О k-диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов

И. Г. Любич[1], Д. С. Романов [2]

Доказано, что любую булеву функцию можно реализовать k-неизбыточной схемой из функциональных элементов в некотором конечном полном базисе, допускающей k-диагностический тест длины не более 2 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона.

УДК 519.718.7

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621, а также проекта «Математические модели глобального информационно-энергетического баланса на основе циклов управления природно-антропогенными системами (на примере системы "загрязнение среды — здоровье населения")» (код FSZZ-2020-0002).

1. Введение и основные результаты

Пусть S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B, реализующая произвольную булеву функцию $f(\widetilde{x}^n)$, формально зависящую от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть на схему S действует источник неисправностей O^{inv}, вызывающий инверсные неисправности на выходах функциональных элементов, т.е. на выходе любого функционального элемента схемы вместо реализуемой на его выходе функции от его входов может реализовываться отрицание этой функции. Будем использовать обозначения и определения в соответствии со статьей [1]. Если на схему действует источник неисправностей, вызывающий инверсную неисправность на выходе не более чем k функциональных элементов, назовем его O_k^{inv}. Обозначим через $W(S)$ множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована схемой S после поломки элементов, вызванной воздействием на схему

[1] *Любич Илья Геннадиевич* — менеджер в отделе биостатистики в PAREXEL, e-mail: `lubi4ig@gmail.com`

Liubich Ilia Gennadievich — associate manager, biostatistics at PAREXEL

[2] *Романов Дмитрий Сергеевич* — доц. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: `romanov@cs.msu.ru`

Romanov Dmitrii Sergeevich — associate professor of CMC Faculty, Lomonosov MSU

источником неисправностей O_k^{inv}. Схема S называется k-неизбыточной тогда и только тогда, когда для любой функции $g(\widetilde{x}^n) \in W(S)$ справедливо соотношение $f(\widetilde{x}^n) \neq g(\widetilde{x}^n)$. Назовём проверяющий (диагностический) тест k-проверяющим (k-диагностическим), если в схеме могут быть неисправны не более k элементов. Аналогично [1] определяются функции Шеннона длины k-проверяющего теста $L^{detect}(O_k^{inv}, n)$ и k-диагностического теста $L^{diagn}(O_k^{inv}, n)$. Пусть $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_1 = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$, $B' = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$, $B_1^{\infty} = \{x \oplus y, 1\} \cup \bigcup\limits_{i \geq 2} \{x_1 x_2 \ldots x_i\}$. Приведем обзор оценок функций Шеннона длины теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в СФЭ (оценки справедливы при всех $n \in \mathbb{N}$). С. В. Коваценко [2] доказано, что $L_{B_1}^{detect}(O_1^{inv}, n) = 1$, $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq n + 1$, $L_{B_1}^{diagn}(O^{inv}, n) \leq 2^{n-2}$. Н. П. Редькиным [3] для произвольного полного конечного базиса B установлено: $L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) \leq 3$. Д. С. Романовым (в [7] – в соавторстве в Е. Ю. Романовой) доказано: существует конечный полный базис $\hat{B}$, в котором $L_{\hat{B}}^{detect}(O^{inv}, n) \leq 4$ [4], $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$ [5], $L_{\mathcal{B}_0}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 2$ [6], в [7] доказано, что для любой булевой функции существует неизбыточная схема в базисе B_1^{∞}, допускающая полный диагностический тест длины 1 относительно O^{inv}. К. А. Попковым [8] доказано, что для любой булевой функции существует неизбыточная схема в базисе B', допускающая полный диагностический тест длины 2 относительно O^{inv}. В [9] К. А. Попков установил, что $L_{B_1}^{diagn}(IO_1^{inv}, n) \leq 3$. В предыдущей работе авторов [1] было доказано, что в произвольном полном базисе B имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.

