О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис[1]

Целью настоящей работы является изучение замкнутых классов в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами, которые играют ключевую роль при решении проблемы полноты.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, замкнутые классы, рациональная функция

Этот доклад можно считать продолжением моих докладов, представленных на XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия ... » [1] и на Международной конференции «Мальцевские чтения» [2].

При изложении материала мы используем стандартную терминологию теории функциональных систем из книг [3] и [4].

Введем несколько стандартных обозначений:

N — множества всех натуральных чисел (включая 0),

Q — множества всех рациональных чисел,

c_0 — мощность счетного множества,

c — мощность континуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

Основной проблемой теории функциональных систем (ф.с.) является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с.* $\mathbf{F} = (F, O)$.

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: функциональная система булевых функций [4], k-значные логики [3], функциональные системы автоматных функций [5], [6]. В этих ф.с. решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных.

Определим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами.

[1] *Алексиадис Никос Филиппович* — доцент, Национальный исследовательский университет "МЭИ", e-mail: aleksiadis@yandex.ru.

Aleksiadis Nikos Philippovich — associate professor, National Research University "MPEI"

Функция вида

$$f(x_1,\dots,x_n)=\frac{g(x_1,\dots,x_n)}{h(x_1,\dots,x_n)},$$

где $g(x_1,\dots,x_n)$ и $h(x_1,\dots,x_n)\not\equiv 0$ — полиномы с рациональными коэффициентами, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *$rq-$функциями.* Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ – это пара $\mathbf{F}_{RQ}=(F_{RQ},O)$, где F_{RQ} – множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O – множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя: *перестановку переменных*; *переименования переменных (без отождествления)*; *отождествления переменных*; *введение фиктивной переменной*; *удаление фиктивной переменной*; *подстановку одной функции в другую.*

Следует отметить, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ}=(F_{RQ},O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$.

Теорема 1. *В ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ существуют только следующие конечные замкнутые классы:*

i) C, где C - произвольное конечное подмножество множества Q;

ii) $I_1=\{x\}, I_2=\{x;-x\}$;

iii) $C\cup I_1, \{\pm c_1,\cdots,\pm c_k\}\cup I_2$, где $\pm c_1,\cdots,\pm c_k\in Q$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.

Теорема 2. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$*

i) число всех конечных замкнутых классов равно c_0;

ii) число всех бесконечных замкнутых классов равно c;

iii) число всех замкнутых классов равно c.

А следующие две теоремы о базисах замкнутых классов в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$.

Теорема 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$*

i) существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;

ii) существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;

iii) существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

Пример 1. *Базисом замкнутого класса* $A = \{2x, 4x, 8x, ..., 2^n x, ...\}$ *является конечная система* $B = \{2x\}$.

Пример 2. *Базисом замкнутого класса* $A = \{x, 2x, 3x, ..., mx, ...\}$ *является бесконечная система* $B = \{x, 2x, 3x, 5x, ..., px, ...\}$, *где* p *– любое простое число.*

Пример 3. *Замкнутый класс* $A = [T]$, *где* $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, ...\}$ *не имеет базиса.*

Теорема 4. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_{RQ}$

i) число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно c_0;

ii) число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно c;

iii) число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно c.

И, наконец, рассмотрим некоторые конкретные конечные замкнутые классы в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$, которые играют ключевую роль при решении проблемы полноты, так как они являются предполными классами.

Пусть A – произвольное подмножество множества Q. Обозначим через $U(A)$ множество всех таких функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из F_{RQ}, что $f(c_1, c_2, ..., c_n) \in A$, если $c_1, c_2, ..., c_n \in A$. В этом случае $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *функцией, сохраняющей множество* A, а $U(A)$ – *классом, сохраняющим множество* A.

На интересующий нас вопрос – является ли предполным классом класс всех rq-функций, сохраняющих конечное множество констант, ответ дает следующая теорема.

Теорема 5. *Если* A *– произвольное конечное подмножество множества* Q, *то класс* $U(A)$ *является предполным классом в ф.с.* $\mathbf{F}_{RQ}$.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, профессору В. Б. Кудрявцеву за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

Список литературы

[1] Алексиадис Н. Ф., “О рациональных A-функциях с рациональными коэффициентами”, XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», 2021, 97–101.

[2] Алексиадис Н. Ф., “О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами”, Международная конференция «Мальцевские чтения», 2021, 143.

[3] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, Изд–во МГУ, Москва, 1982, 157 с.

[4] Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Изд–во Наука, Москва, 1986, 384 с.

[5] Бабин Д. Н., "О задаче полноты для автоматов", Интеллектуальные системы. Теория и приложения. Т. 23, вып. 4, 2020, 82-83.

[6] Часовских А. А., "Проблема полноты в классах линейных автоматов", Интеллектуальные системы. Теория и приложения. Т. 22, вып. 2, 2018, 151-154.

Closed classes in the functional system of rational functions with rational coefficients

Никос Филиппович Алексиадис

We study closed classes of the functional system of rational functions with rational coefficients that play the key role in deciding completeness.

Keywords: functional system, completeness, closed classes, rational function

References

[1] Aleksiadis N. Ph., "Rational A-functions with rational coefficients", Proc. 19th Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history", 2021, 97–101 (In Russian).

[2] Aleksiadis N. Ph., "The problem of completeness for rational functions with rational coefficients", Proc. Int. Conf. "Maltsev Readings", 2021, 143 (In Russian).

[3] Kudryavtsev V. B., *Functional systems*, MSU Publishers, Moscow, 1982 (In Russian), 157 pp.

[4] Yablonsky S. V., *Introduction to discrete mathematics*, Nauka Publishers, Moscow, 1986 (In Russian), 384 pp.

[5] Babin D. N., "On the completeness problem for automata", Proc. Intelligent systems. Theory and Applications. Vol. 23(4), 2020, 82–83 (In Russian).

[6] Chasskikh A. A., "The problem of completeness in classes of linear automata", Proc. Intelligent systems. Theory and Applications. Vol. 22(2), 2018, 151–154 (In Russian).