

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Международная Академия Технологических Наук
Российская Академия Естественных Наук

Интеллектуальные Системы.

Теория и приложения

ТОМ 25 ВЫПУСК 4 * 2021

МОСКВА

УДК 519.95; 007:159.955
ББК 32.81

ISSN 2411-4448

Издается с 1996 г.*

Главный редактор: д.ф.-м.н., профессор В. Б. Кудрявцев

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев (зам. главного редактора)
д.ф.-м.н., проф. Э. Э. Гасанов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин (ответственный секретарь)
д.ф.-м.н., проф. В. В. Александров, д.ф.-м.н., проф. С. В. Алешин, д.ф.-м.н., проф.
Д. Н. Бабин, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю. Л. Ершов, академик РАН, д.ф.-м.н.,
проф. Ю. И. Журавлев, д.ф.-м.н., проф. В. Н. Козлов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
проф. А. В. Михалев, к.ф.-м.н., проф. В. А. Носов, д.ф.-м.н., проф. А. С. Подколзин,
д.т.н., проф. Д. А. Поспелов, д.ф.-м.н., проф. Ю. П. Пытьев, академик РАН, д.т.н.,
проф. А. С. Сигов, д.ф.-м.н., проф. А. В. Чечкин

Международный научный совет журнала:

С. Н. Васильев (Россия), К. Вашик (Германия), В. В. Величенко (Россия),
Я. Деметрович (Венгрия), Г. Килибарда (Сербия), Ж. Кнап (Словения), П. С.
Краснощеков (Россия), А. Нозаки (Япония), В. Н. Редько (Украина), А. П. Рыжов
(Россия) —ученый секретарь совета, А. Саломаа (Финляндия), С. Саксида
(Словения), Б. Тальхайм (Германия), Ш. Ушчумлич (Сербия), Фан Дин Зиеу
(Вьетнам), А. Шайеб (Сирия), Р. Шчепанович (США), Г. Циммерман (Германия)

Секретарь редакции: И. О. Бергер, Е. В. Кузнецова

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН, Секции «Информатики и кибернетики» РАЕН.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

ООО «Два Облака»

Разработка корпоративных информационных систем

<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: mail@intsysjournal.org

*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2021.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции XII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» 9

Часть 1. Пленарные доклады

Айдагулов Р.Р., Главацкий С.Т., Михалев А.В. Методы осреднения в задачах кластеризации больших данных 12

Алешин С.В., Гасанов Э.Э., Козлов В.Н. О научной школе Валерия Борисовича Кудрявцева 19

Жук Д.Н. Сложность задачи удовлетворения ограничениям и её вариаций 28

Каплан А.Я. Интерфейсы мозг-искусственный интеллект: основания и перспективы 36

Кожухов И.Б., Михалев А.В. Об алгебраической теории автоматов 45

Часть 2. Математика и компьютерные науки

Александров Д.Е., Красненкова А.В. Практические оценки сложности регулярных выражений 53

Алексеев Д.В. Об уравнениях вирусной динамики COVID-19 58

Алексиадис Н.Ф. О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами 62

Балаба И.Н., Михалев А.В. Градуированные квазифробениусовы кольца и модули 66

Бирюкова В.А. Автоматный подход для оптимизации работы системы обучения нейронных сетей 71

Болотников А.И. Построение пучка гиперплоскостей по определённому множеству простых путей графа и его свойства 79

<i>Васильев Д.И.</i> Поиск ближайшего соседа на плоскости с помощью клеточного автомата с локаторами	83
<i>Ватузов А.М.</i> Вычисление функций Белого с использованием техники модулярных функций	88
<i>Виляев А.Л., Горшенин А.К.</i> О моделировании торговых стратегий для валютных пар с использованием глубоких нейронных сетей и метода скользящего разделения смесей	92
<i>Воротников А.С.</i> Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции	96
<i>Галатенко А.В., Носов В.А., Панкратьев А.Е., Староверов В.М.</i> Порождение правильных семейств функций	100
<i>Галатенко А.В., Панкратьев А.Е., Староверов В.М.</i> Эффективность проверки существования n -подквазигрупп	104
<i>Гасанов Э.Э., Пропажсин А.А.</i> Реализация баз данных типа “ключ-значение” клеточными автоматами с локаторами	108
<i>Демидова А.А.</i> Оценки времени установления автоматом свойств графа быть деревом и псевдодеревом	113
<i>Ефимов А.А.</i> Оценки мощности объёмных схем для класса частичных булевых операторов	117
<i>Ибрагимова А.Р., Горшенин А.К.</i> О глубоких гауссовских моделях в задачах машинного обучения	121
<i>Ищенко Р.А.</i> О разметках графов абелевых автоматов	125
<i>Комков С.А.</i> О темпах роста структур с конечным числом существенных ограничений	129
<i>Кочетова Н.П., Фролов А.Б.</i> Ускорение вычисления тестовой функции при оценке качества решающей функции NAGTA	133
<i>Крейнес Е.М.</i> Детские рисунки и их приложения	137
<i>Кузнецова Е.В.</i> Исследование пограничных случаев реализации клеточным автоматом двунаправленного движения на луче	141

<i>Кузовихина В.А.</i> Критерий безопасного объединения систем с моделью take-grant	145
<i>Курганов Е.А.</i> Алгоритм минимизации сложности аппаратной реализации сбалансированных S-блоков	149
<i>Лопунов М.А.</i> О проверяющих тестах относительно локальных перестановок входов схем	153
<i>Любич И.Г.</i> Улучшение верхней оценки функции Шеннона длины единичных диагностических тестов относительно инверсных неисправностей	157
<i>Любич И.Г., Романов Д.С.</i> О k-диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов	161
<i>Майсурадзе А.И.</i> Метод сопоставления компонентов двух объектов на основе обучения метрики и универсального описания предметной области	166
<i>Майсурадзе М.В.</i> Программная реализация алгоритмов работы с примитивными элементами в свободных неассоциативных алгебрах	170
<i>Михалев А.В., Ширшова Е.Е.</i> Интерполяционно упорядоченные алгебраические системы	176
<i>Музаффарова М.Ф.</i> Решение задачи назначения командира клеточными автоматами	181
<i>Пантелеев П.А., Калачев Г.В.</i> Об асимптотических хороших семействах классических и квантовых LDPC кодов	185
<i>Парфенов Д.В., Чешкова А.М.</i> Генерация тестовых матриц с заданным числом обусловленности	189
<i>Подколзин А.С.</i> Об алгоритмизации знаний	193
<i>Промыслов В.В.</i> Классификация регулярных графов трёхточечных множеств	205
<i>Ронжисн Д.В.</i> Об условиях полноты систем линейных автоматов над рациональными числами с добавками	209
<i>Хашаев А.А., Терехина И.Ю., Гамаюнов Д.Ю.</i> Поиск отклонений от типич-	

ных сценариев использования веб-приложений	213
<i>Чаплыгина С.С.</i> Построение 1,2-простых квазигрупп, изотопных заданным	217
<i>Часовских А.А.</i> Классы линейных автоматов над конечными полями с операциями суперпозиции	221
Часть 3. Интеллектуальный анализ больших данных	
<i>Адрианов Н.М., Черняховская Е.С.</i> Задача распределения полочного пространства с учетом вариантов положения товаров	226
<i>Липкович М.М., Миронов Д.В.</i> Применение алгоритма "Полоска" в задаче онлайн-обучения	230
<i>Каледин А.В.</i> Построение оптимальных зрн транспортной достижимости нескольких объектов	234
Часть 4. Обработка естественного языка	
<i>Большакова Е.И., Семак В.В.</i> Комбинирование методов для извлечения терминов из научно-технического текста	239
<i>Денисов И.В., Рожков И.С., Лукашевич Н.В.</i> NEREL: Набор данных на русском языке с вложенными именованными сущностями, отношениями и событиями	243
<i>Тихомиров М.М.</i> Разработка автоматизированной системы пополнения таксономии на текстах конкретной предметной области	250
Часть 5. Искусственные нейронные сети и машинный интеллект	
<i>Беллонин К.В., Шокуров А.В.</i> Простой метод улучшения качества тренировки разреженных моделей с нуля	256
<i>Половников В.С., Алексеев Д.В., Виноградов И.В.</i> О детектировании трещин в дорожном покрытии с использованием нейронной сети DAUNet	261
<i>Цзян Л.</i> Градиентная маска: как механизм латерального торможения улучшает работу искусственных нейронных сетей	267
<i>Шшиляков В.Г.</i> Об улучшениях нейросетевой архитектуры для приближения кусочно-линейных функций	271

Часть 6. Интеллектуальное управление, роботы и биомехатронные системы

Атамась Е.И., Герценштейн А.С. Генетические алгоритмы в задаче синтеза распределенных регуляторов 276

Гончаров О.И., Злобин Д.В., Мокроусов И.С. Образовательный проект по созданию прототипа мобильного робота для раздельного сбора мусора на базе Университетской гимназии МГУ 281

Злобин Д.В. Использование разреженной структуры матриц Якоби и Гессе для ускорения численного решения задач оптимального планирования траекторий 285

Мухамедов А.М. Использование алгоритма имитации отжига для оптимизации параметров идентификатора динамики платформы на основе дифференциальных нейронных сетей 289

Фомичев В.В., Роговский А.И. Приведение гипервыходных систем к форме с относительным порядком 293

Фурсов А.С., Мосолова Ю.М. Некоторые подходы к стабилизации переключаемых интервальных систем 297

Часть 7. Нейроморфный искусственный интеллект и когнитивные системы

Вартанов А.В., Суюнчева А.Р., Шевченко А.О. Механизмы внутреннего проговаривания и восприятия при разных типах внешней инициации 302

Сотсков В.П., Плоснин В.В., Поспелов Н.А., Анохин К.В. Динамика формирования когнитивных карт в гиппокампе мышей в новой обстановке ... 307

Ушаков В.Л., Пойда А.А., Козлов С.О., Орлов В.А., Шараев М.Г. Особенности построения функциональных коннектомов по данным фМРТ 310

Часть 8. Человеко-ориентированный искусственный интеллект и нейроинтерфейсные технологии

Зубов А., Исаева М., Бернадотт А. Нейросетевой классификатор ЭЭГ людей, перенесших и не перенесших COVID-19 318

Мазурин А., Бернадотт А. Критерий качества кластеризации на основе отбора признаков размеченной выборки с приложением в области разработки интерфейсов мозг-компьютер 322

Часть 9. Представление знаний и автоматизация рассуждений

Зайцев Д.В. Метарассуждения: логико-когнитивный подход 329

Оноприенко А.А. Семантика Крипке объединённой логики задач и высказываний 333

Родин А.В. Компьютерные доказательства и их понимание человеком: случай унивалентных оснований 337

Юкевич М., Шангин В.О. Представление знания в дискуссионной логике С.Яськовского
343

ХII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»

В Москве с 29 ноября по 3 декабря 2021 года в рамках проведения Года науки и технологий Российской Федерации проходила ХII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», приуроченная к 85-летию со дня рождения заведующего кафедрой математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ профессора Валерия Борисовича Кудрявцева.

Основные направления работы конференции:

1. Математика и компьютерные науки;
2. Интеллектуальный анализ больших данных;
3. Обработка естественного языка;
4. Искусственные нейронные сети и машинный интеллект;
5. Интеллектуальное управление, роботы и биомехатронные системы;
6. Нейроморфный искусственный интеллект и когнитивные системы;
7. Человеко-ориентированный искусственный интеллект и нейроинтерфейсные технологии;
8. Представление знаний и автоматизация рассуждений.

На открытии конференции выступили ректор МГУ имени М.В. Ломоносова, академик Виктор Антонович Садовничий, декан механико-математического факультета МГУ, член-корреспондент Андрей Игоревич Шафаревич, декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, академик Игорь Анатольевич Соколов, директор института перспективных исследований мозга МГУ, академик Константин Владимирович Анохин, директор по цифровизации ГК «Росатом» Екатерина Борисовна Солнцева, а в заключении прозвучало ответное слово профессора Валерия Борисовича Кудрявцева.

Конференция проходила в рамках реализации Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект» и была сосредоточена на освещении междисциплинарного характера исследований в области искусственного интеллекта. В ней приняли участие сотру-

ники 29 подразделений МГУ, в том числе: механико-математического факультета, института перспективных исследований мозга МГУ, факультета ВМК, биологического факультета, физического факультета, факультета космических исследований, филологического факультета, факультета психологии, экономического факультета, факультета фундаментальной физико-химической инженерии, юридического факультета, высшей школы управления и инноваций, научно-исследовательского вычислительного центра МГУ, СУНЦ, филиалов МГУ в Ташкенте и Баку. Кроме того, в конференции приняли участие представители 94 российских и 5 зарубежных научно-образовательных и исследовательских центров и организаций. Всего в работе конференции приняли участие около 400 человек, было сделано 23 пленарных и 135 секционных докладов.

Данный номер журнала содержит первую часть материалов конференции. Вторую часть материалов планируется опубликовать в следующем номере журнала.

Часть 1.
Пленарные доклады

Методы осреднения в задачах кластеризации больших данных

Р. Р. Айдагулов¹
С. Т. Главацкий²
А. В. Михалев³

У кластерного анализа очень широкий спектр применения, его методы используются в медицине, химии, археологии, маркетинге, геологии и других дисциплинах. Кластеризация состоит в объединении в группы схожих объектов, и эта задача является одной из фундаментальных в области интеллектуального анализа данных. Обычно под кластеризацией понимается разбиение заданного множества точек некоторого метрического пространства на подмножества таким образом, чтобы близкие точки попали в одну группу, а дальние – в разные. В данной работе предлагается метод локального осреднения для вычисления плотности распределения данных как точек в метрическом пространстве. Выбирая далее срезы множества точек по определенному уровню плотности, мы получаем разбиение на кластеры. Предложенный метод предлагает устойчивое разбиение на кластеры и свободен от ряда недостатков, присутствующих известным методам кластеризации.

Ключевые слова: кластер, алгоритм, плотность, метод осреднения.

¹*Айдагулов Рустем Римович* — старший научный сотрудник, Кафедра теоретической информатики, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119991, Россия, a_rust@bk.ru.

Aidagulov Rustem Rimovich — Senior Researcher, Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow Lomonosov State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991, Russia, a_rust@bk.ru.

²*Главацкий Сергей Тимофеевич* — доцент, Кафедра теоретической информатики, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119991, Россия, glavatsky_st@mail.ru.

Glavatsky Sergey Timoifeevich — Associate professor, Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow Lomonosov State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991, Russia, glavatsky_st@mail.ru.

³*Михалев Александр Васильевич* — заведующий кафедрой, Кафедра теоретической информатики, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119991, Россия, aamikhalev@mail.ru.

Mikhalev Alexandr Vasilyevich — Head of Department, Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow Lomonosov State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991, Russia, aamikhalev@mail.ru.

