Оценки мощности объёмных схем для класса частичных булевых операторов

А. А. Ефимов[1]

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся укладкой схем функциональных элементов в пространстве. Был рассмотрен класс объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы. Для этого класса получена нижняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. Получен порядок функции Шеннона потенциала для класса всюду определенных операторов для объёмных схем без ограничений и схем с близкими выходами.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

В этой работе мы будем рассматривать такую модель СФЭ, как объёмные схемы. *Объёмной схемой* K или *схемой из кубических элементов* будем называть такую укладку СФЭ в трёхмерную целочисленную решётку $\mathbb{Z}^3$, чтобы в каждое ребро решётки попадало не более одного ребра СФЭ. Таким образом в каждой вершине решётки реализуется булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов. Будем говорить, что схема K *реализует* булев оператор F, если соответствующая СФЭ реализует F. Через $\mathrm{Impl}(F)$ обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор F.

Узлами объёмной схемы K будем называть рёбра решётки $\mathbb{Z}^3$, в которые уложены провода СФЭ. Отметим, что в результате такой укладки вершины СФЭ (в вершинах которых реализуются только булевы функции) склеиваются в вершины решётки $\mathbb{Z}^3$ (в вершинах которой реализуются булевы операторы). При этом каждому узлу s объёмной схемы K соответствует такая вершина w СФЭ, что исходящее ребро из w уложено в s. Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. Функцию, реализуемую в i-м узле, обозначим через g_i (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Потенциалом схемы K *на входном наборе* $x \in \{0,1\}^n$ назовём величину $u_K(x) = \sum_{i=1}^{\ell} g_i(x)$, где ℓ — число узлов в схеме K. Таким образом,

[1] *Ефимов Алексей Андреевич* — выпускник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: efimovqwerty@yandex.ru.

Efimov Alexey Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

потенциал схемы на наборе — количество узлов схемы, значение в которых равно 1 на этом наборе.

Максимальным потенциалом схемы K назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0,1\}^n} u_K(x).$$

Пусть $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ – булев оператор. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in \mathrm{Impl}(f)} \hat{U}(K).$$

Средним потенциалом схемы K с n входами на множестве входных наборов $D \subseteq \{0,1\}^n$ назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Пусть $f : D \to \{0,1\}^m$ – частичный булев оператор. Тогда

$$U(f) := \min_{K \in \mathrm{Impl}(f)} U_D(K).$$

Множество булевых операторов $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ обозначим $P_2(n,m)$. Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U(n,m) := \max_{f \in P_2(n,m)} U(f), \quad \hat{U}(n,m) := \max_{f \in P_2(n,m)} \hat{U}(f).$$

В данной работе получена нижняя оценка потенциала для класса частичных булевых операторов, сформулированная в следующей теореме.
Теорема 1. *Существует константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что если $D \subseteq \{0,1\}^n$, то доля операторов $f : D \to \{0,1\}^m$, для которых выполнено неравенство*

$$U(f) \geq C \frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)},$$

не меньше $\alpha(n,m,|D|)$, причём

$$\alpha(n,m,d) \to 1 \quad \text{при} \quad d \to \infty,\ n \log_2 n = o(d),\ \log_2 m \leq C_2 d.$$

Другими словами, в теореме утверждается, что если область определения D содержит существенно больше $n \log n$ наборов и число выходов m не близко к числу всевозможных частичных функций на D, то потенциал почти всех операторов $f : D \to \{0,1\}^m$ по порядку не меньше $\frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)}$.

Ранее в работе [3] была получена верхняя оценка потенциала для класса всюду определенных операторов.

Теорема 2. [3] *Пусть дан булев оператор $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$. Тогда существует объемная схема W_f со входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на m выходах которой реализуется оператор f, причём*

$$\hat{U}(W_f) = \mathcal{O}\left(\frac{m2^{n/3}}{\min^{2/3}(m,n)}\right).$$

В качестве следствия из Теоремы 1 и Теоремы 2 можно получить порядок функции Шеннона для всюду определенных операторов.

Следствие 1.

$$U(n,m) \asymp \hat{U}(n,m) \asymp \frac{m2^{n/3}}{\min^{2/3}(m,n)}$$

при $n \to \infty, \log_2 m = o(2^n)$.

Также рассмотрим более узкий класс объёмных схем, где выходы расположены близко.

Деревом выходов схемы K назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы K, причем расстояние между элементами – расстояние между их центрами в манхэттенской метрике. Введём множество $T_h := \{K : T(K) \leq h\}$, состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит h. Обозначим T' – множество объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит числа выходов. Если P – некоторый класс объёмных схем, f – булев оператор, то положим $U_P(f) := \min\limits_{K \in \mathrm{Impl}(f) \cap P} U(K)$.

Теорема 3. *Если $D \subseteq \{0,1\}^n, d = |D|$, то существует такая константа C, такая, что неравенство*

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C\frac{m\sqrt[3]{md}}{n}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h \\ C\frac{m\sqrt{md}}{n\sqrt{h}}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h \end{cases}$$

выполнено для почти всех частичных операторов $f : D \to \{0,1\}^m$ при $h \in \mathbb{N}$, $n \to \infty, n\log_2 n = o(d), m = 2^{o(d)}$.

Теорема 4. *Пусть дан булев оператор $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m, m < n^2 \cdot 2^n$. Тогда существует объёмная схема $\widetilde{W}_f$ (с минимальной длиной дерева выходов) со входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на m выходах которой реализуется оператор f, причём*

$$\hat{U}(\widetilde{W}_f) = \mathcal{O}\left(\frac{m^{4/3} \cdot 2^{n/3}}{\min(m,n)}\right) = \mathcal{O}\left(\max\left(1, \frac{m}{n}\right) \cdot \sqrt[3]{m2^n}\right).$$

Следствие 2. *Для почти всех* $f \in P_2(n,m)$, $m \le 2^{n/2}$, *при* $n \to \infty$ *верно равенство:*

$$U_{T'}(f) \asymp \max\left(1, \frac{m}{n}\right) \cdot \sqrt[3]{m2^n}.$$

Список литературы

[1] Коршунов А. Д., "Об оценках сложности из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов", *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.

[2] Калачёв Г. В., "Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции", *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 49–74.

[3] Ефимов А. А., "Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 105–124.

Power estimates of volumetric circuits for a class of partial Boolean operators

Efimov A.A.

In this paper, volumetric circuits are researched. They are the embedding of Boolean circuts of logic gates in space. A class of volumetric circuits implementing partial Boolean operators was explored. Define the potential — a measure of power equal to the number of circuit elements issuing a one on a given input. For this class of volumetric circuits, a lower estimate of the potential is obtained. The order of the Shannon function of the potential for a class Boolean operators for volumetric circuits without constraints and Boolean circuits with near outputs is obtained.

Keywords: Boolean circuits consisting of logic gates, volumetric circuits, power of Boolean circuits, potential.

References

[1] Korshunov A. D., "Complexity estimates volumetric functional elements and volumetric boolean circuits consisting of functional elements", *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 275–283.

[2] Kalachev G. V., "Order of power of planar circuits implementing Boolean functions", *Discrete mathematics*, **26**:1 (2014), 49–74.

[3] Efimov A. A., "Upper estimate of energy consumption of volumetric circuits implementing Boolean operators", *Intelligent systems*, **23**:2 (2019), 105–124.