Программная реализация алгоритмов работы с примитивными элементами в свободных неассоциативных алгебрах

М. В. Майсурадзе[1]

Реализованы алгоритмы работы с примитивными элементами в свободных неассоциативных алгебрах в системе компьютерной алгебры SageMath. В ряде случаев подсчитано количество примитивных элементов в свободных неассоциативных алгебрах над конечными полями.

Ключевые слова: свободная неассоциативная алгебра, примитивный элемент, компьютерная алгебра.

1. Примитивные элементы в свободных неассоциативных алгебрах

В своей работе я рассматриваю свободные неассоциативные алгебры над конечными полями. Такие алгебры относятся к шраерову многообразию алгебр. Что означает, что любая подалгебра таких алгебр является свободной [6].

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры A шраерова многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры A, содержащее подмножество M. Сами элементы такой системы называются примитивными элементами.

Критерий примитивности системы и отдельного элемента сформулирован в [2], [3, 12.5.1 Primitive elements in free non-associative algebras] в виде теоремы: *Система $a_1, a_2, \ldots, a_r$ элементов свободной неассоциативной алгебры A примитивна тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. В частности, элемент $a \in A$ является примитивным тогда и только тогда, когда $\exists m_1, \ldots, m_n \in U(A)$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$.*

Здесь F – поле, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество свободных образующих, $W_0 = \Gamma(X)$ – свободный группоид неассоциативных мономов без единичного элемента с алфавитом X. $A = F(X)$ – линейное пространство над полем F с базисом, состоящим из 1 и элементов $\Gamma(X)$ с

---

[1] *Майсурадзе Михаил Владимирович* — аспирант каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ.

Maisuradze Mikhail Vladimirovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

правилом умножения: $(\alpha a)\cdot(\beta b) = (\alpha\beta)(a\cdot b)$, $\forall\alpha,\beta \in F$, $a, b \in \Gamma(X)$. $U(A)$ – свободная ассоциативная алгебра с множеством $S_0 = \{r_w, l_w | w \in W_0\}$ свободных образующих.

Дифференцирование определяется, как $\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)r_b + \mathcal{D}(b)l_a$, а частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$ – как элемент из $U(A)$ – коэффициентов при $\mathcal{D}(x_i)$ в производной элемента из A.

2. Алгоритм проверки примитивности элемента

Техника свободного дифференциального исчисления позволяет реализовать алгоритм определения примитивности элемента, заключающийся в последовательной редукции частных производных элемента до получения ненулевого элемента поля.

1. дифференцировать элемент и найти все частные производные;

2. обозначив частные производные u_i и выписав множество $M = \{u_i\}$, и обозначив старшие члены u_i как u_i^0 произвести последовательные редукции до получения $u_k = a \in F$, $a \neq 0$ либо до момента, когда дальнейшие редукции невозможны:

2.1. если старший член $u_k^0 = \alpha\omega u_l^0$, где $\alpha \in F$, ω – ассоциативный моном из $U(A)$, то считаем $u_k := u_k - \alpha\omega u_l$;

2.2. иначе – дальнейшие редукции невозможны, элемент не является примитивным.

3. Алгоритм поиска и подсчёта примитивных элементов заданной длины

Для выявления всех примитивных элементов определённой длины был разработан алгоритм:

1. записать элемент общего вида необходимой длины с неизвестными коэффициентами;

2. дифференцировать элемент и найти все его частные производные;

3. выписать все получившиеся в $U(A)$ мономы;

4. составить элементы в $U(A)$ содержащие все выписанные мономы с неизвестными коэффициентами;

5. составить уравнение, умножив эти элементы на найденные частные производные и приравняв 1;

6. полученное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все коэффициенты при мономах $U(A)$ кроме 1 равны 0, а свободный член равен 1, что приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений в F относительно неизвестных, введённых на шаге 4;

7. для совместности полученной системы уравнений применим критерий совместности системы – теорему Кронекера-Капелли: *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы равен рангу её расширенной матрицы.*

8. столбец свободных членов полученной системы уравнений содержит единственный ненулевой элемент, тогда получаем необходимые условия совместности системы:

8.1. все максимальные миноры матрицы системы, кроме строки, содержащей ненулевой свободный член, должны быть равны нулю;

8.2. должен существовать минор, содержащий строку с ненулевым свободным членом, отличный от нуля, порядка большего, чем все остальные миноры.

Над конечными полями, алгоритм также позволяет произвести оценку общего количества примитивных элементов. С помощью этого алгоритма была произведена оценка количества примитивных элементов произвольной длины в свободных неассоциативных алгебрах с двумя образующими над конечным полем. Отметим, что в работе [5] подсчитано число примитивных элементов длины 1, 2 и 3 в свободных неассоциативных алгебрах с двумя образующими над конечным полем.

4. Реализация алгоритмов

Применение описанных алгоритмов связано с высокой вычислительной сложностью, что приводит нас к необходимости выбора пакета компьютерной алгебры, позволяющего их реализовать. Современные пакеты компьютерной алгебры реализуют множество популярных математических структур, однако в их число входит далеко не всё необходимое для исследований узкоспециализированных алгебраических структур. В ходе анализа предоставляемых возможностей, наиболее удобным был признан SageMath.

Ключевые преимущества, повлиявшие на выбор SageMath:

1. наличие функциональности абстрактных категорий, позволяющей определять новые алгебраические структуры, реализуя только их ключевые особенности;

2. язык программирования Python, снижающий затраты на реализацию;

3. гибкая модель расширений;

4. поддержка “из коробки” более простых алгебраических структур – полей, колец, матриц, СЛАУ и др.;

5. поддержка стандартных алгоритмов линейной алгебры.