1. Постановка задачи

Согласно [1], кластеризация – это процесс аналитического рассмотрения заданного множества точек и дальнейшей группировки точек в кластеры согласно некоторой метрике. При этом предполагается, что точки, попадающие в один кластер, должны быть расположены недалеко друг от друга, а попадающие в разные кластеры – далеко. Подчас исследователи под кластеризацией набора точек понимают разбиение этого набора (совокупности) на подмножества таким образом, чтобы "близкие" точки попали в одну группу, а "дальние" – в разные. Несложно понять, что в буквальном понимании такое требование противоречиво.

Пример. В конфигурации точек, приведенной на рис. 1, естественно разделить множество точек на 2 кластера, проведя разделительную границу около точки D .

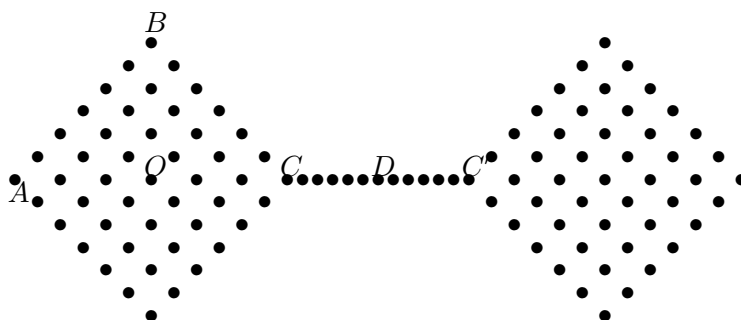


Рис.1

Аргументированной представляется группировка точек согласно плотности их распределения. Когда астрономы наблюдают дальние галактики в телескоп, они не видят отдельные звезды, и относят их к различным галактикам согласно распределению яркости (плотности).

Машинное обучение, машинное распознавание образов должны, прежде всего, оперировать качественными характеристиками. Взаимные расстояния, вообще говоря, не являются таковыми. Например, расстояние между точками C и A на рис. 1 больше расстояния между точками C и C' , однако более естественно поместить C и A в один кластер, а точку C' – в другой. При проверке текста на плагиат качественными характеристиками являются не только используемые наборы слов, но и смысл текста, который может передаваться употреблением совершенно иного множества терминов. В топологии качественными характеристиками являются группы гомотопий, гомологий и т.д., которые не меняются при гомотетиях. В геометрии качественными характеристиками являются такие характеристики, которые не меняются при гомотетиях, мало

изменяющих взаимные расстояния для близких точек. Такими характеристиками, в частности, являются реальная размерность распределения набора точек и распределение плотности набора точек. В качестве примера рассмотрим набор точек на кривой Веронезе:

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,d}) \in \mathbb{R}^d, \quad x_{i,j} = \phi_j(x_{i,1}), \quad \phi_j(t) = t^j, \quad t \in [0, 1].$$

Любые $n > d$ точек этой кривой не могут быть вложены в евклидово пространство размерности меньше d с сохранением взаимных расстояний. Пусть набор точек упорядочен: $x_{i,1} < x_{j,1} \Leftrightarrow i < j$. Существует гомотетия, отображающая точки x_i на прямую: $x_{1,1} + \sum_{j=1}^{i-1} \rho(x_j, x_{j+1})$. При этом сохраняются только расстояния между соседними точками. Однако если две точки были близки, то относительное изменение расстояний

$$\left| \frac{r(x_i, x_j)}{\rho(x_i, x_j)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \rho(x_i, x_j) < \delta, \quad (1)$$

мало. Поэтому распределение n точек на кривой Веронезе должно считаться не d -мерным распределением, а распределением, близким к одномерному.

Геометрические свойства, почти не меняющиеся при гомотетиях типа (1), являются (должны считаться) качественными. Основным требованием при разбиении совокупности точек на кластеры должно быть свойство качества, т.е., два распределения точек, соединяемые гомотетиями типа (1), должны разбиваться на кластеры почти одинаково.

Далее мы построим алгоритм кластеризации, базируясь на принципах плотностной связи между различными совокупностями точек. Отметим, что плотность в метрическом пространстве является основной качественной характеристикой.

2. Метод осреднения

Метод осреднения используется в решении задач широкого круга областей естествознания, связанных с изучением свойств неоднородных сред. Понятие нелинейного осреднения (называемого сейчас «осреднением по Колмогорову») было введено А.Н. Колмогоровым в [2]. Далее этот метод был развит в трудах его последователей в широком спектре приложений в механике, квантовой механике, экономике и др. (см. [3, 4]).

Введенное А.Н. Колмогоровым осреднение относится к глобальному типу, типа нахождения центра масс, определяющему среднее значение для совокупности точек. Однако глобальное осреднение полностью стирает информацию о локальном характере распределения точек. Поэтому мы далее будем использовать локальное осреднение, обладающее свойством качества.

Плотность распределения в точке x определяется локальным осреднением следующим образом. Пусть точка x_i включена в шар единичного объема с центром в точке x с вероятностью $P(x, x_i)$. Тогда среднее количество (математическое ожидание) точек, входящих в этот объем, равно $\sum_i P(x, x_i)$. Если $\int_y P(x, y) dy = 1$, то полученное среднее и есть плотность (среднее количество точек в шаре единичного объема с центром в точке x). Для определения областей сгущения плотности требуется именно такое локальное осреднение. При этом, если точки x_i, x_j близки, т.е., $\rho(x_i, x_j) < \delta$, то их вклад в осредненные величины

$$f(x) = \sum_i P(x, x_i) f(x_i).$$

почти одинаков: $\left| \frac{P(x, x_i) - P(x, x_j)}{P(x, x_i)} \right| < \varepsilon$.

Часто для определения локальных значений параметров используют осреднение $P(x, x_i) = P(x, x_j)$ (см. [5]), когда точки из радиуса осреднения берутся с одинаковым весом. Такое осреднение приводит к различным затруднениям. Малое шевеление точек около границы осреднения может заметно влиять на результат работы известных алгоритмов, базирующихся на плотности распределения точек (например, DBSCAN). В итоге такие алгоритмы могут как ложно разъединять кластер, так и ложно сливать в один несколько различных кластеров.

Мы используем осреднение Гауссового типа

$$P(x, x_i) = \exp(-\pi(\frac{\rho(x, x_i)}{R})^2),$$

учитывая, что оно инвариантно относительно поворотов (отображений, не меняющих взаимные расстояния) и суммарная вероятность вхождения точки x_i в пространство равна 1:

$$\int \exp(-\pi((x - x_i) \cdot (x - x_i)) dV = 1,$$

и не зависит от размерности пространства.

Радиус осреднения для N точек в d -мерном пространстве следует выбирать так, чтобы, с одной стороны, среднее количество точек n в одном шаре такого радиуса было намного больше, чем $(\ln N)^d$ (здесь d – реальная размерность, определяемая ниже), а, с другой стороны, – намного меньше, чем N^ε . Это свойство выполняется для часто встречающейся функции:

$$n = L(N) = \exp(\sqrt{\ln N \ln \ln N}).$$

Метод осреднения заключается в осреднении множества точек с функцией плотности распределения

$$\sum_i \delta(x - x_i).$$

Выбирая далее срезы множества точек по определенному уровню плотности, мы получим разбиение на кластеры. Этот метод свободен от таких недостатков, как зависимость от нумерации точек, и как существенное изменение разбиения на кластеры при малом изменении позиции даже одной точки.

3. Размерность пространства, осреднение и плотность

Размерность пространства является локальной топологической характеристикой. Для наших целей удобнее использовать размерность, аналогичную размерности по Хаусдорфу, которая определяется как степень d роста величины $O(\varepsilon^{-d})$ минимального количества шаров радиуса ε , необходимого для покрытия нашего множества точек, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как у нас конечное число точек n , то при любом ε необходимое количество шаров не превосходит n . Тем не менее, нужную размерность можно определить через тангенс угла наклона в линейной аппроксимации логарифма от количества точек в зависимости от (при увеличении) логарифма радиуса. Для этого упорядочим $n(n-1)/2$ ненулевых расстояний между n точками по возрастанию:

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{n(n-1)/2}. \quad (2)$$

На расстоянии не более r_i от некоторой точки в среднем находится $2i/n$ точек, без учета самой точки. Пусть $y_i = \log(2i/n)$, $x_i = \log(r_i)$. Находим наилучшее приближение (аппроксимацию) $y_i = dx_i + c$ или $x_i = \frac{y_i - c}{d}$. На значение d не влияет ни основание \log , ни постоянный коэффициент $\log(2/n)$ (уходит в определение величины c). Для уменьшения влияния больших расстояний (возможных между разными малыми кластерами) в вычислении корреляции оставим только определенную часть m значений ($1 \leq m \leq n$) – только тех, где $r_i < s(R) \sim R$, ($s = 2R$), $1 \leq i \leq m$. Вычисляя наилучшую линейную аппроксимацию, получим реальную размерность d и коэффициент пропорциональности $\exp(c)$. Размерность пространства d выражается формулой:

$$d = \frac{\sum_i (\log i)^2 - \frac{1}{m} (\sum_i \log i)^2}{\sum_i \log(r_i) \log i - \frac{1}{m} (\sum_i \log i) (\sum_i \log(r_i))}. \quad (3)$$

Здесь m – длина суммирования (в сумме участвуют только первые m членов из $\{r_i\}$). Радиус суммирования s должен быть больше радиуса осреднения R , но не больше величины, при которой весом $f(\frac{s}{R}) = \exp(-4\pi) \ll 1$, ($s = 2R$) можно пренебречь. Ограничиваясь рассмотрением только точек, отстоящих на расстоянии менее s , где среднее коли-

чество точек $n = \frac{2m}{N} \sim \exp(\sqrt{\ln N})$ не мало (больше $(\ln N)^d$), мы добиваемся уменьшения количества операций, практически не теряя статистической значимости, в вычислениях локальной плотности

$$\rho(x) = \sum_{i, r(x, x_i) < s} P(x, \frac{r(x, x_i)}{R}). \quad (4)$$

При этом локальные размерности (3) и локальные радиусы осреднения, соответствующие количеству $\frac{n}{2^d}$ точек в шаре, могут различаться для разных кластеров. Выбирая вначале малое значение s и увеличивая это значение примерно в 2 раза в следующей итерации до тех пор, пока не будет выполнено условие оценки среднего количества точек $n \sim \exp(\sqrt{\ln N})$, получаем, что количество операций как в упорядочении (2), так и при вычислении плотности можно уменьшить до $O(N^{1+\varepsilon})$.

Далее нам нужно только осуществить сравнение плотности в разных точках как отношение вычисленных сумм.

Список литературы

- [1] Ю. Лесковец, А. Раджараман, Дж. Ульман. Анализ больших данных. М.: ДМК, 2016.
- [2] Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 136-137.
- [3] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
- [4] Маслов В.П. О способе осреднения для большого числа кластеров. Фазовые переходы. // Теоретическая и математическая физика. – 2000, т. 125, № 2, с. 297–314.
- [5] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

Averaging Methods in Big Data Clustering Problems Aidagulov R.R., Glavatsky S.T., Mikhalev A.V.

Cluster analysis has a very wide range of applications; its methods are used in medicine, chemistry, archeology, marketing, geology and other disciplines. Clustering consists of grouping similar objects together, and this task is one of the fundamental tasks in the field of data mining. Usually, clustering is understood as a partition of a given set of points of a certain metric space into subsets in such a way that close points fall into one group, and distant points fall into different ones. In this paper, we offer a local averaging method for calculating the distribution density of data as points in a metric space. Choosing further sections of the set of points at a certain level of density, we get a partition into clusters. The proposed method offers a stable partitioning

into clusters and is free from a number of disadvantages inherent in known clustering methods.

Keywords: cluster, algorithm, density, averaging method.

References

- [1] Leskovec J., Rajaraman A., Ullman J.D., *Mining of massive datasets.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2018, 534 pp.
- [2] Kolmogorov A.N., *Izbrannye trudy. Matematika i mekhanika.*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian)
- [3] Bahvalov N.S., Panasenko G.P., *Osrednenie processov v periodicheskikh sredah. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozicionnyh materialov*, Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1984 (In Russian), 352 pp.
- [4] Maslov V.P., “O sposobe osredneniya dlya bol’shogo chisla klasterov. Fazovye perekhody”, *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, **125**:2 (2000), 297–314 (In Russian)
- [5] Nigmatulin R.I., *Osnovy mekhaniki geterogennyh sred*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russian), 336 pp.

О научной школе Валерия Борисовича Кудрявцева

С. В. Алешин¹, Э. Э. Гасанов², В. Н. Козлов³

В данной работе рассказывается о научной школе профессора Валерия Борисовича Кудрявцева и созданной им кафедре математической теории интеллектуальных систем.

Ключевые слова: Теория автоматов, теория интеллектуальных систем, распознавание образов.

4 июля 2021 г. исполнилось 85 лет доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова Валерию Борисовичу Кудрявцеву, создателю крупной научной школы в области дискретной математики, кибернетики и информатики.

В далекие 50-е годы по окончании средней школы В. Б. Кудрявцев поступил в Московский государственный университет, строительство нового комплекса зданий которого на Воробьевых горах тогда только что было завершено. Это было удивительное для науки время. Ученые, в первую очередь физики и математики, были подняты на пьедестал общественного внимания, воспринимались современными магами, волшебниками. В целом образ науки — огромной, величественной — предстает, можно считать, в облике здания МГУ.

Валерия Борисовича увлекло новое направление в науке — кибернетика, и математические задачи, с нею связанные. Эта наука представлялась как дающая ключ к пониманию процессов управления в совершенно разнородных областях, таких, как технические устройства, алгоритмы работы мозга, процессы управления в обществе, и т.д. Кибернетика

¹Алешин Станислав Владимирович — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

²Гасанов Эльяр Эльдарович — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru.

Gasanov Elyar Eldarovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

³Козлов Вадим Никитович — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vnkozlov@mail.ru.

Kozlov Vadim Nikitovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

завораживала, с одной стороны, своей всеобщностью (сравнимой с философией), с другой — опорой на точные методы, на доказательность в своих построениях.

