Градуированные квазифробениусовы кольца и модули

И. Н. Балаба[1], А. В. Михалёв[2]

В работе рассмотрены градуированные квазифробениусовы кольца и модули, установлены связи между различными определениями, получен ряд эквивалентных характеристик.

Ключевые слова: градуированные кольца и модули, квазифробениусовы кольца, квазифробениусовы модули, фробениусовы аагебры

1. Введение

Фробениусовы алгебры являются одним из важных классов алгебр, изучаемых в теории представлений конечномерных алгебр. Впервые они появились в работе Ф.Г.Фробениуса еще в начале XX века. Квазифробениусовы кольца являются их естественным обобщением. Класс квазифробениусовых колец включает в себя все артиновы полупростые кольца, а также все групповые алгебры конечных групп (не обязательно полупростые).

В работах Накаямы [1, 2] фробениусовые и квазифробениусовые кольца и алгебры были охарактеризованы в терминах аннуляторов, а Азумая [3] с помощью аннуляторных условий определил квазифробениусовы модули.

В последние десятилетия интерес к квазифробениусовым кольцам и модулям возрастает в связи с их исключительной ролью в развитии теории линейных кодов и рекурент [4].

Градуированным фробениусовым алгебрам посвящены работы [5, 6, 7], а в [8] дано несколько эквивалентных характеристик градуированных квазифробениусовых кольца.

В работе рассмотрены градуированные квазифробениусовы кольца и модули, установлены связи между различными определениями, получен ряд эквивалентных характеристик.

[1] *Балаба Ирина Николаевна* — профессор каф. алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, e-mail: ibalaba@mail.ru

Balaba Irina Nikolaevna — professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Department of Algebra, Mathematical analysis and Geometry

[2] *Михалёв Александр Васильевич* — заведующий каф. теоретической информатики механико-математического ф-та МГУ, e-mail: aamikhalev@mail.ru

Mikhalev Alexander Vasilyevich — head of Department, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of Theoretical Informatics

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем»

2. Основные понятия и результаты

Все рассматриваемые кольца ассоциативные с единицей, модули унитарны, градуированы мультипликативной группой G. Градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой gr-. Таким образом, градуированное кольцо называется *gr-артиновым* (справа), если оно удовлетворяет условию обрыва убывающей цепочки правых градуированных идеалов.

Градуированное кольцо R называется *gr-квазифробениусовым* или *gr-QF-кольцом*, если оно gr-артиново слева и справа и gr-самоинъективно справа (слева).и *gr-фробениусовым*, если оно gr-квазифробениусово и $S^{gr}(R) = R/J^{gr}(R)$, где $S^{gr}(R)$ – градуированный цоколь, а $J^{gr}(R)$ – градуированный радикал Джекобсона кольца R.

Для подмножества $S \subseteq R$ через $l_R(S)$ и $r_R(S)$ обозначим соответственно левый и правый аннуляторы множества S, т.е.

$$l_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}, \quad r_R(s) = \{a \in A \mid Sa = 0\}.$$

Если множество S вместе с каждым своим элементом содержит и все его однородные компоненты, то $l(S)$ и $r(S)$ являются соответственно левым и правым градуированными идеалами кольца R.

Для любого градуированного R-модуля M можно определить градуированное кольцо эндоморфизмов $S = \mathrm{END}_R(M)$ и дуальный градуированный модуль $M^* = \mathrm{HOM}_R(M, R)$.

Теорема 1. *Для градуированного кольца R следующие условия эквивалентны:*

1. R – gr-QF-кольцо;

2. R – gr-артиново кольцо и для любого левого градуированного идеала L и любого правого градуированного идеала K кольца R выполнены следующие аннуляторные условия: $l_R(r_R(L)) = L, \quad r_R(l_R(K)) = K$;

3. градуированные модули, дуальные к gr-неприводимым правым R-модулям и к gr-неприводимым левым R-модулям, также являются gr-неприводимыми.

Каждое градуированное квазифробениусово кольцо является gr-квазифробениусовым. В то же время gr-квазифробениусово кольцо может не быть квазифробениусовым. Примером является групповой кольцо бесконечной группы с естественной градуировкой.

Градуированный бимодуль ${}_RQ_S$ называется *gr-квазифробениусовым* или *gr-QF-бимодулем*, если для любого максимального левого градуированного идеала $I \subseteq_R R$ его правый аннулятор $r_Q(I) = \{q \in Q \mid Iq = 0\}$ в Q или нуль или gr-неприводимый S-модуль и для любого максимального правого градуированного идеала $J \subseteq S_S$ его левый аннулятор $l_Q(J) = \{q \in Q \mid qJ = 0\}$ в Q или нуль или gr-неприводимый S-модуль.

Градуированный модуль ${}_RQ$ назовем *gr-квазифробениусовым модулем* или *gr-QF-модулем*, если для любого натурального n и любого конечно порожденного градуированного подмодуля U модуля $\hat{Q} = Q(g_1) \bigoplus Q(g_2) \bigoplus \ldots \bigoplus Q(g_n)$, здесь $g_1, g_2, ..., g_n \in G$, $Q(g_i)$ – сдвиг модуля Q, фактор модуль $\hat{Q}/U$ копорождается модулем Q и каноническое отображение $\mathrm{HOM}_R(\hat{Q}, Q) \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(U, Q)$ – сюръективно.