Несмотря на все преимущества SageMath, пришлось столкнуться с достаточно большим количеством необходимых для реализации структур.

Неассоциативные структуры:

1. свободный неассоциативный группоид;
2. элемент неассоциативного группоид (моном);
3. свободная неассоцитивная алгебра;
4. элемент свободной неассоциативной алгебры.

Ассоциативные структуры универсальной обёртывающей алгебры:

1. свободный ассоциативный обёртывающий моноид с множеством свободных образующих – операторов левого и правого умножения на мономы свободного неассоциативного группоида;
2. элемент свободного ассоциативного обёртывающего моноида;
3. свободная ассоциативная обёртывающая алгебра;
4. элемент свободной ассоциативной обёртывающей алгебры.

Только после имплементации всех необходимых структур появилась возможность приступить собственно к реализации используемых в моих исследованиях алгоритмов. В рамках описанного выше подхода были реализованы методы дифференциальной алгебры:

1. дифференцирование свободных неассоциативных элементов;
2. тест примитивности свободных неассоциативных элементов.

5. Пример использования

```
> from FNAAlgebra import *
> F.<x,y,z> = FNAAlgebra(QQ, 3)
> h = 5/3*y*x+6/7*y*((y*y)*z)+50/21*(z*x)*x+60/49*(z*x)*((y*y)*z)
+60/49*(z*((y*y)*z)*x)+216/343*(z*((y*y)*z))*((y*y)*z)+6/7*z
```

$$\frac{6}{7}z + \frac{5}{3}yx + \frac{50}{21}(zx)x + \frac{6}{7}y((yy)z) + \frac{60}{49}(z((yy)z))x + \frac{60}{49}(zx)((yy)z) + \frac{216}{343}(z((yy)z))((yy)z)$$

```
> h.derivate()
```

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{5}{3}l_y + \frac{60}{49}l_{z((yy)z)} + \frac{50}{21}l_{zx} + \frac{60}{49}r_{(yy)z}l_z + \frac{50}{21}r_xl_z$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{6}{7}r_{(yy)z} + \frac{5}{3}r_x + \frac{6}{7}l_yr_zl_y + \frac{6}{7}l_yr_zr_y + \frac{216}{343}l_{z((yy)z)}r_zl_y + \frac{216}{343}l_{z((yy)z)}r_zr_y + \frac{60}{49}l_{zx}r_zl_y + \frac{60}{49}l_{zx}r_zr_y + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zr_zl_y + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zr_zr_y + \frac{60}{49}r_xl_zr_zl_y + \frac{60}{49}r_xl_zr_zr_y$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{6}{7} + \frac{6}{7}l_yl_{yy} + \frac{216}{343}l_{z((yy)z)}l_{yy} + \frac{60}{49}l_{zx}l_{yy} + \frac{216}{343}r_{(yy)z}r_{(yy)z} + \frac{60}{49}r_{(yy)z}r_x + \frac{60}{49}r_xr_{(yy)z} + \frac{50}{21}r_xr_x + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zl_{yy} + \frac{60}{49}r_xl_zl_{yy}$$

```
> h.isPrimitive()
True
```

6. Заключение

Полученные алгоритмы позволяют оперативно анализировать различные элементы высокой сложности и проверять гипотезы. Для дальнейших исследований планируется реализовать методы работы с множествами свободных образующих и ими порождаемыми морфизмами, а также алгоритмы конструктивного построения систем примитивных элементов с помощью автоморфизмов.

Список литературы

[1] В. А. Артамонов, А. В. Климаков, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, “Примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:2 (2016), 3–35; *J. Math. Sci.*, **237**:2 (2019), 157–179.

[2] Alexander A. Mikhalev and Ualbai Umirbaev and Jie-Tai Yu, “Automorphic orbits in free non-associative algebras”, *Journal of Algebra*, **243** (2001), 198–223.

[3] Alexander A. Mikhalev, Vladimir Shpilrain, and Jie-Tai Yu, *Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2004, ISBN: 9780387217246, 327 с.

[4] А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, К. Шампаньер, “Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:5 (2007), 171–192; *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 320–335.

[5] А.А.Чеповский., *Примитивные элементы алгебр шрайеровых многообразий*, дис. … канд. физ.-мат. наук, Москва, 2011, 65 с.

[6] А. Г. Курош, “Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр”, *Матем. сб.*, **20(62)**:2 (1947), 239–262.

Software implementation of algorithms for working with primitive elements in free non-associative algebras

Maisuradze M.V.

Algorithms for primitive elements are realised (in the system of computer algebra SageMath). In particular, we have calculated the number of primitive elements of free non-associative algebras over finite fields for some cases.

Keywords: free non-associative algebra, primitive element, computer algebra

References

[1] V. A. Artamonov, A. V. Klimakov, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, “Primitive and almost primitive elements of Schreier varieties”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **21**:2 (2016), 3–35; *J. Math. Sci.*, **237**:2 (2019), 157–179.

[2] Alexander A. Mikhalev and Ualbai Umirbaev and Jie-Tai Yu, "Automorphic orbits in free non-associative algebras", *Journal of Algebra*, **243** (2001), 198–223.

[3] Alexander A. Mikhalev, Vladimir Shpilrain, and Jie-Tai Yu, *Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2004, ISBN: 9780387217246,, 327 c.

[4] A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, A. A. Chepovskii, K. Champagnier, "Primitive elements of free nonassociative algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, **13**:5 (2007), 171–192; *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 320–335 (In Russian).

[5] A. A. Chepovskii., *Primitive elements of Schreier varieties. Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences.*, The Dissertation for Scientific Degree of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow, 2011 (In Russian), 65 c.

[6] A. Kurosh, "Non-associative free algebras and free products of algebras", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, **20(62)**:2 (1947), 239–262 (In Russian).