Научные интересы С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова, учителей В.Б. Кудрявцева, в то время были сосредоточены на создании основ кибернетики: ее понятий, разделов, задачах, связях с другими науками. Одним из таких направлений кибернетики, активно разрабатываемых С.В. Яблонским, стали функциональные системы, то есть алгебры дискретных функций с операциями суперпозиции и их обобщениями. В этом направлении начал вести исследования и В.Б. Кудрявцев. Одним из важных результатов этого периода стало переработанное изложение знаменитой теоремы Поста об описании всех подалгебр двузначной логики, изданное в 1966 г. в виде монографии С.В. Яблонского, Г.П. Гаврилова и В.Б. Кудрявцева «Функции алгебры логики и классы Поста» [1]. Одновременно В.Б. Кудрявцев начал изучать преобразователи информации, обладающие в отличие от дискретных функций «памятью», то есть объекты, реакция которых на входные воздействия происходит с временной задержкой. Сейчас эти объекты являются базовыми в дискретной математике, кибернетике и информатике и называются конечными автоматами, или для краткости — автоматами. Это очень общее понятие, и оно может рассматриваться как модель для любых реальных явлений, в которых присутствуют входно-выходные соответствия. Обучаясь на механико-математическом факультете МГУ (в аспирантуре), В.Б. Кудрявцев решил проблему полноты для автоматов, называемых функциями с задержками, с операциями синхронной суперпозиции, что явилось первым из важных результатов по проблематике полноты для автоматов и показало существенное отличие автоматов с памятью от случая автоматов без памяти. Им же был изучен общий случай конечных автоматов с операциями суперпозиции и обратной связи, для которого было установлено наличие континуума предполных классов как критерияльной системы для проверки полноты для автоматов, что дало представление о сложности и неэффективности решения задачи о полноте для автоматов как средствами алгебры, так и средствами логики. Эти результаты составили содержание кандидатской диссертации В.Б. Кудрявцева, выполненной под руководством О.Б. Лупанова и защищенной в ИПМ АН СССР в 1963.

После аспирантуры механико-математического факультета В.Б. Кудрявцев был оставлен на кафедре математической логики в должности ассистента, затем стал доцентом, и, в последующие годы, профессором механико-математического факультета. В эти годы он активно занимается учебной, научной и организационной работой, и, что очень важно, открывает научно-исследовательский семинар по

теории автоматов, который стал научно-организационным центром этого нового научного направления. Со временем вокруг этого ядра возникла крупная научная школа, организатором и руководителем которой он является с тех пор и поныне.

Эта работа нашла свое сопряжение с созданием на факультете в 1986 г. по инициативе В. А. Садовниченко Отдела прикладных исследований по математике и механике, который и возглавил В. А. Садовничий. Отдел состоял из трёх лабораторий, и его тематика определялась проблемами космоса. В. Б. Кудрявцев стал руководителем отраслевой лаборатории № 1, которая начала работать над созданием интеллектуальных систем промышленного назначения в интересах обороны и народного хозяйства страны. Накопленный опыт исследований по теории автоматов стал естественным базисом для создания интеллектуальных систем в приложениях. В лабораторию вместе с исследователями пришла работать талантливая молодежь. Костяк коллектива составили ученики В. Б. Кудрявцева. Тематика работ постоянно расширялась, появились новые заказы промышленности. Необходимо было расширять как тематику исследований, так и увеличивать штат лаборатории. Кроме того, остро возник вопрос подготовки кадров высшей квалификации по теории интеллектуальных систем. Отчасти такая подготовка присутствовала на кафедрах математической кибернетики факультета ВМиК и кафедре дискретной математики механико-математического факультета, но именно отчасти. Нужна была специализированная кафедра. Весь этот комплекс проблем привел к созданию в декабре 1991 г. на механико-математическом факультете МГУ новой кафедры Математической теории интеллектуальных систем (МаТИС). Заведующим кафедрой МаТИС стал профессор В. Б. Кудрявцев, оставаясь при этом руководителем лаборатории № 1, которая была преобразована в лабораторию проблем теоретической кибернетики. Переход от автоматов к интеллектуальным системам был, можно считать, подготовлен проблематикой пионеров кибернетики еще при её становлении. В последующем на факультете ВМК возникла кафедра «Математических методов прогнозирования», руководимая Ю. И. Журавлевым и с тематикой, в немалой мере связанной с распознаванием образов. А сравнительно недавно кафедра МаТИС приросла новой лабораторией, заведует которой Г. В. Боков, специализирующийся на логических исчислениях.

Одним из главных вопросов, поставленных классиками кибернетики при ее возникновении, был вопрос о том, как функционирует наш мозг, самая совершенная интеллектуальная система, созданная природой. В. Б. Кудрявцев, будучи математиком и по складу своего мышления и по образованию, проводил исследования на уровне математической строгости и точности в рассуждениях. Автомат является объектом, кото-

рый реализует триаду «воспринимаю—думаю—действую» и через влияние на среду итеративно повторяет эту триаду, определяя свое поведение в среде. Но даже такая простая с содержательной точки зрения модель потребовала для исследования многих лет квалифицированного труда разных групп исследователей. И только к середине 80-х годов XX века появились существенные математические результаты, изложенные в монографии В. Б. Кудрявцева и его учеников С. В. Алешина и А. С. Подколзина «Введение в теорию автоматов» [2] (содержащей в основном результаты научной школы В. Б. Кудрявцева). С. В. Алешин известен не только в теории автоматов, но и успешен в распознавании образов. В теории автоматов работает и ученик С. В. Алешина — С. Б. Родин. Исследования на кафедре распространились в последующем и на такие системы, которые больше соответствуют слову «интеллектуальные» в широком и общепринятом понимании. Подтверждение этому — труды А. С. Подколзина, который развил теорию компьютерных решателей задач. Весьма существенные результаты по теории автоматов были получены В. А. Бувичем.

В дополнение к этим результатам, уже в 2000-е годы, при участии В. Б. Кудрявцева как консультанта выполнено важное исследование Д. Н. Бабина, нашедшего конструктивную границу отделения семейств базисов автоматов с разрешимой проблемой полноты от неразрешимых семейств.

Недавним существенным вкладом в теорию автоматов стала докторская диссертация А. А. Часовских по теории линейных автоматов.

Рассмотрение функциональных систем автоматов было распространено В. Б. Кудрявцевым на клеточные автоматы, для которых вместе с учениками А. С. Подколзиным, А. А. Болотовым и другими он изучал их поведение и моделирующие возможности для параллельных вычислений [3]. Поведение автоматов в лабиринтах — тематика Н. Ю. Волкова.

В распознавании образов В. Б. Кудрявцев развил новое направление — теорию тестового распознавания. Эти результаты содержатся в монографии В. Б. Кудрявцева, А. Е. Андреева, Э. Э. Гасанова «Теория тестового распознавания» [4]. Свой интересный вклад в теорию тестового распознавания сделал М. В. Носов. В исследованиях И. Л. Мазуренко автоматный подход использован для распознавания речи.

Другим направлением в теории распознавания образов, развитие которого курирует В. Б. Кудрявцев, явилось распознавание зрительных образов, в котором активно работает его ученик В. Н. Козлов. Это направление возникло из контактов с кафедрой физиологии высшей нервной деятельности биологического факультета, из этих же контактов происходит монография В. Б. Кудрявцева и В. Н. Козлова «Введение в математическую биологию» [5].

Разнообразные по направленности работы, включающие распознавание образов и математическое моделирование в биологии, представляет на кафедре Д. В. Алексеев. Ю. Г. Чернова построила математическую модель легочной системы человека. Л. Минчичем предложена модель восстановления двумерного изображения по его одномерным проекциям в условиях «зашумления». Нейронные сети — область интересов В. С. Половникова.

Совместно с Э. Э. Гасановым В. Б. Кудрявцевым построена теория хранения и поиска информации, обобщающая известные подходы и позволившая с единых позиций рассмотреть и решить базовые проблемы для баз данных. Построенная теория покрывает все частные находки для конкретных баз данных и дает алгоритмы и новые технологии синтеза баз данных нового типа, которые эффективнее известных. Эти результаты изложены в монографии Э. Э. Гасанова и В. Б. Кудрявцева «Теория хранения и поиска информации» [6]. Развитие данной теории продолжили ученики Э. Э. Гасанова — Ю. С. Шуткин и В. В. Осокин.

Интересные исследования в области нечеткой математики и ее приложений проведены А. П. Рыжовым.

Существенен вклад В. Б. Кудрявцева в теорию сложности управляющих систем. Здесь в первую очередь надо отметить выдающиеся результаты ученика Валерия Борисовича А. Е. Андреева. Интересные результаты по синтезу плоских схем получил Г. В. Калачев.

В. Б. Кудрявцев вместе со своими учениками А. С. Строгаловым, П. А. Алисейчиком и другими разработал новые адаптивные модели компьютерных обучающих систем, имитирующих взаимодействие учителя, ученика и обучающей базы данных, что привело к построению конкретных таких систем по языкам, информатике, искусству и др. Эти результаты опубликованы в виде монографии К. Вашика, В. Б. Кудрявцева, А. С. Строгалова «Проект IDEА» [7].

Тематика, связанная с криптографией, зримо представлена на кафедре интересными работами В. А. Носова, А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьева. Тематика помехозащищенных кодов — область успешной деятельности П. А. Пантелеева. В теории кодирования активно работает П. С. Дергач.

Двузначные и многозначные функции логики — важная область исследований, и в ней существенные результаты были получены Д. Н. Жуком. А. А. Ирматов провел значительные исследования по оценке числа пороговых функций 2-значной и k -значной логики. В области пороговых функций лежат научные интересы А. П. Соколова. Постоянен в связях с кафедрой специалист в логике Г. И. Сыркин.

В начале 70-х годов В. Б. Кудрявцев был приглашен в ГДР в университет Ростока как гость-профессор для развития нового направления — кибернетики. В это время им была создана там одна из значимых

групп в области кибернетики. Участники этой группы под руководством В. Б. Кудрявцева со временем подготовили и защитили 6 докторских диссертаций по кибернетике. Позже они стали известными специалистами и заняли высокие позиции в университетах и научных центрах Германии. Среди них Д. Лау, Б. Тальхайм, Ю. Дассов и др. Есть ученики В. Б. Кудрявцева в Венгрии — Я. Деметрович, в бывшей Югославии — Г. Килибарда, Р. Шчепанович и Ш. Ушчумлич, и — ныне в Японии — Г. Погосян и В. Лашхиа.

Более 10 лет назад В. Б. Кудрявцев стал руководителем Филиала МГУ в Ташкенте. Учебный процесс там в части математики обеспечивает кафедра МаТИС. Ныне Филиалом руководит А. С. Строгалов, ученик Валерия Борисовича.

Нельзя не отметить, что весьма существенную роль в жизни кафедры и в целом научной школы играет журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения», основанный В. Б. Кудрявцевым.

В целом кафедра всегда придерживалась трех принципиальных подходов в своей работе. Первое: внимание к научной работе, кафедра должна «продуцировать» качественный научный материал. Второе: образовательный аспект, причем не только в целом в отношении студентов, но и в части внимания и подготовки потенциальных кадров для работы на кафедре. Третье: внимание к прикладным исследованиям (контракты, договора), дающим возможность не только результаты теоретических исследований «внедрить» в жизнь, но и, что существенно, поддержать материально членов кафедры, что, учитывая, например, наши 90-е годы, имело кардинальное значение. Так сотрудничество с американской фирмой LSI Logic принесло более 300 патентов. Ныне кафедра заметно сотрудничает с компанией Huawei из КНР, с некоторыми отечественными организациями.

Понимая, что молодежи нужны не только точные научные ориентиры, но и нравственные точки отсчета, В. Б. Кудрявцев в 1992 г. организовал на механико-математическом факультете необычный семинар, аналога которому, по-видимому, и не было. Это «Открытый семинар по науке и культуре». В большой аудитории механико-математического факультета собираются до ста и более человек, чтобы в академической атмосфере выслушать доклады и принять участие в обмене мнениями по широкому спектру вопросов науки, культуры и общественной жизни. Высокий авторитет руководителя семинара, механико-математического факультета и в целом МГУ обеспечивает возможность приглашать в качестве докладчиков известных деятелей культуры и науки. Большой профессиональный интерес вызвали доклады академиков А. А. Логунова, А. А. Самарского, Ю. Л. Ершова, О. Т. Богомолова, В. Л. Макарова, Н. Н. Моисеева, А. Ю. Ишлинского, Б. А. Рыбакова, А. Г. Чучалина,

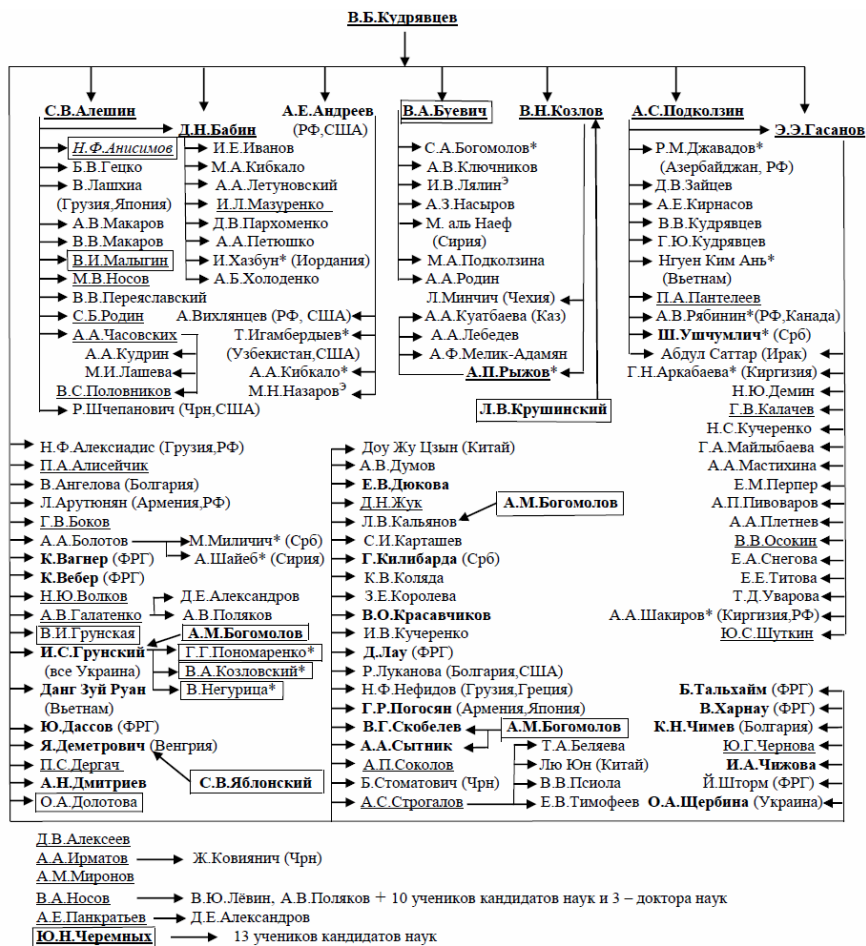


Рис. 1. Граф научной школы В. Б. Кудрявцева.

С. П. Курдюмова и др., выступавших по фундаментальным проблемам науки и техники, связанными с теорией элементарных частиц, энергетики, управления, экономики, организации общества, медицины и т.п. Они оставили неизгладимое впечатление у слушателей.

