Построение пучка гиперплоскостей по определенному множеству простых путей графа и его свойства

А. И. Болотников[1]

С помощью характеристического многочлена пучка гиперплоскостей можно посчитать количество регионов пучка. Это позволяет использовать пучки гиперплоскостей в решении сложных комбинаторных задач.

В работе изучается пучок гиперплоскостей, построенный по подмножеству множества всех простых путей графа. Полученные результаты связывают этот пучок с задачей о нахождении паросочетания с наибольшим весом в графе, а также позволяют найти характеристический многочлен построенного пучка для некоторых графов.

Ключевые слова: пучок гиперплоскостей, графический пучок, задача о максимальном паросочетании.

1. Введение

В работе [1] был получен результат, позволяющий найти количество регионов пучка гиперплоскостей с помощью его характеристического многочлена. Этот результат позволяет использовать пучки гиперплоскостей в комбинаторике. Например, с их использованием было подсчитано количество пороговых функций [2].

В работе [3] по множеству всех ребер графа был построен пучок, названный графическим, и были доказаны его свойства. В частности, было доказано, что характеристический многочлен графического пучка равен хроматическому многочлену графа, а количество регионов графического пучка равно количеству ациклических ориентаций в графе.

В данной работе строится пучок по подмножеству множества всех простых путей графа. Показана связь пучка с задачей о максимальном паросочетании и изучена возможность наличия одинаковых пучков у неизоморфных графов. Также получены значения характеристического многочлена пучка для некоторых графов.

При получении результатов использовались определения и теоремы о пучках гиперплоскостей, взятые из [4].

[1] *Болотников Алексей Игоревич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotnikov-94@mail.ru.

Bolotnikov Aleksey Igorevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и результаты

Пучок гиперплоскостей - конечное множество гиперплоскостей в некотором векторном пространстве.*Регион* пучка - связная компонента дополнения к объединению гиперплоскостей пучка. *Ранг* пучка - размерность линейного пространства, натянутого на вектора нормалей к гиперплоскостям пучка.

Для произвольного пучка гиперплоскостей A следующим образом определяется частично упорядоченное множество $L(A)$: элементы L(A) - всевозможные непустые пересечения гиперплоскостей пучка, частичный порядок $\leq$ таков: $x \leq y \Leftrightarrow x \supseteq y$.

Функция Мёбиуса частично упорядоченного множества P определяется так:

1) $\mu(x,x) = 1 \ \forall x \in P$

2) $\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z) \ \forall x < y \in P$

.

Функция Мёбиуса от одного элемента $\mu(x) = \mu(\hat{0},x)$, где $\hat{0}$ - наименьший элемент частично упорядоченного множества, т.е. элемент, меньший любого другого элемента частично упорядоченного множества.

Характеристический многочлен пучка A определяется следующей формулой:

$$\chi_A(t) = \sum_{x \in L(A)} \mu(x) t^{dim(x)}$$

.

Пусть G(V,E), |E|=n - граф без петель и кратных ребер. Рассмотрим в пространстве R^n следующие гиперплоскости: для любой последовательности ребер $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$, образующей простой незамкнутый путь или простой цикл четной длины в графе G, берем гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - ...x_n = 0$. Все такие гиперплоскости образуют некоторый пучок. Данный пучок будет далее обозначаться $PA(G)$.

Для пучка PA(G) получены следующие результаты:

Утверждение 1. Пусть G(V,E), |E|=n - граф без петель и кратных ребер. Выберем произвольный регион пучка $PA(G)$ и выберем два вектора из этого региона. Для каждого вектора рассмотрим задачу о максимальном паросочетании в графе G с этим вектором в качестве вектора весов на ребрах. Утверждается, что эти две задачи имеют одно и то же решение, т.е. для обоих векторов одно и то же паросочетание будет иметь наибольший вес.

Утверждение 2. Пусть G_1, G_2 -графы без петель, кратных ребер и изолированных вершин, и $PA(G_1) = PA(G_2)$ Тогда G_1 и G_2 изоморфны, за исключением случая, когда один из графов содержит компоненту связности, изоморфную K_3, а другой - компоненту, изоморфную $K_{1,3}$.

Утверждение 3. Пусть G - граф без петель, кратных ребер и изолированных вершин, $G_1, G_2, ..., G_k$ - его компоненты связности.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = \chi_{PA(G_1)} \cdot \chi_{PA(G_2)} \cdot ... \cdot \chi_{PA(G_k)}$

Утверждение 4. Пусть G - дерево.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = (t-1)(t-2)...(t-n)$

Утверждение 5. Пусть G_1, G_2 -графы без петель и кратных ребер, причем существуют подграфы $H_1 \subset G_1, T_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2, T_2 \subset G_2$ такие, что:

1) $G_1 = H_1 \cup T_1, G_2 = H_2 \cup T_2$
2) $H_1 \cap T_1 = \{u\}, H_2 \cap T_2 = \{v\}$, где u - вершина в G_1, v - вершина в G_2
3) существует изоморфизм из H_1 в H_2, переводящий u в v
4) T_1 и T_2 - деревья с одинаковым ненулевым количеством ребер

Тогда $\chi_{PA(G_1)} = \chi_{PA(G_2)}$

Утверждение 6.Пусть G_1 - граф из утверждения 5, в котором $H_1 = K_3$.

Тогда

$$\chi_{PA(G_1)} = (t-1)(t-3)(t-4)...(t-(n-2))(t-(n-1))(t-(n-1))(t-n),$$

где n - количество ребер в графе G_1

Утверждение 7 Пусть G - граф, состоящий из одного простого цикла,n - количество ребер в G.

Тогда

1) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-n)^{n-1}$,если n- четное,
2) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-3)(t-5)...(t-(2k-1))...(t-(2n-3))(t-(n-1))$,если n- нечетное.

Список литературы

[1] T. Zaslavsky, “Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).

[2] Ирматов А.А., “Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions”, *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211–226.

[3] C.Greene, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”. *Transactions of the American Mathematical Society*, **280**:1 (1983), 97–126.

[4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics.* V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.

Construction of a hyperplane arrangement with a specific set of simple paths in a graph and its properties

Bolotnikov A.I.

There exists a way to calculate the amount of regions of a hyperplane arrangement using its characteristic polynomial. This allows using hyperplane arrangements in solutions of combinatorial problems.

This paper considers a hyperplane arrangement constructed with a subset of a set of all simple paths in a graph. Results in this paper connect this arrangement to the maximum matching problem and allow to calculate its characteristic polynomial for specific cases of the initial graph.

Keywords: hyperplane arrangement, graphical arrangement, maximum mathcing problem.

References

[1] T. Zaslavsky, “Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).

[2] Irmatov A.A., “Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions”, *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211–226.

[3] C.Greene, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”. *Transactions of the American Mathematical Society*, **280**:1 (1983), 97–126.

[4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics.* V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.