Улучшение верхней оценки функции Шеннона длины единичных диагностических тестов относительно инверсных неисправностей

И. Г. Любич[1]

Доказано, что в произвольном полном базисе любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов, допускающей диагностический тест длины не более 3 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, единичный диагностический тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона, легкотестируемая схема.

1. Введение и основные результаты

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B, реализующая f. O^{inv} — источник инверсных неисправностей на выходах функциональных элементов, действующий на S, т.е. на выходе любого функционального элемента схемы вместо реализуемой на его выходе функции от его входов может реализовываться отрицание этой функции. Будем использовать обозначения и определения в соответствии со статьей [1].

Обзор оценок функций Шеннона длины теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в СФЭ можно увидеть в работе "О k-диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов".

В данной публикации будет приведен метод улучшения оценки [1]: $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 3$.

Теорема 1. *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \,\&\, y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{\mathrm{diagn}}(O_1^{\mathrm{inv}}, n) \leq 3$.*

Доказательство. Из статьи [2] как следствие параграфа 3 (по принципу двойственности к базиму $B' = \{x \vee y, \bar{x}\}$) следует, что любую функцию f можно реализовать в базисе B схемой, для которой набор $\widetilde{\sigma}_1 = (1, \ldots, 1)$ является единичным проверяющим тестом.

[1] *Любич Илья Геннадиевич* — менеджер в отделе биостатистики в PAREXEL, e-mail: `lubi4ig@gmail.com`

Liubich Ilia Gennadievich — associate manager, biostatistics at PAREXEL

А это значит, что для этого базиса выполняются условия леммы 1 из [3], и в этом базисе любую функцию f можно реализовать схемой, допускающую единичный диагностический тест длины 3. Заметим, что этот набор состоит из набора $\widetilde{\sigma}_1$, набора $\widetilde{\alpha}_0$, на котором функция принимает значение 0 и набора $\widetilde{\alpha}_1$, на котором функция принимает значение 1 (если функция устроена так, что принимает постоянное значение на всех наборах кроме, быть может, $\widetilde{\sigma}_1$, то диагностический тест будет иметь длину 2).

Заметим, что все возможные функции неисправности, которые могут получиться имеют вид

$$(b_1 f \oplus b_0 \bar{f} \oplus I_{T'})(\widetilde{x}^n), \tag{1}$$

в котором b_1, $b_0 \in 0, 1$ и $T' \in \{\emptyset, \widetilde{\sigma}_1\}$, где $I_{T'}(\widetilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборах из множества T_1 и значение 0 на остальных наборах.

$\square$

Теорема 2. *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию $x \,\&\, y$, имеет место неравенство $L_B^{\mathrm{diagn}}(O_1^{\mathrm{inv}}, n) \le 4$.*

Доказательство. Дальнейшие построения будем связывать с возможными расширениями заданного базиса B. Расширением базиса B будем считать всякий базис B', любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из B, либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из B. Каждому элементу из B', которого нет в B, можно поставить в соответствие эквивалентную схему над B (склеивая в B некоторые входы). Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать ее для произвольного расширения базиса B.

Пусть B' максимальное расширение исходного базиса. Если в нем есть отрицание, строим схему как в теореме 1. Далее будем считать, что в расширении нет элемента отрицания.

Базис B в силу своей полноты содержит функцию, не сохраняющую 0 и функцию, не сохраняющую 1. Так как в расширении нет отрицания, то есть обе константы 0 и 1. Обозначим через E^i элементы, реализующие константы.

Пусть E^* — элемент из B', реализующий немонотонную булеву функцию. Среди входов элемента выделим главный вход i — такой вход, для которого существуют 2 набора $(\beta_1, , \ldots, \beta_{i-1}, x, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$, отличные только значением на этом входе, на котором при подаче на главный вход переменной x, на выходе будет реализована функция $\overline{x}$. Из всех возможных таких пар, выбирем ту, в которой количество нулей среди множества

$\{\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n\}$ минимально. Назовем такие входы нулевыми, а остальные — единичными. Из такого построения следует, что при подаче на любой нулевой вход константы 1, на выходе будет реализована функция, отличная от $\overline{x}$ — константы 0, 1, или тождественная функция x.

Возьмем схему, построенную в теореме 1, и заменим все элементы отрицания на указанный выше элемент E^*, на нулевые входы которого поданы выход элемента E^0, а на единичные — выход элемента E^1. Если при этом последний элемент такой схемы не E^*, добавим в конец два подряд идущих элемента E^*. Выход полученной схемы подадим на левый вход конъюнктора, на правый вход которого подается еще один выход элемента E^1.

При правильной работе схемы реализуется функция f. При поломке любого элемента конъюнкции или E^*, получившиеся функция неисправности будет иметь вид (1). Осталось рассмотреть, что будет при поломке элементов E^0 и E^1.

Если сломается элемент E^1, то на правый вход последнего элемента схемы придет значение 0 и на выходе этого элемента тоже будет реализована константа 0.

Если сломается элемент E^0, то все элементы E^* сломаются в функции 0, 1 или тождественные функции.

Если E^* сломаются в константы 0 или 1, то так как на левый вход последней конъюнкции подается выход элемента E^*, то и на выходе всей схемы будет константа 0 или константа 1.

Если E^* сломаются в тождественные функции, то в схеме исчезнут все отрицания и, так как функция существенно зависит от всех переменных, на выходе будет реализована функция $x_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_n$.

Полученные функции неисправности не увеличивают множества возможных неисправностей, полученных в теореме 1, а значит 3 наборов по прежнему хватает, чтобы диагностировать любую неисправность. $\square$

В силу принципа двойственности, также верны утверджения:

Теорема 3. *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{\mathrm{diagn}}(O_1^{\mathrm{inv}}, n) \leq 3$.*

Теорема 4. *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию $x \vee y$, имеет место неравенство $L_B^{\mathrm{diagn}}(O_1^{\mathrm{inv}}, n) \leq 3$.*

Далее, доказательство утверждения $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 3$ повторяет рассуждения из [1] заменой верхней оценки длины теста с 4 на 3.

Список литературы

[1] Любич И. Г., Романов Д. С., “О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над произвольными базисами”, *Дискрет. матем.*, **33**:1 (2021), 20–30.

[2] Редькин Н. П., “Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 217–230.

[3] Попков К. А., “Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, № 81, 29 с.

Improving the Shannon function upper estimate of the length of single diagnostic tests sets for inverse faults of gates

Liubich I.G.

It is proved that, in any complete basis, any Boolean function can be realized by an irredundant circuit that admits a diagnostic test of length no more than 3 in case of inverse faults at the outputs of gates.

Keywords: Boolean circuit, single fault diagnostic test set, inverse fault at output of gate, Shannon function, easily testable circuit.

References

[1] Liubich I. G., Romanov D. S., “Single fault diagnostic test sets for inverse faults of gates in circuits over arbitrary bases (In Russian)”, *Diskretnaya matematika*, **33**:1 (2021), 20–30.

[2] Redkin N. P., “Single fault detection tests for circuits in case of inverse faults of elements (In Russian)”, *Matematicheskie voprosi kibernetiki*, **12**, Fizmatlit, Moscow, 2003, 217–230.

[3] Popkov K. A., “A method for constructing easily diagnosed circuits from functional elements with respect to single faults (In Russian)”, *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2019, № 81, 29 c.