Выберем произвольный полный базис B и число $k \in \mathbb{N}$. Определим базис $B'_k = B \cup \{\varphi(y_1, \ldots, y_{k+4}), \psi\ (y_1, \ldots, y_{3k+3})\}$, где $\varphi(y_1, \ldots, y_{k+4}) = y_1 \oplus ((y_1 \vee y_4 \vee \ldots \vee y_{k+4})(\bar{y}_1 \vee \bar{y}_4 \vee \ldots \vee \bar{y}_{k+4}) \vee (y_2 \oplus y_3))$, $\psi\ (y_1, \ldots, y_{3k+3}) = y_1(\bar{y}_{2k+3} \vee \ldots \vee \bar{y}_{3k+3}) \oplus H(y_2, \ldots, y_{2k+2})$, а $H(z_1, \ldots, z_{2k+1})$ — функция голосования, т.е. дизъюнкция всех монотонных конъюнкций ранга $k+1$ от $2k+1$ переменных. Заметим, что $\varphi(x_1, a, a, x_1, \ldots, x_1) = x_1$, а если на любое количество входов элемента φ с четвертого по последний подать $\bar{x}_1$ и/или если на второй и третий вход подать разные значения, то на выходе будет $\bar{x}_1$. Аналогично $\psi(x_1, a, \ldots, a, x_1, \ldots, x_1) = a$ (a подается на входы со второго по $2k+2$), и если на любое количество входов элемента ψ с $2k+3$ по последний подать $\bar{x}_1$, то на выходе будет $a \oplus x_1$.

Теорема 1. *При всяких $k, n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе B'_k имеет место неравенство $L_{B'_k}^{diagn}(O_k^{inv}, n) \leq 2$.*

Доказательство. Если f – тождественная функция, то она может быть реализована без элементов и диагностический тест будет иметь длину 0. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – не тождественная функция. Реализуем функцию f

произвольной схемой в базисе B $2k+1$ раз: $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$. Пусть в каждой такой схеме l элементов. Пронумеруем все элементы каждой схемы одинаково по неубыванию глубины и обозначим через $\sigma_{i,j}$ i-ый элемент j-ой схемы. Построим $2kl$ слоев с $k+1$ элементами φ в каждом слое. В первом слое каждому элементу на все входы, начиная с 4-го, подадим x_1. В слое $j+2k(i-1)$ на 1-й вход каждого элемента φ подадим x_1, на 2-й и 3-й входы – выходы элементов $\sigma_{i,j}$ и $\sigma_{i,j+1}$, $i=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,2k}$. На остальные $k+1$ входов каждого элемента φ не первого слоя подадим выходы всех элементов предыдущего слоя. Добавим выходной элемент ψ, на первый вход которого подан x_1, на входы со второго по $2k+2$ – выходы схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$, а на входы с $2k+3$ по $3k+3$ – выходы всех элементов φ последнего слоя. При отсутствии неисправностей на выходе элемента ψ построенная схема S_f реализует функцию f. Выясним, какие функции могут реализовываться при не более чем k инверсных неисправностях на выходах элементов S_f. Очевидно, что хотя бы $k+1$ из схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$ не будут содержать поломок и реализуют на выходе функцию f. Пусть сломалось какое-то количество k_1 элементов $\sigma_{i,j_1}, \dots, \sigma_{i,j_{k_1}}$ при минимально возможном i $(1 \le k_1 \le k)$. Тогда существуют два элемента $\sigma_{i,m}$, $\sigma_{i,m+1}$ (выберем m минимально возможным) с разными значениями на выходах на любом входном наборе, так что в слое $m+2k(i-1)$ на все элементы φ на 2-й и 3-й входы будут поданы разные значения и на выходе каждого элемента должна реализовываться функция $\bar{x}_1$. Заметим, что при поломке элемента φ, на входы которого были поданы неисправные значения ($\bar{x}_1$ на любой из входов, начиная с четвертого, или различные значения на второй и третий вход), на выходе будет функция x_1, но так как неисправностей может быть не больше чем k, все элементы φ одного слоя не могут сломаться одновременно, и у хотя бы одного элемента φ из этого слоя на выходе будет реализована функция $\bar{x}_1$, а это – сигнал об обнаружении неисправности. Информация об обнаружении неисправности будет надежно передаваться, начиная с некоторого слоя элементов φ, от слоя к слою. При поломке любого элемента, кроме ψ, на вход элемента ψ на входы со второго по $2k+2$ придет не менее $k+1$ значения f, а на входы с $2k+3$ по $3k+3$ как минимум один $\bar{x}_1$, и на выходе S_f будет реализована функция $f \oplus x_1$. В случае поломки элемента ψ на выходе S_f будет реализована функция $\overline{f \oplus x_1}$ или $\overline{f}$, если это единственная поломка во всей схеме. Итого, всего, кроме f, есть три возможные функции неисправности: $f \oplus x_1$, $\overline{f \oplus x_1}$, $\overline{f}$. Любое множество из 2 наборов, один из которых имеет 0, а второй 1 в своей первой компоненте, является k-диагностическим тестом. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] Любич И. Г., Романов Д. С., “О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над произвольными базисами”, *Дискрет. матем.*, **33**:1 (2021), 20–30.