Яркими были выступления писателей В. Г. Распутина, В. И. Белова, В. С. Розова, В. В. Карпова, В. В. Кожина, Ю. П. Власова, А. И. Казинцева, режиссеров Н. Н. Губенко, Ю. М. Соломина, С. С. Говорухина, Н. П. Бурляева, актрисы Ж. А. Болотовой, балерины Е. С. Максимовой, руководителя «Кремлевского балета» А. Б. Петрова, художника И. С. Глазунова, скульптора В. М. Клыкова, представителей духовенства митрополитов Кирилла (ныне патриарха) и Питирима, шахматиста М. М. Ботвинника и др., которые рассказывали о своей деятельности и о состоянии представляемой ими области.

Большой интерес вызвали также выступления общественных деятелей А. А. Зиновьева, С. Г. Кара-Мурзы, А. Н. Крутова, Н. С. Леонова, Н. Г. Ивашова и др.

В Валерии Борисовиче Кудрявцеве уникально сочетаются крупный ученый, великолепный организатор и администратор, требовательный и всегда готовый помочь научный руководитель, чуткий и внимательный к окружающим человек. По отдельности эти качества — не редкость, вместе — очень и очень нечастое явление.

За свою научную, преподавательскую и организационную деятельность В. Б. Кудрявцев отмечен заслуженным признанием со стороны научного и преподавательского сообщества. Он является заслуженным деятелем науки Российской Федерации, заслуженным профессором МГУ, почетным доктором Белградского университета, действительным членом РАЕН и МАТН, членом ряда других научных организаций как в России, так и за рубежом. Он автор свыше 200 научных статей, 12 монографий и учебников, свыше 60 его учеников защитили кандидатские и 26 — докторские работы. Среди них более двадцати зарубежных учеников из США, Канады, Германии, Венгрии, Сербии.

История Московского университета длится со времен императрицы Елизаветы, дочери Петра Великого, именно она подписала указ об образовании первого в России университета. В этой истории много славных страниц. Но в первую очередь это история людей Московского университета, история их свершений. Имя Валерия Борисовича Кудрявцева, имена ученых созданной его трудами научной школы несомненно достойным образом вплетаются в историю нашей альма матер.

На рисунке 1 приведен граф научной школы В. Б. Кудрявцева.

Список литературы

- [1] С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, *Функции алгебры логики и классы Поста*, Изд-во «Наука», Москва, 1966, 90 с.
- [2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алёшин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, 2-е издание, Издательство Московского университета, Москва, 2019, 436 с.
- [3] В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов, *Основы теории однородных структур*, Изд-во «Наука», Москва, 1990, 296 с.
- [4] В. Б. Кудрявцев, А. Е. Андреев, Э. Э. Гасанов, *Теория тестового распознавания*, Изд-во ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2007, 320 с.
- [5] В. Б. Кудрявцев, В. Н. Козлов, *Введение в математическую биологию*, Изд-во «МАКС пресс», Москва, 2017, 76 с.
- [6] Э. Э. Гасанов, В. Б. Кудрявцев, *Теория хранения и поиска информации*, Изд-во ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2002, 288 с.
- [7] К. Вашик, В. Б. Кудрявцев, А. С. Строгалов, *Проект "IDEA". Введение в новое поколение программного обеспечения типа ICBI для передачи знаний и навыков с помощью экспертной системы*, Link&Link Software GmbH, Dortmund, Germany, 1994, 40 с.

About the scientific school of Valery Borisovich Kudryavtsev S.V.Aleshin, E.E.Gasanov, V.N.Kozlov

This paper tells about the scientific school of Professor Valery Borisovich Kudryavtsev and the department of the mathematical theory of intelligent systems created by him.

Keywords: Automata theory, theory of intelligent systems, pattern recognition.

References

- [1] S. W. Jablonsky, G. P. Gawrilow, V. B. Kudryavtsev, *Boolsche Funktionen und Postsche Klassen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1968, 85 pp.
- [2] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Introduction to automata theory*, MSU Press, Moscow, 2019 (In Russian), 436 pp.
- [3] V. B. Kudryavtsev, A. S. Podkolzin, A. A. Bolotov, *Fundamentals of the theory of homogeneous structures*, Nauka, Moscow, 1990 (In Russian), 296 pp.
- [4] V. B. Kudryavtsev, A. E. Andreev, E. E. Gasanov, *Test recognition theory*, FIZMATLIT, Moscow, 2007 (In Russian), 320 pp.
- [5] V. B. Kudryavtsev, V. N. Kozlov, *Introduction to Mathematical Biology*, MAKS press, Moscow, 2017 (In Russian), 76 pp.
- [6] E. E. Gasanov, V. B. Kudryavtsev, *Information storage and retrieval theory*, FIZMATLIT, Moscow, 2002 (In Russian), 288 pp.
- [7] K. Vashik, V. B. Kudryavtsev, A. S. Strogalov, *Project "IDEA". Introduction to a new generation of ICBI-type software for transferring knowledge and skills using an expert system*, Link&Link Software GmbH, Dortmund, Germany, 1994 (In Russian), 40 pp.

Сложность задачи удовлетворения ограничениям и её вариаций

Д. Н. Жук¹

Многие задачи, такие как раскраска графа или решение систем линейных уравнений, могут быть представлены как задачи удовлетворения ограничениям для какого-то языка допустимых ограничений. При этом некоторые из этих задач решаются за полиномиальное время, а некоторые являются NP-полными. В 2017 году сложность задачи удовлетворения ограничениям была описана для любого языка ограничений, но осталось много вариаций этой задачи, для которых сложность по-прежнему неизвестна. Например, можно разрешить кроме квантора существования использовать квантор всеобщности или потребовать, чтобы найденное решение было сюръективным или сбалансированным. Также можно потребовать, чтобы входные данные удовлетворяли какому-то наперед заданному условию, как если нам надо покрасить граф в 100 цветов, если известно, что его можно покрасить в 3 цвета. В работе мы обсудим как обычную задачу удовлетворения ограничениям, так и сложность этих и некоторых других вариаций и обобщений этой задачи. **Ключевые слова:** Задача удовлетворения ограничениям, вычислительная сложность, кванторная задача удовлетворения ограничениям.

1. Задача удовлетворения ограничениям

Задача удовлетворения ограничениям, по англ. Constraint Satisfaction Problem (CSP), это массовая проблема, где на вход подаётся набор ограничений и нужно проверить можно ли переменным сопоставить значения так, чтобы все ограничения выполнялись. В общем случае (на конечном множестве) задача является NP-полной, но если ограничить множество допустимых ограничений, например, линейными уравнениями, то задача решается за полиномиальное время. Через $CSP(\Gamma)$ мы обозначим задачу удовлетворения ограничения со множеством допустимых ограничений Γ , которую можно сформулировать так. На вход подаётся формула вида $R_1(\dots) \wedge \dots \wedge R_s(\dots)$, где каждое R_i — предикат из множества Γ , а за (\dots) скрывается произвольный набор переменных; надо проверить выполняема ли формула. Ещё в 1993 [12] в работе Федера и Варди была

¹Жук Дмитрий Николаевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zhuk@intsys.msu.ru.

Zhuk Dmitriy Nikolaevich — Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

высказана гипотеза, что для любого языка допустимых ограничений задача либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной, и долгое время именно эта проблема была основной в этой области. В 2017 году эта гипотеза была доказана независимо Андреем Булатовым и Дмитрием Жуком, при этом классификация языков ограничений по сложности оказалась совсем простой и может быть сформулирована в терминах функций, сохраняющих предикат.

Функцию f будем называть слабой функцией почти-единогласия, если она удовлетворяет следующим тождествам

$$f(y, x, \dots, x) = f(x, y, x, \dots, x) = \dots = f(x, x, \dots, x, y).$$

В качестве примера слабой функции единогласия можно рассмотреть любую константу, $x \vee y$, $x + y + z$, $xy \vee yz \vee xz$, $\min(x, y)$ и т.д.

Теорема 1. [6, 7, 16, 15] Пусть Γ — конечное множество предикатов на конечном множестве A . Тогда CSP(Γ) решается за полиномиальное время, если найдется слабая функция почти-единогласия, которая сохраняет каждый предикат из Γ ; CSP(Γ) является NP-полной в остальных случаях.

2. Дополнительное глобальное ограничение

Одной из вариацией обычной задачи удовлетворения ограничениям может быть добавление глобального ограничения. Например, мы можем потребовать, чтобы решение было сюръективным (содержало каждый элемент множества A) [1] или сбалансированным (каждый элемент встречался бы одинаковое количество раз) [11].

Проблема 1 Какова сложность CSP($x + y \neq 2$) на множестве $\{0, 1, 2\}$, если требуется найти сюръективное решение?

Проблема 2 Какова сложность CSP($x \leq y$) на $\{0, 1\}$, если требуется найти сбалансированное решение?

Нетрудно найти тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ для каждой из них, но как проверить, что есть сюръективное или сбалансированное решение. Удивительно, но каждая из этих двух задач является NP-трудной [1, 11], то есть дополнительное ограничение делает тривиальную задачу сложной. При этом сложность этих задач в общем случае остается открытой проблемой [17].

Проблема 3 Какова сложность CSP(Γ) для произвольного языка ограничений Γ , если нам нужно найти сюръективное решение?

Проблема 4 Какова сложность CSP(Γ) для произвольного языка ограничений Γ , если нам нужно найти сбалансированное решение?

Рассмотрим другой пример на множестве $\{0, 1\}$. Мы знаем, что система линейных уравнений в поле \mathbb{Z}_2 решается за полиномиальное время. А что если мы добавим глобальное ограничение, что сумма всех переменных равна k . Оказывается, что в этом случае задача становится NP-трудной [11]. Но, например, сложность следующей задачи до сих пор неизвестна [4].

Проблема 5 *Какова сложность решения системы линейных уравнений по модулю 2 в $\{0, 1\}$ с одним дополнительным уравнением по модулю 24?*

3. Кванторная задача удовлетворения ограничениям

Обычная задача удовлетворения ограничениям может быть сформулирована как проверка истинности утверждения, где по всем переменным добавлены кванторы существования. Если разрешить использовать дополнительно квантор всеобщности, то получится кванторная задача удовлетворения ограничениям (по англ. Quantified CSP) [3, 9, 10, 14]. Для произвольного множества предикатов Γ через $\text{QCSP}(\Gamma)$ обозначим задачу, в которой на вход поступает утверждение вида

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n R_1(\dots) \wedge \dots \wedge R_s(\dots),$$

где все предикаты R_i из Γ ; надо проверить верно ли утверждение. Известны следующие факты:

- Если Γ состоит из линейных уравнений в поле, то задача $\text{QCSP}(\Gamma)$ решается за полиномиальное время [3].
- Если Γ состоит из всех предикатов, то задача $\text{QCSP}(\Gamma)$ является PSPACE-полной [3].
- Существуют языки Γ , для которых задача $\text{QCSP}(\Gamma)$ является NP-полной, coNP-полной, DP-полной, и Θ_2^P -полной [18].
- Для любого Γ на трехэлементном множестве, содержащем все предикаты вида $x = a$, задача $\text{QCSP}(\Gamma)$ либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной, либо coNP-полной, либо PSPACE-полной [18].

Таким образом остаётся очень много открытых вопросов:

Проблема 6 *Какие классы сложности могут быть выражены как $\text{QCSP}(\Gamma)$ для какого-то Γ ?*

Проблема 7 Какова сложность задачи $QCSP(\Gamma)$ для произвольного Γ на трехэлементном множестве?

Проблема 8 Для каких Γ задача $QCSP(\Gamma)$ решается за полиномиальное время?

4. Задача удовлетворения ограничениям с обещаниями

Естественным обобщением задачи удовлетворения ограничениям является задача удовлетворения ограничениям с обещаниями (по англ. Promise CSP) [5, 8]. Здесь есть две версии каждого предиката — сильная и слабая — и нам даётся обещание, что либо сильная версия выполняется, либо даже слабая не выполняется. В качестве примера рассмотрим язык ограничений на множестве $\{0, 1\}$ состоящий из одной пары предикатов $(1IN3, NAE)$, где сильный предикат $1IN3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ и слабый предикат $NAE = \{0, 1\}^3 \setminus \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. В этом случае на вход подается две формулы, которые отличаются только заменой $1IN3$ на NAE . Например это могут быть формулы

$$\begin{aligned} &1IN3(x_1, x_2, x_2) \wedge 1IN3(x_3, x_1, x_4) \wedge 1IN3(x_1, x_4, x_2), \\ &NAE(x_1, x_2, x_2) \wedge NAE(x_3, x_1, x_4) \wedge NAE(x_1, x_4, x_2). \end{aligned}$$

При этом нам обещают, что либо обе формулы выполнимы, либо обе формулы невыполнимы; нам надо проверить выполнимы ли они. Удивительно, но несмотря на то, что задачи $CSP(1IN3)$ и $CSP(NAE)$ являются NP-полными, данная задача удовлетворения ограничениям с обещаниями решается за полиномиальное время. Тем не менее, даже на двухэлементном множестве и близко нет описания сложности задачи удовлетворения ограничениям с обещаниями для произвольного языка ограничений.

Проблема 9 Какова сложность задачи удовлетворения ограничениям с обещаниями для произвольного языка ограничений на множестве $\{0, 1\}$?

Пожалуй самой популярной задачей удовлетворения ограничениям с обещаниями является задача о (k, l) -раскраске графа. Она формулируется так. Дан граф, и нам дано обещание, что либо его можно покрасить в k цветов, либо нельзя даже в l цветов. Надо ответить на вопрос можно ли его покрасить в k цветов. Другим вариантом этой задачи является задача о покраске графа в l цветов, если известно, что его можно покрасить в k цветов. Удивительно, но из здесь у нас сплошные открытые вопросы, хотя все и уверены, что для любых $2 < k \leq l$ задача о (k, l) -раскраске графа является NP-полной.

Совсем недавно было показано [8], что задача является NP-трудной для $l = 2k - 1$ и $k \geq 3$, но например открытыми остаются следующие вопросы.

Проблема 10 Какова сложность $(3, 6)$ -раскраски графа?

Проблема 11 Какова сложность $(3, 100000000)$ -раскраски графа?

5. Другие вариации задачи удовлетворения ограничениям

Кроме рассмотренных выше вариаций существует много других. Например, мы можем потребовать, чтобы каждая переменная в формуле встречалась ровно два раза, тогда мы получим так называемую реберную задачу удовлетворения ограничениям (по англ. Edge CSP), так как она эквивалентная тому, что переменные у нас находятся в ребрах графа, а ограничения в вершинах [13]. Можно рассматривать данные задачи на бесконечном множестве [2], где уже возникает вопрос как задавать язык ограничений, а для некоторых языков можно получить даже алгоритмически неразрешимую задачу. Этот список можно продолжать ещё долго, что даёт нам большое количество очень любопытных открытых вопросов.

