Оценки времени установления автоматом свойств графа быть деревом и псевдодеревом

А. А. Демидова[1]

В данной работе рассматриваются автоматы, осуществляющие обход связных плоских простых неориентированных графов с целью установления их свойств. Приводится алгоритм, с использованием которого автомат с двумя красками может установить, является ли граф, обход которого он совершает, деревом или псевдодеревом, и определяются оценки для числа шагов, которое должен совершить автомат.

Ключевые слова: Автоматы, графы, деревья, псевдодеревья.

Исследования автоматов, осуществляющих обход лабиринтов, берут исток из работы Шеннона [1]. Подробный анализ данного направления теории автоматов представлен в работе [2].

В работе [3] представлен обзор известных результатов в области автоматов, осуществляющих обход графов.

Основным отличием в функционировании автоматов в лабиринтах и на графах является то, что при обходе лабиринта автомат обладает компасом, который позволяет получать некоторую дополнительную информацию [4].

В работах [5], [6] был рассмотрен обход автоматами с красками прямоугольных лабиринтов, а в работе [7] – связных простых ориентированных графов с ограничением на степень вершин.

В работе [8] было исследовано применение автоматов со стираемыми красками для определения свойств связных плоских простых неориентированных графов. В частности, было доказано, что двух красок хватит для того, чтобы установить, является ли граф, обход которого осуществляет автомат, деревом или псевдодеревом, и был представлен алгоритм, в соответствии с которым должен действовать автомат. В данной работе представлена улучшенная версия этого алгоритма, требующая выполнения меньшего числа действий, и найдены оценки для числа шагов, которое автомат должен осуществить для установления рассматриваемых свойств графа.

[1] *Демидова Анна Андреевна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.dem98@mail.ru.

Demidova Anna Andreevna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи.

Обозначим через $\mathbf{G}_k$ класс всех связных плоских простых неориентированных графов с k рёбрами. Будем считать, что до начала обхода графа все его рёбра имеют серый цвет.

Псевдодеревом является связный неориентированный граф, содержащий не более одного цикла. На Рисунке 1 представлен общий вид псевдодерева с одним циклом.

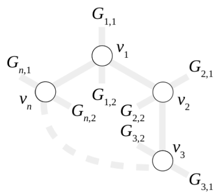

Рис. 1. Общий вид псевдодерева, содержащего цикл

Пусть $\mathfrak{A}_1$ – класс автоматов, определяющих, является ли граф деревом, а $\mathfrak{A}_2$ – класс автоматов, определяющих, является ли граф псевдодеревом.

Пусть $\mathcal{A}$ – автомат, принадлежащий одному из классов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. $T(\mathcal{A}, G)$ – время, необходимое автомату $\mathcal{A}$ для определения свойств графа G из класса $\mathbf{G}_k$.

Введём следующие величины:

$$\widetilde{T}(\mathcal{A}, k) = \max_{G \in \mathbf{G}_k} T(\mathcal{A}, G), \tag{1}$$

$$T_m(k) = \min_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_m} \widetilde{T}(\mathcal{A}, k),\ m{=}1{,}2. \tag{2}$$

Теорема 1. $2k \leq T_1(k) \leq 3k - 1$.

Автомат осуществляет обход графа по правилу левой руки и всегда перекрашивает изначально серые рёбра в чёрный цвет. Автомат установит, что граф является деревом, когда по второму разу зайдёт в первый лист. Наибольшее число шагов автомат должен будет осуществить в том случае, если граф является цепью, а обход начался из предпоследней вершины цепи в направлении более длинного отрезка цепи. Нижняя оценка следует из того, что автомат не может завершить обход дерева до тех пор, пока не пройдёт по каждому ребру дважды.

Теорема 2. $2k \leq T_2(k) \leq 5k - 3$.

Автомат по умолчанию осуществляет обход графа по правилу левой руки, однако в определённые моменты может выбирать не левые рёбра. На вход автомата поступает неполная информация о текущей вершине и некоторых рёбрах, инцидентных ей. На выходе автомат сообщает, по какому ребру следует идти в следующий момент времени и нужно ли красить его в некоторый цвет.

Далее будем предполагать, что в графе есть один цикл, длина которого равна n.