[2] Коваценко С. В., “Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2000, № 2, 45–47.

[3] Редькин Н. П., “Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 217–230.

[4] Романов Д. С., “О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов”, *Вестн. Моск. ун-та. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2015, № 1, 30–37.

[5] Романов Д. С., “Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2015, № 4, 8–54.

[6] Романов Д. С., “Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2016, № 3, 56–72.

[7] Романов Д. С., Романова Е. Ю., “Короткий диагностический тест для одного класса схем”, *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: Технические науки. Информатика, вычислительная техника и управление*, 2017, № 04(38), 91–93.

[8] Попков К. А., “Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2017, № 105, 10 с.

[9] Попков К. А., “Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, № 81, 29 с.

Multiple fault k-diagnostic test sets for inverse faults of gates

Liubich I.G., Romanov D.S.

It is proved that any Boolean function can be realized by a k-irredundant Boolean circuit over an special finite complete basis such that the circuit admits a multiple fault k-diagnostic test set of cardinality at most 2 under inverse faults at outputs of gates.

Keywords: Boolean circuit, test set, inverse fault at output of gate, Shannon function.

References

[1] Liubich I. G., Romanov D. S., "Single fault diagnostic test sets for inverse faults of gates in circuits over arbitrary bases (In Russian)", *Diskretnaya matematika*, **33**:1 (2021), 20–30.

[2] Kovatsenko S. V., "Synthesis of easily testable circuits in the Zhegalkin basis for inverse faults (In Russian)", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*, 2000, № 2, 45–47.

[3] Redkin N. P., "Single fault detection tests for circuits in case of inverse faults of elements (In Russian)", *Matematicheskie voprosi kibernetiki*, **12**, Fizmatlit, Moscow, 2003, 217–230.

[4] Romanov D. S., "On the synthesis of circuits that admit complete detection tests of constant length with respect to inverse faults at the outputs of elements (In Russian)", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*, 2015, № 1, 30–37.

[5] Romanov D. S., "Method for the synthesis of non-redundant circuits in the Zhegalkin basis that admit single diagnostic tests of length one (In Russian)", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki*, 2015, № 4, 8–54.

[6] Romanov D. S., "Method for the synthesis of non-redundant circuits in a standard basis, allowing single diagnostic tests of length two (In Russian)", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki*, 2016, № 3, 56–72.

[7] Romanov D. S., Romanova E. U., "Short diagnostic test for one class of circuits (In Russian)", *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Seriya: Tekhnicheskiye nauki. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravleniye*, 2017, № 04(38), 91–93.

[8] Popkov K. A., "Complete diagnostic tests of length two for circuits in case of inverse faults of functional elements (In Russian)", *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2017, № 105, 10 c.

[9] Popkov K. A., "A method for constructing easily diagnosed circuits from functional elements with respect to single faults (In Russian)", *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2019, № 81, 29 c.