Список литературы

- [1] Manuel Bodirsky, Jan Kára, and Barnaby Martin. The complexity of surjective homomorphism problems - a survey. *Discrete Applied Mathematics*, 160(12):1680–1690, 2012.
- [2] Manuel Bodirsky and Marcello Mamino. Constraint satisfaction problems over numeric domains. In *Dagstuhl Follow-Ups*, volume 7. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.
- [3] Ferdinand Börner, Andrei A. Bulatov, Hubie Chen, Peter Jeavons, and Andrei A. Krokhin. The complexity of constraint satisfaction games and QCSP. *Inf. Comput.*, 207(9):923–944, 2009.
- [4] Joshua Brakensiek, Sivakanth Gopi, and Venkatesan Guruswami. CSPs with global modular constraints: Algorithms and hardness via polynomial representations. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 590–601, 2019.
- [5] Joshua Brakensiek and Venkatesan Guruswami. Promise constraint satisfaction: Structure theory and a symmetric boolean dichotomy. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1782–1801. SIAM, 2018.
- [6] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 319–330, 2017.
- [7] Andrei A Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. *arXiv preprint arXiv:1703.03021*, 2017.

- [8] Jakub Bulín, Andrei Krokhin, and Jakub Opršal. Algebraic approach to promise constraint satisfaction. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 602–613. ACM, 2019.
- [9] Hubie Chen. The complexity of quantified constraint satisfaction: Collapsibility, sink algebras, and the three-element case. *SIAM J. Comput.*, 37(5):1674–1701, 2008.
- [10] Hubie Chen. Meditations on quantified constraint satisfaction. In *Logic and Program Semantics - Essays Dedicated to Dexter Kozen on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 35–49, 2012.
- [11] Nadia Creignou, Henning Schnoor, and Ilka Schnoor. Non-uniform boolean constraint satisfaction problems with cardinality constraint. In *International Workshop on Computer Science Logic*, pages 109–123. Springer, 2008.
- [12] Tomás Feder and Moshe Y Vardi. Monotone monadic SNP and constraint satisfaction. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 612–622, 1993.
- [13] Alexandr Kazda, Vladimir Kolmogorov, and Michal Rolínek. Even delta-matroids and the complexity of planar boolean csps. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 15(2):1–33, 2018.
- [14] Barnaby Martin. Quantified Constraints in Twenty Seventeen. In Andrei Krokhin and Stanislav Zivny, editors, *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, volume 7 of *Dagstuhl Follow-Ups*, pages 327–346. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2017.
- [15] D. Zhuk. A proof of CSP dichotomy conjecture. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 331–342, Oct 2017.
- [16] Dmitriy Zhuk. A proof of the CSP dichotomy conjecture. *Journal of the ACM (JACM)*, 67(5):1–78, 2020.
- [17] Dmitriy Zhuk. No-rainbow problem and the surjective constraint satisfaction problem. In *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–7. IEEE, 2021.
- [18] Dmitriy Zhuk and Barnaby Martin. QCSP monsters and the demise of the Chen conjecture. In *Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 91–104, 2020.

Complexity of the Constraint Satisfaction Problem and its variations
Zhuk D.N.

Many combinatorial problems, such as graph coloring and solving of linear equations, can be expressed as the constraint satisfaction problem for some constraint language. Some of these problems are solvable in polynomial time, while others are NP-complete. In 2017 the complexity of the constraint satisfaction problem was described for any constraint language on a finite set, but there are many other variants of this problem whose complexity is still not known. For instance, we could allow to use both universal and existential quantifiers, or require the solution to be surjective or balanced. Another variant is to require

the input to satisfy an additional condition. As an example we could consider the problem of coloring a graph in 100 colors if we know that the graph is colorable in 3 colors. In the paper we discuss the usual constraint satisfaction as well as the complexity of these and other variants of the constraint satisfaction problem.

Keywords: constraint satisfaction problem, computational complexity, CSP, quantified CSP.

References

- [1] Manuel Bodirsky, Jan Kára, and Barnaby Martin. The complexity of surjective homomorphism problems - a survey. *Discrete Applied Mathematics*, 160(12):1680–1690, 2012.
- [2] Manuel Bodirsky and Marcello Mamino. Constraint satisfaction problems over numeric domains. In *Dagstuhl Follow-Ups*, volume 7. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.
- [3] Ferdinand Börner, Andrei A. Bulatov, Hubie Chen, Peter Jeavons, and Andrei A. Krokhnin. The complexity of constraint satisfaction games and QCSP. *Inf. Comput.*, 207(9):923–944, 2009.
- [4] Joshua Brakensiek, Sivakanth Gopi, and Venkatesan Guruswami. CSPs with global modular constraints: Algorithms and hardness via polynomial representations. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 590–601, 2019.
- [5] Joshua Brakensiek and Venkatesan Guruswami. Promise constraint satisfaction: Structure theory and a symmetric boolean dichotomy. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1782–1801. SIAM, 2018.
- [6] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 319–330, 2017.
- [7] Andrei A Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. *arXiv preprint arXiv:1703.03021*, 2017.
- [8] Jakub Bulín, Andrei Krokhnin, and Jakub Opršal. Algebraic approach to promise constraint satisfaction. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 602–613. ACM, 2019.
- [9] Hubie Chen. The complexity of quantified constraint satisfaction: Collapsibility, sink algebras, and the three-element case. *SIAM J. Comput.*, 37(5):1674–1701, 2008.
- [10] Hubie Chen. Meditations on quantified constraint satisfaction. In *Logic and Program Semantics - Essays Dedicated to Dexter Kozen on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 35–49, 2012.
- [11] Nadia Creignou, Henning Schnoor, and Ilka Schnoor. Non-uniform boolean constraint satisfaction problems with cardinality constraint. In *International Workshop on Computer Science Logic*, pages 109–123. Springer, 2008.
- [12] Tomás Feder and Moshe Y Vardi. Monotone monadic SNP and constraint satisfaction. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 612–622, 1993.

- [13] Alexandr Kazda, Vladimir Kolmogorov, and Michal Rolínek. Even delta-matroids and the complexity of planar boolean csps. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 15(2):1–33, 2018.
- [14] Barnaby Martin. Quantified Constraints in Twenty Seventeen. In Andrei Krokhin and Stanislav Zivny, editors, *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, volume 7 of *Dagstuhl Follow-Ups*, pages 327–346. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2017.
- [15] D. Zhuk. A proof of CSP dichotomy conjecture. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 331–342, Oct 2017.
- [16] Dmitriy Zhuk. A proof of the CSP dichotomy conjecture. *Journal of the ACM (JACM)*, 67(5):1–78, 2020.
- [17] Dmitriy Zhuk. No-rainbow problem and the surjective constraint satisfaction problem. In *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–7. IEEE, 2021.
- [18] Dmitriy Zhuk and Barnaby Martin. QCSP monsters and the demise of the Chen conjecture. In *Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 91–104, 2020.

Интерфейсы мозг-искусственный интеллект: основания и перспективы

А. Я. Каплан¹

Мозг человека очевидным образом является «родовым» объектом для определения понятия искусственных «интеллектуальных систем». Однако механизмы собственно интеллектуальной деятельности мозга до сих пор остаются не раскрытыми в своей самой сущностной части. В значительной мере это связано с тем, также очевидным обстоятельством, что естественный интеллект в широком смысле обладает свойством субъективного представления реальности, операциональная архитектура которого, его форматы, способы и полнота описания реальности вне субъективного «Я» нам неизвестны. В этой связи и с учетом отсутствия «общей теории мозга» становится проблематичным создание нейроморфных систем искусственного интеллекта, построенных на структурно-функциональных аналогиях с мозгом. Уровень такой «нейроморфности» всецело будет определяться не полнотой нейроанатомических описаний, а границами нашего понимания того, как работает мозг человека.

Между тем, свойство нейроморфности систем искусственного интеллекта может быть достигнуто не столько за счет построения подобной мозгу структурно-функциональной архитектуры этих систем (сети искусственных нейронов, алгоритмы глубокого обучения и т. д.), сколько посредством их обучения двусторонней коммуникации с естественным интеллектом. Мы полагаем, что каналы информационного взаимодействия мозг-искусственный интеллект для запуска процессов обучения «общению» могут быть построены на основе технологий неинвазивных интерфейсов мозг-компьютер (ИМК) нового поколения. Ключевым звеном этих технологий, станут контуры обратной связи, в рамках которых модули искусственного интеллекта, подключенные к анализу ЭЭГ, будут через естественные сенсорные каналы демонстрировать человеку свои гипотезы относительно принадлежности специфических паттернов ЭЭГ тем или иным мысленным актам человека. В интерактивном процессе эти гипотезы будут уточняться до полной сходимости, формируя таким образом в памяти мозга человека и машины траектории взаимодействия до приемлемого уровня «взаимопонимания». В докладе будут рассмотрены нейрофизиологические и нейротехно-

¹ Каплан Александр Яковлевич — д.б.н., профессор, заведующий лабораторией нейрофизиологии и нейрокомпьютерных интерфейсов биологического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова, e-mail: akaplan@mail.ru.

Kaplan Alexander Yakovlevich — Doctor of Science, Head of the Laboratory of Neurophysiology and Neurocomputer Interfaces, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Biology.

гические основания к созданию интерфейсов «мозг-искусственный интеллект».

Ключевые слова: мозг человека, электроэнцефалограмма, интерфейсы мозг-компьютер искусственный интеллект, нейроморфные системы.

1. Введение

Проблема взаимодействия человека с изобретенными им же самим машинами возникла, наверное, еще со времен строительства великих пирамид. В первую очередь она состояла в том, что даже в самом развитом виде эти машины не являлись продолжением тела и потому не могли управляться напрямую от мозга, не могли в полной мере соответствовать тонкой динамике и направленности ментальных планов. Даже бурное развитие автоматике, кибернетики и робототехники в 20-м веке, в какой-то мере заполнивших зазор между мысленными решениями и исполнительными агрегатами, не смогло снять с повестки дня проблему «человек-машина» и даже наоборот, предъявило особые требования человеку-оператору машин, в частности, по психофизиологическим его параметрам. Однако власть и могущество машин со всей очевидностью проявились в условиях тотальной информатизации и цифровизации жизни человека в 21-м веке. Апофеозом этой взрывной трансформации природной среды человека в кнопочно-виртуальный мир явилось повсеместное и все ускоряющееся распространение высоко производительных элементов искусственного интеллекта (ИИ).

Пусть еще не создан сильный искусственный интеллект, и еще неизвестно будет ли это возможным когда-либо, но уже во всех аспектах своей традиционной деятельности человеку приходится взаимодействовать с высокопроизводительными информационно-аналитическими системами, встроенными не только в стиральные машины и самолеты, но и в сами технологии расчета и проектирования машин, в процессы управления экономическими ресурсами и социальными процессами, наконец, в организацию виртуального мира, опосредующего реальность через массмедиа, через всевозможные поисковики, интернет-магазины и в скором будущем – через аватары и интернет-вещей. Однако «Это не есть создание нового человека, это есть истребление человека, исчезновение человека, замена его иным существом, с иным, не человеческим уже существованием» [1]. Эти строки написаны философом Н.А.Бердяевым почти век назад, но, как видно, они имели пророческий смысл. В этом «ином существе» явно проглядывает сейчас призрак Искусственного интеллекта, если дать ему свободу выбора и действий.

Соглашаясь в принципе с проблемой «человек-машина» в трактовке Н.А.Бердяева, в случае с искусственным интеллектом приходится все же смириться с самой необходимостью его появления в технологической эволюции человека. Раз вступив в мир цифровых отношений, человек уже не сможет позволить себе обходиться без помощи информационно-аналитических устройств и технологий, не просто повышающих эффективность его работы, но и определяющих само существование человека в этом дивном во всех отношениях цифровом мире.

В этой связи все большее распространение в среде не только гуманитариев, но и естествоиспытателей, получает идея создания подконтрольного человеку искусственного интеллекта, назовем его «человеко-ориентированным» искусственным интеллектом, обладающего инициативой и свободой активностей только в пределах, задаваемых собственными потребностями человека. В частном случае подобные операциональные отношения между человеком и ИИ могли бы устанавливаться непосредственно на «линии» между ними, например, посредством технологий интерфейсов мозг-компьютер (ИМК). Задача создания эффективного канала двусторонней связи между мозгом человека и элементами ИИ (искусственными нейронными сетями, к примеру) с возможностью формирования мозг-машинного языка выдвигается сейчас на передний край широкого поля мультидисциплинарных исследований и разработок в области «человеко-ориентированного» ИИ. В первую очередь, это взаимосвязанные задачи от поиска нейрофизиологических маркеров физиологических и ментальных запросов организма до создания программно-алгоритмических решений их выявления, моделирования и классификации. По сути дела, именно эти маркеры становятся тем признаковым пространством, в котором могут быть сформированы элементы символического взаимодействия между мозгом и ИИ. Рассмотрим основные контуры исследований и разработок в области ИМК.

2. Технологии интерфейсов «мозг-компьютер»: фантазии и реалии

Первые успешные попытки выделения устойчивых командных сигналов в электрической активности мозга человека (ЭЭГ) были продемонстрированы еще в 60-70-х годах прошлого века. Однако настоящий бум исследований и разработок в этой области начался в 21-веке. В последнее время каждый год на эту тему публикуется 2-3 тыс только узко специализированных научных статей. Особенно перспективными с точки зрения планов последующего широкого внедрения ИМК представляются работы с неинвазивной регистрацией биометрической информации,

сопряженной с работой мозга, в первую очередь, с регистрацией ЭЭГ. В силу своей природы этот показатель активности мозга практически без инерции отражает работу больших коопераций нервных клеток, главным образом поверхностного слоя мозговой ткани, толщиной 3-5 мм, или коры больших полушарий головного мозга. Если не считать мозжечок, то кора головного мозга, несмотря на свое периферийное положение в общем объеме мозга в черепной коробке, содержит около 90% нервных клеток всего мозга. Это почти 20 миллиардов нейронов, которые являются основной сценой, на которой разыгрывается подавляющее большинство ментальных событий нашей психики. Этим обстоятельством и, конечно, практичностью самого метода ЭЭГ, объясняется тот факт, что подавляющее большинство успешных разработок в области технологий интерфейсов мозг-компьютер (ИМК) сделано на основе анализа электрической активности головного мозга, регистрируемой непосредственно с кожной поверхности головы.

