп.

Если абелева группа $< A, +, \leq >$ частично упорядоченной системы A является интерполяционной группой, то A называется *интерполяционной упорядоченной системой.*

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть A – интерполяционная упорядоченная система, I и J – выпуклые направленные идеалы в системе A, $I \subset J$. Тогда существует о-изоморфизм интерполяционной упорядоченной системы A/J на интерполяционную упорядоченную систему $A/I/J/I$.*

Теорема 3. *Пусть A – интерполяционная упорядоченная система, I и J – выпуклые направленные идеалы в кольце A. Тогда:*

1) существует строгий о-гомоморфизм интерполяционной упорядоченной системы $I(J)$ на интерполяционную упорядоченную систему $I+J/J(I+J/I)$ с ядром $I\cap J$;

2) интерполяционная упорядоченная система $I/I\cap J(J/I\cap J)$ о-изоморфна интерполяционной упорядоченной системе $I+J/J(I+J/I)$.

Список литературы

[1] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**:4 (2019), 147–166.

[2] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Проективная геометрия над частично упорядоченными телами,II”, *Чебышевский сборник*, **22**:1 (2021), 213–224.

[3] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23**:3 (2020), 213–230.

[4] Копытов В.М., *Решеточно упорядоченные группы*, «Наука», Москва, 1984, 320 с.

[5] Ширшова Е.Е., “О выпуклых направленных подгруппах псевдо решеточно упорядоченных групп”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**:4 (2019), 239–252

Interpolation ordered algebraic systems

Mikhalev A.V., Shirshova E.E.

Partially ordered algebraic systems such as linear spaces over partially ordered skew fields, pseudo-ordered rings and algebras over partially ordered fields are considered.

This order of a ring (an algebra) is similar to a partial order of a Lie algebra, which was introduced by Kopytov. Those orders are induced onto nonassociative rings (algebras) (Lie rings, Jordan rings, for example) by partial orders of their additive groups.

Second and third theorems of order isomorphisms for interpolation ordered systems are proved.

Keywords: partially ordered linear spaces, rings and algebras, interpolation groups, order homomorphisms.

References

[1] Mikhalev A.V., Shirshova E.E., “Prime radicals of directed pseudo-ordered rings”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **22**:4 (2019), 147–166

[2] Mikhalev A.V., Shirshova E.E.,“The projective geometry over partially ordered skew fields,II”, *Chebyshevskii sbornik*, **22**:1 (2021), 213–224

[3] Mikhalev A.V., Shirshova E.E., “Prime radicalsof directed pseudo-ordered algebras over directed fields”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **23**:3 (2020), 213–230

[4] Kopytov V.M., *Lattice-ordered groups*, «Nauka», Moscow, 1984, 320 c.

[5] Shirshova E.E., "On convex directed subgroups of pseudo lattice-ordered groups", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **22**:4 (2019), 239–252