Теорема 2. *Для точного градуированного бимодуля ${}_RQ_S$ над конечными градуированными кольцами эквивалентны следующие условия:*

1. ${}_RQ_S$ – gr-QF-бимодуль;

2. ${}_RQ_S$ – конечный gr-QF-бимодуль;

3. ${}_RQ$ – gr-QF-модуль и $S = \mathrm{END}_R(Q)$;

4. для любых градуированных подмодулей $M \subseteq_R Q$ и $N \subseteq Q_S$ справедливы равенства $N = r_Q(l_R(N)), \quad M = l_Q(r_S(M))$.

Теорема 3. *Для gr-артинова кольца R эквивалентны следующие условия:*

1. R – gr-QF-кольцо;

2. ${}_RR_R$ – gr-QF-бимодуль.

Пусть k – поле и $A \bigoplus_{g\in G} A_g$ — градуированная k-алгебра. Левому модулю ${}_AA$ как векторному пространству над полем k можно сопоставить дуальное векторное пространство $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$, являющееся правым A-модулем, если положить $(\varphi a)(x) = \varphi(ax)$ для всех $\varphi \in A^*,\ a, x \in A$.

Если алгебра A конечномерна, то A^* является правым градуированным A-модулем со следующей градуировкой

$$A^*_g = \{f \in A^* \mid f(A_h) = 0 \ \text{ для всех } h \neq g^{-1}\} \quad (g \in G).$$

Конечномерная градуированная k-алгебра A называется *gr-фробениусовой*, если левые градуированные A-модули ${}_AA$ и $(A_A)^*$ изоморфны и *gr-квазифробениусовой*, если модули ${}_AA$ и $(A_A)^*$ имеют одни и те же различные неразложимые компоненты.

Теорема 4. *Конечномерная градуированная алгебра A является gr-фробениусовой в том и только том случае, если кольцо A – gr-фробениусово.*

Конечномерная градуированная алгебра A является gr-квазифробениусовой в том и только том случае, если для каждого левого градуи-

рованного идеала I и каждого правого градуированного идеала J алгебры A справедливы равенства $l_A(r_A(I)) = I, \quad r_A(l_A(J)) = J$.

Список литературы

[1] Nakayama T., "On Frobeniusean algebra. I", *Ann.of Math.*, **40**:2 (1939), 611–633.

[2] Nakayama T., "On Frobeniusean algebra. II", *Ann.of Math.*, **42**:1 (1941), 1–21.

[3] Azumaya G., "A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules)", *Am. J. Math.*, **81**:1 (1959), 249–278.

[4] Куракин В.Л., Кузьмин А.С., Михалев А.В., Нечаев А.А., *Линейные рекурренты над кольцами и модулями*, Соврем, математика и ее прил. Тематич. обзоры. Т. 10. Алгебра – 2, «ВИНИТИ», Москва, 1994.

[5] Dăscălescu S., Năstăsescu C., Năstăsescu L., "Frobenius algebras of corepresentations and group-graded vector spaces", *Journal of Algebra*, **406** (2014), 226–250.

[6] Wakamatsu T., "On graded Frobenius algebras.", *Journal of Algebra*, **267** (2003), 377–395.

[7] Балаба И.Н, "Градуированные фробениусовы алгебры и кольца", *Тезисы докладов*, Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-столетию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 2018), Изд-во МГУ, Москва, 2018, 34–37.

[8] Краснова Е. Н, "Градуированные квазифробениусовы кольца", *Материалы конференции*, XII Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященная восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева (Тула, 2014), Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н.Толстого, Тула, 2014, 168–171.

Graded quasi-Frobenius rings and modules

Balaba I.N., Mikhalev A. V.

The present paper is concerned with graded quasi-Frobenius rings and modules. The connection between different definitions is established, a series of equivalent characteristics are obtained.

Keywords: graded rings and modules, quasi-Frobenius rings, quasi-Frobenius modules, Frobenius algebra

References

[1] Nakayama T., "On Frobeniusean algebra. I", *Ann.of Math.*, **40**:2 (1939), 611–633.

[2] Nakayama T., "On Frobeniusean algebra. II", *Ann.of Math.*, **42**:1 (1941), 1–21.

[3] Azumaya G., "A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules)", *Am. J. Math.*, **81**:1 (1959), 249–278.

[4] Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., *Linear recurring sequences over rings and modules*, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennaya Matematika I Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzor. Vol 10. Algebra – 2, «VINITI», Moscow, 1994 (In Russian).

[5] Dăscălescu S., Năstăsescu C., Năstăsescu L., "Frobenius algebras of corepresentations and group-graded vector spaces", *Journal of Algebra*, **406** (2014), 226–250.

[6] Wakamatsu T., "On graded Frobenius algebras", *Journal of Algebra*, **267** (2003), 377–395.

[7] Balaba I. N., "Graded Frobenius algebras and rings", *Abstracts of reports*, International algebraic conference dedicated to the 110th anniversary of the birth of Professor A. G. Kurosh (Moscow, 2018), Publishing house of MSU, Moscow, 2018, 34–37 (In Russian).

[8] Krasnova E.N, "Graded quasi-Frobenius rings", *Proceedings*, XII International conference: Algebra and Number Theory:Modern Problems and Application, dedicated to 80-th anniversary of зrofessor V. N. Latyshev (Tula, 2014), Publishing house of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, 2014, 168–171 (In Russian).