К настоящему времени можно выделить три типа технологий надежно работающих ИМК на основе регистрации ЭЭГ. Первый тип нейроинтерфейсов основан на выделении в ЭЭГ спектральных признаков, сопряженных с фокусированием зрительного внимания человека на экранных объектах, ритмически подсвечиваемых каждый на своей частоте, обычно в пределах от 5 до 30 Гц. Таким образом, детектирование внимания оператора к конкретному объекту на экране по ЭЭГ признакам становится равноценным "ментальному" клику на данную иконку. Исследования показали, что, например, для случая из 4 объектов на экране монитора можно добиться 95% правильных срабатываний алгоритма обнаружения фокуса внимания оператора с быстродействием в пределах секундного диапазона. При увеличении числа экранных объектов до 9 такой нейроинтерфейс продолжает «догадываться» о внимании оператора на уровне значительно выше случайного, но число ошибок первого и второго рода при этом может увеличиться до практически неприемлемого уровня. Именно этот тип нейроинтерфейсных контуров часто используется для «мысленного» управления, требующего всего 4-5 команд, например, для управления инвалидными колясками, модулями умных домов и т.д.

Второй тип нейроинтерфейсов также основан на выявлении внимания человека к мигающим объектам на экране монитора, но в отличие от первого в ЭЭГ выявляется не «наведенная объектом частота», а специфические реакции ЭЭГ на подсветку каждого из объектов. Нейрофизиологической основой этого метода является хорошо известный феномен появления в зрительной реакции ЭЭГ в области 300 мс после начала подсветки выраженного позитивного компонента – волны П300, если оператор ожидает подсветки конкретного объекта. В таком случае экранных объектов может быть уже несколько десятков, так как решением

статистической задачи является поиск одной реакции, отличающейся от всех остальных по характерному признаку. Таким образом, в контуре нейроинтерфейсов второго типа с большими наборами экранных объектов можно развернуть, в частности, процедуру «мысленного» набора текстов. В авторской технологии «НейроЧат», к примеру, в контуре интерфейса работают несколько матриц экранных объектов, обозначенных символами для набора текстов и пиктограммами для выполнения необходимого пользователю набора «мысленных» команд от звонка другу до управления электронной почтой и социальной сетью [2]. Практика этой процедуры показала, что для гарантированного угадывания задуманной оператором команды, например, на уровне выше 95%, необходимо, чтобы каждый экранный объект был подсвечен минимум 9-10 раз. Это приводит к существенным временным затратам, до 8-10 с на символ. Однако, если речь идет о помощи в замещении коммуникации для пациентов с тяжелыми нарушениями речи и движений, то технология «Нейрочат» оказывается вполне приемлемой. В рамках этого типа нейроинтерфейсов придуманы и более быстрые техники, до 2 секунд на символ, но они отличаются ускоренными и распределенными по экрану подсветками символов, что оказывается слишком нагрузочным для зрительного восприятия.

Наконец, третий тип неинвазивных интерфейсов интересен тем, что для обнаружения мысленной команды он не требует фокусирования внимания пользователя на внешних объектах, наоборот, ему нужно фокусироваться на конкретном мысленном образе, с тем, чтобы в ЭЭГ нашелся специфичный этому образу паттерн изменений. Однако многочисленные попытки обнаружения устойчивых паттернов ЭЭГ в ответ на мысленное представление различных образов, сделанные во многих лабораториях мира с применением самых современных алгоритмов, включая искусственные нейросети, не дали положительных результатов. Кросс-валидационное тестирование обученных алгоритмов для подобных нейроинтерфейсов давало оценки, либо крайне низкие, либо вообще на уровне случайного выбора. И лишь в случае телесных образов, таких, как воображение движений правой/левой руки, ног, лицевой мимики – всего до 5-6 образов, удавалось зафиксировать специфические этим образам паттерны ЭЭГ. При этом надежность распознавания соответствующих паттернов ЭЭГ достаточно высока, но оставляет желать лучшего: при максимально благоприятном выборе «правая-левая рука» ЭЭГ паттерны этого ментального действия в разных лабораториях распознаются с вероятностью всего 0,65-0,8, редко - 0,85. Таким образом, при всех преимуществах интерфейсов на основе мысленного воображения, т.е. без опоры на внешние объекты, шансы с помощью машинных алгоритмов анализа ЭЭГ "отгадать" по ЭЭГ даже самый удобный для

этого телесный образ из набора всего в 5-6 возможных вариантов обычно не достигает даже 65-70 на 100 попыток.

Возвращаясь к исходной задаче создания эффективного канала двусторонней связи между мозгом человека и элементами ИИ возникает вопрос о возможности реализовать такой канал с помощью разработанных к настоящему времени технологий интерфейсов мозг-компьютер. Рассмотрим эти возможности ниже.

3. Технологии интерфейсов «Мозг-ИИ»: пока еще фантазии

Во всех типах современных нейроинтерфейсов элементы ИИ уже используются, но всего лишь в качестве блока алгоритмов для создания классификаторов и для распознавания паттернов ЭЭГ, специфичных ментальным актам. При этом признаковое пространство ЭЭГ для подачи на первый слой нейросетей, как правило, формирует исследователь исходя из своих знаний и предположений о работе мозга. К примеру, наиболее частым методом свертки первичной записи ЭЭГ выбирают ее разложение на ограниченное число спектральных полос, или на компоненты вызванных стимулами реакций. Вся логика работы подобного рода нейроинтерфейсов строится на распознавании в ЭЭГ намерения человека к действию и трансляции его в команду для внешнего исполнительного устройства. В контурах таких ИМК для ИИ отводится лишь техническая роль: по определенному набору признаков научиться различать эпизоды ЭЭГ, сопряженные с заданным исследователем конкретным набором ментальных действий испытуемого.

Между тем совершенно новым и все более актуальным в последние годы становится применение ИИ в контурах ИМК не для построения классификатора паттернов ЭЭГ по известным в науке признакам этого показателя работы мозга, а в качестве активного модуля, нацеленного на оптимизацию и совершенствование самого информационного обмена между мозгом и компьютером. Здесь имеется по крайней мере две возможности, которые могут быть проверены экспериментальным путем.

Первая возможность, это оптимизация с помощью ИИ процесса порождения нового признакового пространства для ЭЭГ, адекватного не столько сумме имеющихся на данный момент нейрофизиологических знаний, сколько задаче эффективного машинного «понимания» мозговых команд. На линии с ИИ эти команды мозга будут формулироваться в контуре ИМК уже не для собственных мотонейронов, а для внешних процессорных устройств. На этом пути ресурсы ИИ должны быть направлены на поиск новых признаковых пространств ЭЭГ с опорой оце-

ночную функцию, характеризующую степень приближения к «пониманию» команды мозга. Здесь можно ожидать, что мозг, реализуя управленческую задачу человека в контуре ИМК, а также в силу своих природных пластических свойств, может пойти «навстречу» ИИ в создании оптимального признакового пространства ЭЭГ, оптимизируя этот сигнал под общую задачу.

Вторая возможность, это создание в рамках ИМК нового контура обратной связи, которая будет информировать оператора ИМК о степени приближении ИИ к распознаванию по ЭЭГ тестируемого ментального действия, например, мысленного представления движения указательного пальца правой руки. Предварительно ИИ может быть обучен, к примеру, распознаванию по ЭЭГ мысленного представления движения правой руки. В новой задаче ИИ предстоит уже без эксплицитного тренинга с учителем распознать по ЭЭГ, какой палец руки представляет в уме испытуемый. Используя генеративно-состязательные сети [3], ИИ может на основе анализа ЭЭГ на фоне ментального акта оператора ЭЭГ синтезировать свои гипотезы в виде визуальных изображений на экране монитора, используя их в качестве обратной связи. Реакцию мозга на обратную связь по шкале «горячо-холодно» тот же ИИ будет детектировать в ЭЭГ уже по итогам предварительного обучения распознавания этих универсальных состояний мозга. Таким образом организуется циклы итераций, которые в простом случае, как в приведенном примере, могут выродиться в последовательную демонстрацию на экране каждого пальца руки, и в самообучении, какому пальцу какой паттерн ЭЭГ соответствует. Но даже в этом случае важен будет не достигнутый результат, а опыт ИИ в последовательном приближении к отгадке, какой ментальный акт транслируется в данный момент в ЭЭГ. Очевидным образом в таком ИМК с контуром обратной связи от ИИ репертуар ментальных актов можно расширять, тем самым не просто обогащая опыт ИИ, но в рамках того же самообучения увеличивая обобщающий потенциал ИИ для анализа ЭЭГ с целью распознавания ментальных актов при разных условиях.

Третьей возможностью реализации прямого канала интерактивной коммуникации между мозгом и ИИ является обобщение первых двух возможностей при длительном обучении ИИ тактикам и стратегиям распознавания все большего числа ментальных актов в контуре ИМК с обратной связью. Это будет путь к появлению собственного опыта ИИ для все более эффективной идентификации ментальных образов конкретного человека, выраженных на языке специфических паттернов ЭЭГ. На этом пути можно ждать взрывного расширения канала интерактивной коммуникации «Мозг-ИИ», поскольку каждый новый образ будет расшифровываться по ЭЭГ уже с учетом накапливающегося потенциала

предсказательной функции машинного опыта. Этот машинный опыт, по сути дела, может стать той истинной нейроморфной составляющей ИИ, которая будет нести в себе не столько структурное и функциональное сходство с нервной тканью, сколько саму семантику отношений ментальных объектов, проявляющихся в ЭЭГ конкретного человека. ИИ с семантическим нейроморфным модулем, сформированным в результате длительного «общения» с данным человеком в контуре ИМК с обратными связями, станет в буквальном смысле человеко-ориентированным ИИ.

Удачная реализация предложенных возможностей может привести созданию комплексов «Мозг-ИИ», способных автоматизированным образом формировать мозг-машинный язык, по крайней мере, в границах какого-то пула ментальных активностей. Насколько развиваемым с помощью технологии «Мозг-ИИ» может оказаться этот мозг-машинный язык и как далеко он заведет ИИ на пути формирования человекоподобного машинного опыта покажут мультидисциплинарные исследования в этой области.

Список литературы

- [1] Бердяев М.А., “Человек и машина (Проблема социологии и метафизики техники)”, *Путь*, **38** (1933), 3–38.
- [2] Ганин И.П. и др., “Набор текста пациентами с постинсультной афазией в комплексе “НейроЧат” на основе технологии интерфейсов мозг-компьютер на волне R300”, *Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова*, **70:4** (2020), 435-445.
- [3] Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza Mehdi, Xu Bing, Warde-Farley D., Ozair Sh., Courville A., Bengio Yo., “Generative Adversarial Networks”, 2014, arXiv: 1406.2661.

Brain-artificial intelligence interfaces: foundations and perspectives **Kaplan A. Y.**

The human brain is obviously a “generic“ object for determining, including artificial “intelligent systems“. However, the mechanisms of the actual intellectual activity of the brain still remain undiscovered in their most essential part. To a large extent, this is due to the also obvious fact that natural intelligence in a broad sense has the property of a subjective representation of reality, the operational architectonics of which, its formats and completeness of description are unknown to us. In this regard, and taking into account the absence of a “general theory of the brain“, it becomes problematic to create neuromorphic artificial intelligence systems based on analogies. The

level of such “neuromorphism“ will be entirely determined by the boundaries of our understanding of how the human brain works. Meanwhile, the neuromorphic property of artificial intelligence systems can be achieved not so much by building brain-like structural and functional architectonics of these systems (artificial neuron networks, deep learning algorithms, etc. D.), how much through their training of two-way communication with natural intelligence. We believe that the channels of brain-artificial intelligence information interaction for launching the learning processes of “communication“ can be built on the basis of technologies of non-invasive brain-computer interfaces (BCI) of a new generation. The key link of these technologies will be feedback loops, within which artificial intelligence modules connected to EEG analysis will demonstrate to a person through natural sensory channels their hypotheses regarding the belonging of specific EEG patterns to certain mental acts of a person. In the interactive process, these hypotheses will be refined to full convergence, thus forming interaction trajectories in the memory of the human and machine brains to an acceptable level of “mutual understanding“. The report will discuss in detail the neurophysiological and neurotechnological grounds for creating “brain-artificial intelligence“ interfaces.

Keywords: human brain, electroencephalogram, brain-computer interfaces artificial intelligence, neuromorphic systems.

References

- [1] Berdyayev M.A., “Man and Machine (The Problem of the Sociology and Metaphysics of Technology)”, *Way*, **38** (1933), 3–38 (In Russian).
- [2] Ganin I.P. et al, “Typing by patients with post-stroke aphasia in the NeuroChat complex based on the technology of brain-computer interfaces on the P300 wave”, *Journal of Higher Nervous Activity named after I. P. Pavlov*, **70**:4 (2020), 435-445 (In Russian).
- [3] Goodfellow I.J., Pouget-Abadie J., Mirza Mehdi, Xu Bing, Warde-Farley D., Ozair Sh., Courville A., Bengio Yo., “Generative Adversarial Networks”, 2014, arXiv: 1406.2661.

Об алгебраической теории автоматов

И. Б. Кожухов¹, А. В. Михалев²

В работе кратко изложены основные идеи алгебраической теории автоматов и её связь с алгебраической теорией полугрупп. Автомат рассматривается как полигон над полугруппой. Указаны основные направления развития теории полигонов.

Ключевые слова: автомат, полугруппа, полигон над полугруппой, алгебраическая теория автоматов.

В классической теории *автомат Милли* определяется как пятёрка $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ где Q – множество состояний, A и B – входной и выходной алфавиты, $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ – функция переходов и функция выходов соответственно. С помощью расширения множества состояний до $Q' = Q \times B$ и замены функции φ функцией $\varphi' : Q' \times A \rightarrow Q'$, $\varphi'((q, b), a) = (\varphi(q, a), \psi(q, a))$ мы приходим к *автомату Мура* $V' = (Q', A, \varphi')$ (автомату без выхода). При этом, как нетрудно видеть, автомат V' воспроизводит без искажений работу автомата V . Автомат V' может рассматриваться как *унарная алгебра*, в ней для каждого $a \in A$ отображения $q' \mapsto \varphi'(q', a)$ являются унарными операциями. Отображение $\varphi' : Q' \times A \rightarrow Q'$ очевидным образом может быть продолжено до отображения $\delta : Q' \times A^* \rightarrow Q'$, где A^* – полугруппа всех слов с буквами из A . Таким образом мы приходим к концепции *действия полугруппы на множестве*.

Полигоном над полугруппой (см. [1]) называется множество X на котором действует полугруппа S т.е. определено отображение $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. Если полугруппа S имеет единицу 1 и $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$, то полигон X называется унитарным.

В такой общей форме автомат рассматривается в алгебраической теории автоматов. Основы этой теории излагались в ряде статей, учебных пособий и монографий, из которых упомянем работы [2, 3, 4]. Понятие полигона весьма широко, полигоны можно встретить во многих разделах математики. Приведём некоторые примеры. 1. Любая полугруппа S

¹*Кожухов Игорь Борисович* — д.ф.-м.н., профессор, НИУ МИЭТ, механико-математический факультет МГУ, Моск. Центр ФПМ МГУ, e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru.