Пусть $G_{i,j} = (V_{i,j}, E_{i,j})$, $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,2})$ – поддеревья графа G; $N_{i,j} = |E_{i,j}|$ – количество ребёр в $G_{i,j}$. $G_{i,j}$ включает в себя v_i. Если обход $G_{i,j}$ начинается из v_i, то автомат обойдёт поддерево за $2N_{i,j}$ шагов. Следует отметить, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(N_{i,1} + N_{i,2}) = k - n$.

В работе [8] после обнаружения цикла автомат осуществлял повторный обход цикла с целью установления наличия или отсутствия левых и правых ветвлений. Однако от повторного обхода можно отказаться, если автомат к моменту обнаружения цикла будет обладать информацией о том, проходил ли он до этого по чёрным рёбрам, покрашенным ранее, – это свидетельствовало бы о наличии левых ветвлений, за исключением, возможно, $G_{1,1}$, но и его тоже можно отследить. Если левые ветвления не были обнаружены, но до момента обнаружения цикла автомат посещал вершины, степень которых была больше 2, то в графе есть правые ветвления.

В результате рассмотрения возможных вариантов было установлено, что наибольшее время будет затрачено в случае, если с точки зрения автомата в графе есть только правые ветвления, поскольку в такой ситуации автомат осуществит $2n$ шагов, после чего начнёт обход заново, но так, чтобы существующие ветвления стали левыми. В худшем случае для завершения работы автомату после этого потребуется ещё $2k + n$ шага. С учётом того, что $n \leq k - 1$, $T_2(k) = 2n + 2k + n \leq 5k - 3$.

Список литературы

[1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found*, 1951, 173–180.

[2] Кудрявцев В. Б., Килибарда Г., Ушчумлич Ш., “Системы автоматов в лабиринтах”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1–4 (2006), 449–562.

[3] Okhotin A., “Graph-walking automata: from whence they come, and whither they are bound”, *International Conference on Implementation and Application of Automata*, 2019, 10–29.

[4] Blum M.,Kozen D., “On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs)”, *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 1978, 132–142.

[5] Насыров А. З., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки”, *Дискретная математика*, **9**:1 (1997), 123–133.

[6] Голованов А. В., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта”, *Интеллектуальные системы*, **3**:3–4 (1998), 193–212.

[7] Голубев Д. В., “Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской”, *Интеллектуальные системы*, **4**:1–2 (1999), 243–272.

[8] Демидова А. А., “Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом”, *Интеллектуальные системыЖ теория и приложения*, **25**:2 (2021), 111–127.

Estimates of the time for the automaton to establish the properties of a graph to be a tree and a pseudo-tree

Demidova A.A.

In this paper, we consider automata that traverse connected plane simple undirected graphs in order to establish their properties. An algorithm is presented, using which an automaton with two colors can determine whether the graph it traverses is a tree or a pseudotree, and upper bounds are determined for the number of steps that the automaton must make.

Keywords: Automata, graphs, trees, pseudotrees.

References

[1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found*, 1951, 173–180.

[2] Kudryavtsev V. B., Kilibarda G., Ušćumlić Š., “Automata systems in labyrinths”, *Intelligent Systems*, **10**:1–4 (2006), 449–562 (In Russian).

[3] Okhotin A., “Graph-walking automata: from whence they come, and whither they are bound”, *International Conference on Implementation and Application of Automata*, 2019, 10–29.

[4] Blum M.,Kozen D., “On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs)”, *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 1978, 132–142.

[5] Nasyrov A. Z., “On traversing labyrinths by automata that leave not-erasable marks”, *Discrete mathematics*, **9**:1 (1997), 123–133 (In Russian).

[6] Golovanov A. V., “On traversing labyrinths by automata that leave a trail at the vertices of the labyrinth”, *Intelligent Systems*, **3**:3–4 (1998), 193–212 (In Russian).

[7] Golubev D. V., “On graph traversal by automata with one not-erasable paint”, *Intelligent Systems*, **4**:1–2 (1999), 243–272 (In Russian).

[8] Demidova A. A., “Automaton analysis of the properties of a graph to be a tree and a pseudo-tree”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:2 (2021), 111–127 (In Russian).