Kozhukhov Igor Borisovich — Doctor of Science, professor, NRU MIET, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

²*Михалев Александр Васильевич* — д.ф.-м.н., профессор, механико-математический факультет МГУ, Моск. Центр ФПМ МГУ, e-mail: anastacy27@gmail.com.

Mikhalev Alexander Vasilyevich — Doctor of Science, professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

является полигоном над собой. 2. Любая алгебра A является полигоном над полугруппой $\text{End}A$ эндоморфизмов этой алгебры. 3. Если множество X наделено какой-либо математической структурой, то X можно рассматривать как полигон над полугруппой $\text{End}X$ всех отображений $X \rightarrow X$, сохраняющих эту структуру (для топологических пространств это непрерывные отображения, для частично упорядоченных множеств — изотонные отображения и т.д.). 4. Правый модуль M над ассоциативным кольцом R является полигоном над мультипликативной полугруппой (R, \cdot) этого кольца. То же для полумодуля над полукольцом. 5. Унар X , т.е. алгебра с одной унарной операцией $f : X \rightarrow X$, является полигоном над бесконечной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$, достаточно положить $xa = f(a)$ для $x \in X$.

Понятие полигона тождественно понятию представления полугруппы преобразованиями множества. Действительно, обозначим через $T(X)$ множество всех отображений $\alpha : X \rightarrow X$, $x \mapsto x\alpha$ с умножением, определённым правилом $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ для $x \in X$. Пусть X — полигон над полугруппой S . Для каждого элемента $a \in S$ обозначим через φ_a отображение $\varphi_a : X \rightarrow X$, $x\varphi_a = xa$. Нетрудно проверить, что отображение $\Phi : S \rightarrow T(X)$, $a \mapsto \varphi_a$ является гомоморфизмом полугрупп и называется *представлением полугруппы S преобразованиями множества X* . Ясно, что верно и обратное: если задано представление полугруппы S преобразованиями множества X , то X будет полигоном над S .

Теория полигонов над полугруппами развивалась под большим влиянием теории модулей над кольцами, многие определения и формулировки утверждений теории полигонов взяты из теории колец и модулей, однако, доказательства могут существенно различаться. Например, хорошо известные конструкции инъективной оболочки и проективного накрытия модуля переносятся на полигоны (см. [1, §III.1, III.17]). Как и в случае модулей, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие не у всякого. Исследования в теории полигонов осуществлялись в следующих направлениях:

- 1) структурная теория полигонов;
- 2) гомологическая теория полигонов и полугрупп;
- 3) полигоны специального вида;
- 4) линейные представления полугрупп;
- 5) полигоны с дополнительной структурой;
- 6) логические аспекты теории полигонов;
- 7) обобщения полигонов.

Структурная теория включает описание полигонов над теми или иными классами полугрупп, их подполигонов, конгруэнций, выяснение строения полигонов, удовлетворяющих определённым условиям и т.д. В работе [5] были описаны полигоны над вполне простой полугруппой $M(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $M^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь мы пользуемся матричным представлением таких полугрупп – см. [6, глава 3]). Описание полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами позволило решить ряд вопросов для таких полигонов. В частности, были описаны инъективные и проективные полигоны над этими полугруппами.

Гомологическая теория рассматривает категорию Act- S всех полигонов над полугруппой S . Её часто называют гомологической теорией моноидов, так как в большинстве работ на эту тему требуется наличие единицы у полугруппы, а полигоны над ней предполагаются унитарными. Гомологическим вопросам посвящена большая часть монографии [1]. В этой теории осуществляется классификация моноидов по свойствам категории полигонов над ним.

Важную роль в общей алгебре играют конгруэнции. Знание конгруэнций алгебры означает знание всех гомоморфных образов этой алгебры. Конгруэнции полигонов возникают в теории автоматов в связи с распознаваемостью языка автоматом. А именно, пусть A – конечное множество (алфавит), A^* – полугруппа слов, $L \subseteq A^*$ – язык. Отношение $\Theta_L = \{(x, y) | \forall z, xz \in L \leftrightarrow yz \in L\}$ называется *синтаксической конгруэнцией*. Оно является конгруэнцией полигона A^* (или, что эквивалентно, правой конгруэнцией полигона A^*). Хорошо известно, что язык L распознаваем некоторым конечным автоматом в том и только том случае, если Θ_L конечного индекса. Более того, это не единственное использование синтаксической конгруэнции в классификации формальных языков.

Полигоны с теми или иными условиями на конгруэнции изучались в ряде работ. В работе [7] условия дистрибутивности и модулярности решётки конгруэнций произвольного полигона сведён к аналогичному вопросу для связного полигона. Дистрибутивные и модулярные полигоны над прямоугольной связкой были описаны в работе [8]. Интересно заметить, что решётка конгруэнций модуля всегда модулярна, тогда как модулярность решётки конгруэнций полигона является редким явлением.

Аналогично теории колец и модулей, в теории полигонов изучаются полигоны с теми или иными условиями конечности – артиновы, нётеровы, конечно порождённые, локально конечные, резидуально конечные, хопфовы и т.д. При этом, скажем, артиновость можно понимать по-разному: как отсутствие бесконечных убывающих последовательностей подполигонов и как аналогичное условие на конгруэнции. Нётеровым

и артиновым полугруппам, т.е. полугруппам, являющимся нётеровыми или артиновыми полигонами над собой, посвящена работа [9] (правда, в этой работе полигоны левые, а не правые), более свежие результаты о нётеровых полугруппах см. в [10].

Алгебра A называется *хопфовой* (*кохопфовой*), если любой её сюръективный (соотв., инъективный) энломорфизм является автоморфизмом. Алгебра A *канторова* (*коканторова*), если для любой алгебры B наличие инъективных (соотв., сюръективных) гомоморфизмов $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ влечёт изоморфизм $A \cong B$. Очевидно,

нётеровость \Rightarrow хопфовость \Rightarrow коканторовость

и

артиновость \Rightarrow кохопфовость \Rightarrow канторовость.

В работе [11] было доказано, что полигоны над коммутативной полугруппой (или, более общо: коммутативный полигон) является хопфовым, если он конечно порождён. В работе [12] были описаны хопфовы и кохопфовы унитарные полигоны над группой, а в работе [13] было доказано, что все унитарные полигоны над группой являются канторовыми.

Подпрямо неразложимые алгебры, т.е. алгебры, неразложимые в нетривиальное подпрямое произведение, всегда привлекали внимание специалистов благодаря замечательной теореме Биркгофа о том, что всякая нетривиальная алгебра изоморфна подпрямому произведению подпрямо неразложимых алгебр. Условие на алгебру “быть подпрямо неразложимой” является условием на решётку конгруэнций, а именно, решётка конгруэнций содержит наименьший нетривиальный элемент. Подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами были охарактеризованы в работе [14]. В ряде работ описывались подпрямо неразложимые полигоны над полугруппами того или иного класса (например, над группами).

Обобщением модулярности и дистрибутивности алгебры является требование, чтобы решётка конгруэнций удовлетворяла какому-нибудь нетривиальному решёточному тождеству. Так как всякая конечная решётка удовлетворяет нетривиальному тождеству, то вышеназванное условие является условием конечности. В работе [15] доказано, что над конечной полугруппой решётка конгруэнций полигона X удовлетворяет нетривиальному тождеству в том и только том случае, если X конечен. Из полигонов специального вида отметим диагональный полигон, т.е. множество $S \times S$, на котором полугруппа S действует следующим образом: $(a, b)s = (as, bs)$. Этим полигонам посвящён ряд работ отечественных и зарубежных авторов, в основном занимающихся условиями,

при которых данный полигон будет циклическим или конечно порождённым.

В теории частичных полигонов один из центральных вопросов — возможно ли продолжение частичной операции до полной? Оказывается, что это возможно не всегда, однако, есть полугруппы, над которыми всякий частичный полигон продолжается — например, вполне простые полугруппы (а значит, и группы).

Соединение нескольких автоматов в один или разложение автомата на ряд более простых соответствует алгебраическим конструкциям прямого и подпрямого произведения, копроизведения, сплетения. Сплетения сыграли важную роль в теории групп для описания некоторых групповых расширений. В теории полугрупп и полигонов над полугруппами их значение также весьма велико (см. [16]). Некоторые задачи теории автоматов, требуют для своего разрешения привлечение весьма тонких алгебраических методов. В статье С.В. Алёшина [17] обсуждаются данные вопросы.

В заключение упомянем недавно опубликованный авторами обзор теории полигонов над полугруппами [18], в котором освещены результаты, полученные в этой теории в последние десятилетия, относящиеся в основном к структурной теории полигонов и затрагивающий некоторые другие аспекты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

Список литературы

- [1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., “Monoids, acts and categories”, *N.Y. – Berlin, W. de Gruyter*, **xvii** (2000), 529 pp.
- [2] Глушков В.М., “Абстрактная теория автоматов”, *Успехи мат. наук*, **16:5** (1961), 3–62
- [3] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А., “Элементы алгебраической теории автоматов”, *М., Высш. школа*, 1994, 191
- [4] “Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп”, Сб. статей под ред. М. Арбиба, *М., Статистика*, 1975, 335
- [5] Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B., “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernetica*, **14:4** (2000), 523–531
- [6] Клиффорд А., Престон Г., “Алгебраическая теория полугрупп, тт. 1, 2. Перевод с английского”, *М., Мир*, **1, 2** (1972), 286(1), 423(2)
- [7] Птахов Д.О., Степанова А.А., “Решётки конгруэнций полигонов”, *Дальневост. матем. ж.*, **13:1** (2013), 107–115
- [8] Кожухов И.Б., Пряничников А.М., Симакова А.Р., “Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **84:2** (2020), 90–125

- [9] Kozhukhov I.B., “On semigroups with minimal or maximal condition on left congruences”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 337–350
- [10] Miller C., Ruškuc N., “Right noetherian semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **30**:1 (2020), 13–48
- [11] Карташов В.К., “Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр”, *Дискретн. матем.*, **20**:4 (2008), 79–84
- [12] Кожухов И.Б., Колесникова К.А., “О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами”, *Фундам. и прикл. матем.*, **23**:3 (2020), 131–139
- [13] Сотов А.С., “Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами”, *Материалы VI Межд. конф. Соврем. информ. технологии в образов. и научн. иссл., ДонНТУ, Донецк*, 2019, 120–123
- [14] Халиуллина А.Р., “Характеризация подпрямо неразложимых полигонов”, *Прик. дискр. матем.*, **1**:27 (2015), 5–16
- [15] Кожухов И.Б., Пряничников А.М., “Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций (в печати)”
- [16] Meldrum J.D.P., “Wreath products of groups and semigroups”, *John Wiley and Sons Inc.*, 1995
- [17] Алёшин С.В., “Автоматы в алгебре”, *Фундам. и прикл. матем.*, **15**:3 (2002), 23–32
- [18] Кожухов И.Б., Михалёв А.В., “Полигоны над полугруппами”, *Фундам. и прикл. матем.*, **23**:3 (2020), 141–199

On algebraic automata theory Kozhukhov I.B., Mikhalev A.V.

The paper briefly describes the main ideas of the algebraic theory of automata and its connection with the algebraic theory of semigroups. An automaton is considered as a polygon over a semigroup. The main directions to develop polygon theory are indicated.

Keywords: automaton, semigroup, polygon over a semigroup, algebraic theory of automata.

References

- [1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., “Monoids, acts and categories”, *N.Y. – Berlin, W. de Gruyter*, **xvii** (2000), 529 pp.
- [2] Glushkov V.M., “Abstract Theory of Automata”, *Uspekhi mat. nauk*, **16**:5 (1961), 3–62 (In Russian)
- [3] Plotkin B.I., Greenglaz L.Y., Gvaramiya A.A., “Elements of algebraic automata theory”, *M., Vysh. shkola*, 1994, 191 (In Russian)
- [4] “Algebraic theory of automata, languages, and semigroups”, *Collected Articles*, ed. by M. Arbib, *M., Statistika*, 1975, 335 (In Russian)
- [5] Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B., “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernetica*, **14**:4 (2000), 523–531
- [6] Clifford A., Preston G., “Algebraic theory of semigroups, vols. 1, 2. Translation from English”, **1, 2** (1972), 286(1), 423(2) (In Russian)

- [7] Ptakhov D.O., Stepanova A.A., “Lattices of polygon congruences”, *Dalnevost. matem. jur.*, **13**:1 (2013), 107–115 (In Russian)
- [8] Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M., Simakova A.R., “Conditions of modularity of the congruence lattice of an act over a rectangular band”, *Izvestiya: Mathematics*, **84**:2 (2020), 90–125 (In Russian)
- [9] Kozhukhov I.B., “On semigroups with minimal or maximal condition on left congruences”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 337–350
- [10] Miller C., Ruškuc N., “Right noetherian semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **30**:1 (2020), 13–48
- [11] Kartashov V.K., “Independent systems of generators and the Hopf property for unary algebras”, *Discrete Math.*, **20**:4 (2008), 79–84 (In Russian)
- [12] Kozhukhov I.B., Kolesnikova K.A., “On the Hopf and Cohopf of Polygons Over Groups”, *Fundamen. and prikl. matem.*, **23**:3 (2020), 131–139 (In Russian)
- [13] Sotov A.S., “The Cantor–Bernstein theorem for polygons over groups”, *Proc. of the 6th Int. Conf. on Modern Inf. Tech. in Edu. and Sci. Research, DonNTU, Donetsk*, 2019, 120–123 (In Russian)
- [14] Khaliullina A.R., “Characterization of indirectly indecomposable polygons”, *Prik. discr. matem.*, **1**:27 (2015), 5–16 (In Russian)
- [15] Kozhukhov I.B., Pryanishnikov A.M., “Polygons with identities in a lattice of congruences (in press)” (In Russian)
- [16] Meldrum J.D.P., “Wreath products of groups and semigroups”, *John Wiley and Sons Inc.*, 1995
- [17] S.V. Aleshin., “Automata in Algebra”, *Fundam. and prikl. matem.*, **15**:3 (2002), 23–32 (In Russian)
- [18] Kozhukhov I.B., Mikhalev A.V., “Polygons over semigroups”, *Fundam. and prikl. matem.*, **23**:3 (2020), 141–199 (In Russian)

Часть 2.
Математика и компьютерные науки

Практические оценки сложности регулярных выражений

Д. Е. Александров¹
А. В. Красненкова²

Эта работа описывает серию экспериментов над конечными автоматами и выявляет классы потенциально простых и потенциально сложных регулярных выражений, ведущих к экспоненциальному взрыву в числе состояний.

Ключевые слова: конечные автоматы, регулярные выражения, экспоненциальный взрыв, вычислительные эксперименты

1. Введение

Проблема выявления вторжений является актуальной проблемой компьютерной безопасности: с каждым годом число разнообразных атак только растет [1]. Одним из самых распространенных подходов в выявлении вторжений является сигнатурный подход, в рамках которого экспертные знания о существующих атаках и уязвимостях формализуются в терминах регулярных выражений; проверка соответствия текущего состояния системы одной из известных сигнатур осуществляется с помощью различных модификаций конечных автоматов [2]. В случае использования конечных детерминированных автоматов (ДКА) временная сложность распознавания линейна по длине входного слова, однако число состояний может экспоненциально зависеть от длины выявляемых регулярных выражений; переход к недетерминированным конечным автоматам (НКА) снижает нагрузку на память до линейной, однако ухудшает временную сложность. Известен ряд конструкций, позволяющих в некоторых случаях снизить пространственную сложность ДКА (см., например, обзор [2]), однако такие конструкции заведомо хороши для некоторых классов регулярных выражений, а утверждения о работе в

¹Александров Дмитрий Евгеньевич — к.ф.-м.н., доцент каф. вычислительной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: d06alexandrov@gmail.com

Alexandrov Dmitriy Evgenievich — Ph.D., Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mathematics.

²Красненкова Анастасия Владимировна — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ankrasnenkova@gmail.com

Krasnenkova Anastasiya Vladimirovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

случае произвольных выражений отсутствуют. Также имеются исследования о выделении классов регулярных выражений, эффективно распознаваемых НКА (см., например, [3]).

В случае аппаратной реализации сигнатурной компоненты системы выявления вторжений представляется разумным основываться на ДКА, так как система критична к скорости работы. Разумной стратегией исследования представляется выделение практически интересных классов регулярных выражений, приводящих к ДКА с большим числом состояний (например, с помощью анализа известных баз сигнатур, таких как база системы snort [4]), и решение проблемы для найденных классов.

2. Система для анализа автоматной сложности

Для проведения вычислительных экспериментов был использован программный комплекс, позволяющий строить недетерминированные и детерминированные конечные автоматы приведенного вида для распознавания как одиночных регулярных выражений, заданных в нотации PCRE, так и их объединений. Необходимые определения можно найти, например, в работе [5], описание формата PCRE — в [6].

Для вывода на экран числа состояний детерминированных конечных автоматов приведенного вида, каждый из которых распознает по одному из PCRE-совместимых регулярных выражений, записанных в файле, используется следующая команда:

```
./re2fa --input-type=regex-file -v -m expressions_example
```

где `expressions_example` — путь к файлу с выражениями.

С целью анализа множества регулярных выражений на предмет экспоненциального взрыва числа состояний используется следующая команда, позволяющая найти число состояний ДКА, распознающего объединение регулярных выражений:

```
./re2fa --input-type=regex-file -v -m -j expressions_example
```

где `expressions_example` — путь к файлу с выражениями, которые необходимо объединить.

Приведенные ниже эксперименты могут быть воспроизведены, используя код и тестовые примеры, расположенный по ссылке <https://github.com/d06alexandrov/re2fa>.

3. Вычислительные эксперименты

Проведем серию вычислительных экспериментов. Первая серия экспериментов направлена на исследование примеров регулярных выражений,

которые, имея невысокую сложность составных частей, дают невысокую сложность итоговых выражений. Вторая серия экспериментов моделирует прямо противоположную ситуацию: выражения с невысокой автоматной сложностью составных частей при объединении дают резкий сложностной скачок.

3.1. Работа с простыми классами регулярных выражений

В качестве примеров регулярных выражений, имеющих низкую автоматную сложность и невысокую временную сложность, рассмотрим следующие шаблоны регулярных выражений из работы [3]:

№	1	2	3	4	5	6
тип	$(ac bc)^+$	$(a+ b+ c+)^+$	$(a ab bc)^+$	$(a+b+c)^+$	$(a+b+)^+ (b+c+)^+$	$(abc)^+ (bc)^+$

Эти выражения оцениваются как имеющие линейную или субквадратичную временную сложность распознавания с точки зрения НКА [3].

Зафиксируем значения параметров a , b , c , подставив вместо них выражения из базы sport:

```
a = /text3Gtrack*?textBox*?(xy)\s*\x3D*(\x22\x27\s)*\x2d\d/
b = /textBox*?(xy)\s*\x3D(\x22\x27\s)+\d{5}/
c = /endobjhttp\x3A\x2F\x2F*\x2EloadXML/
```

Сложность данных регулярных выражений в терминах ДКА составляет 25, 18 и 21 состояний.

В результате экспериментов получили следующие сложностные результаты (в терминах ДКА):

номер шаблона	1	2	3	4	5	6
сложность	60	59	61	62	78	38

Полученные экспериментальные результаты позволяют сформулировать гипотезу о том, что идентифицированные в [3] классы, являющиеся “простыми” с точки зрения НКА, просты и с точки зрения ДКА.

3.2. Поиск “сложных” классов регулярных выражений

Рассмотрим следующий набор регулярных выражений из базы системы sport, позволяющий выявлять вредоносные воздействия на pdf-файлы (обфускация, DoS-атаки и другие) и некоторые иные атаки:

```
<script.*?(&#\d+\x3b){30}/si
/Collab\x2EaddStateModel\s*\x28\s*\x7B.*cName\s*\x3A\s*\x22(\x22|\x5C\x00)/si
/JBIG2Decode.*?stream(\x0d\x0a|\x0a|\x0d)/si
/Type\s*\x2FAction.*?Launch.*?\x28\s*\x2f\x2f/w/si
/<\x21ENTITY[^\>]+SYSTEM[^\>]+http\x3A\x2F\x2F.*?\x2EloadXML/si
/obj\x3c\x3c.*?\x2fBaseFont\x2f[^\x80-\xff\x2f]*[\x80-\xff].*?endobj/s
/textEncoding=\x22.*&#\x0?D\x3b&#\x0?A\x3b/i
/dotype\s+svg\s+.*?\x28\s*?%pipe%[^\x29]*?[\x60\x3b\x7c\x23]/is
/~Rar\x21\x1A\x07\x00.*\x2E(cmd|bat|com|exe|scr|pif)/si
/~static\s+(\w+\s+)?char\s*\x2A\s*\w+\s*\x5B\x5D\s*\x3D\s*\x7B.*\x22[^\x22]{200}/si
/text3Gtrack*?textBox*?[xy]\s*\x3D*(\x22\x27\s)*\x2d\d/si
```

```
/textBox.*?[xy]\s*\x3D[\x22\x27\s]+\d{5}/si
/\x3C\x21ENTITY\s+.*\s+[\x22\x27]\x5D\x3E.*\x3Cd.*[\x22\x27]\x3E/s
```

Если мы будем рассматривать эти выражения по отдельности, то автоматы для них имеют небольшое количество состояний: 128, 34, 19, 21, 32, 32, 27, 21, 22, 228, 24, 16, 18 соответственно. При последовательном их объединении мы получим: $317 \rightarrow 697 \rightarrow 2229 \rightarrow 9549 \rightarrow 41081 \rightarrow 91249 \rightarrow 237585 \rightarrow 503400$ состояний (затем процесс был остановлен системой из-за исчерпания памяти), что позволяет классифицировать данную ситуацию как экспоненциальный взрыв.

4. Заключение

Имеющийся у нас программный комплекс позволяет отделять простые (в автоматном плане) регулярные выражения от сложных. Наши дальнейшие планы таковы: добавить в программу известные методы понижения сложности (см. [2]), расширить поддержку PCRE-нотации и постараться выявить новые классы сложных регулярных выражений.

Список литературы

- [1] Галатенко А. В., “Активный аудит”, *JetInfo*, 1999, №8, 3–28.
- [2] Александров Д. Е., “Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:1** (2014), 37–60.
- [3] Backurs A., Indyk P., “Which regular expression patterns are hard to match?”, *Proceedings of the 2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2016, 457–466.
- [4] <https://snort.org/>, страница системы выявления вторжений snort.
- [5] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, 1985, 320 с.
- [6] <https://www.pcre.org/original/doc/html/pcrepattern.html>, страница документации нотации PCRE.

Practical estimates of the complexity of regular expressions

D.E. Alexandrov, A.V. Krasnenkova

This paper describes a series of experiments on finite automata and identifies classes of potentially simple and potentially complex regular expressions leading to an exponential explosion in the number of states.

Keywords: finite automata, regular expressions, exponential explosion, computational experiments

References

- [1] Galatenko A. V., “Active audit”, *JetInfo*, 1999, №8, 3–28 (In Russian).
- [2] Alexandrov D. E., “Effective methods of implementation of checking the contents of network packets with regular expressions”, *Intellectual Systems. Theory and Application.*, **18**:1 (2014), 37–60 (In Russian).
- [3] Backurs A., Indyk P., “Which regular expression patterns are hard to match?”, Proceedings of the 2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2016, 457–466.
- [4] <https://snort.org/>, page of network intrusion detection system named snort.
- [5] Kudryavtsev V. B., Alyoshin S. V., Podkolzin A. S., “Introduction To Automata Theory”, 1985 (In Russian).
- [6] <https://www.pcre.org/original/doc/html/pcrepattern.html>, PCRE notation documentation page.

Об уравнениях вирусной динамики COVID-19

Д. В. Алексеев¹

Рассмотрена простейшая система уравнений вирусной динамики ([1]). Получено аналитическое решение системы. Также получены формулы пиковой вирусной нагрузки и времена достижения максимального и безопасного значений вирусной нагрузки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, Лотка-Вольтерра, COVID-19.

1. Введение

В данной работе рассматривается простейшая система уравнений вирусной динамики. Получено аналитическое решение системы. Также получены формулы времени достижения и величины максимальной вирусной нагрузки.

Автор выражает благодарность с.н.с. А.В. Галатенко и С.А. Нерсиану за постановку задачи и помощь в работе.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные определения.

Пусть $F(t)$ — доля не зараженных клеток по отношению к начальному моменту времени $t = t_0$, таким образом $F(0) = 1$. Пусть $V(t)$ — количество вирионов (вирусная нагрузка) в момент времени t . В работе [1] приводится следующая модель вирусной динамики

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = -\beta FV \\ \frac{dV}{dt} = \gamma FV - \delta V \end{cases} \quad (1)$$

¹*Алексеев Дмитрий Владимирович* — старший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alekseev@intsys.msu.ru.

Alekseev Dmitriy Vladimirovich — Senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Здесь β обозначает коэффициент скорости распространения инфекции, γ — скорость репликации вируса в зараженной клетке, δ — скорость гибели зараженных клеток.

Заметим, что система является редуцированной версией системы Лотки-Вольтерра, т.к. в первом уравнении отсутствует член с $a \cdot F$. Вследствие этого решения не являются периодическими.

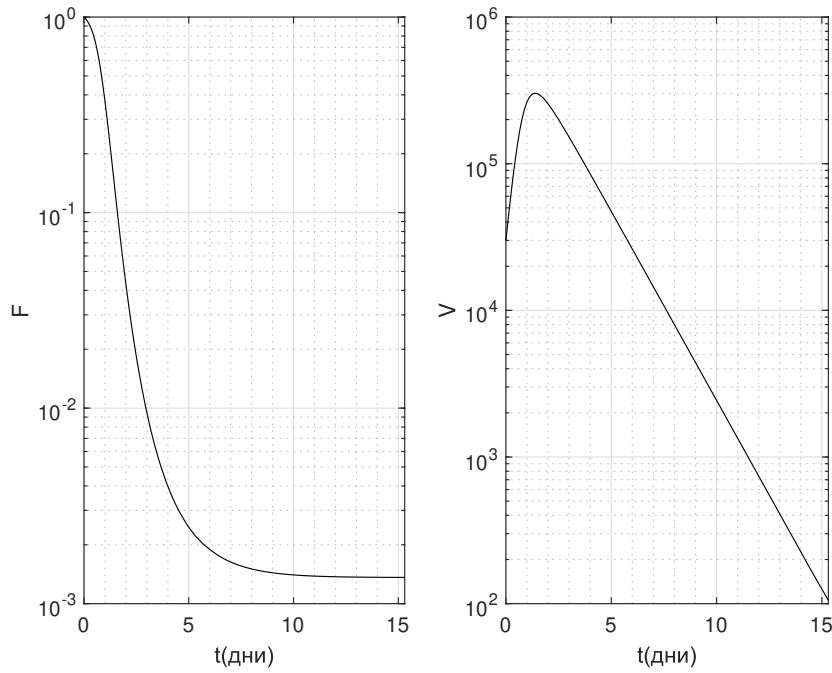


Рис. 1. Типичный вид решения системы

Типичный вид решения системы показан на рис. 1. Очевидно, что F монотонно убывает, поскольку правая часть первого уравнения меньше нуля. V монотонно возрастает на $(t_0; t_{\max})$, достигает максимального значения V_{\max} при $t = t_{\max}$, и убывает при $t > t_{\max}$. Это следует из убывания F и того, что знак $\frac{dV}{dt}$ совпадает со знаком $\gamma F - \delta$. Необходимо отметить, что на практике всегда выполнено неравенство $\gamma > \delta$.

Для этой модели получены следующие результаты:

Лемма 1. В любой момент времени t решение системы (1) удовлетворяет соотношению

$$V(t) - V_0 = \frac{\delta}{\beta} \ln F(t) + \frac{\gamma}{\beta} (1 - F(t))$$

Доказательство

Рассмотрим динамический инвариант системы Лотка-Вольтера $\beta V - \delta \ln F + \gamma F \equiv const$. Найдем константу из условий $V(0) = V_0$, получим $F(0) = 1 \Rightarrow C = V_0 + \gamma$. Подставляя константу получим утверждение леммы. \square

Теорема 1. Система (1) обладает следующим первым интегралом

$$\int dt + \int \frac{dV}{\delta \cdot V \cdot \left(1 + W_k \left(-e^{\frac{\beta}{\delta}(V-V_0) + \ln \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta}}\right)\right)} \equiv const, \quad (2)$$

где ветвь функции Ламберта выбирается $k = -1$ для участков, где V возрастает и $k = 0$ для участков убывания V .

Доказательство

Сделаем замену $f = \ln F, v = \ln V$, получим

$$\begin{cases} f' &= -\beta e^v; \\ v' &= \gamma e^f - \delta. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение и подставим f' из первого: $v'' = -\beta e^v(v' + \delta)$. Сделаем замену $p(v) = v'$, тогда $v'' = p' \cdot p$: $p' \cdot p = -\beta e^v(1 + \delta/p)$. Разделяем переменные и проинтегрируем: $\int \frac{dp}{1 + \delta/p} = -\beta \int e^v dv + C_1$. Разделим на δ : $-(p/\delta + 1) + \ln(p/\delta + 1) = \frac{\beta}{\delta} e^v + C_2$. Потенцируем и домножим на -1 : $-(p/\delta + 1) \cdot e^{-(p/\delta + 1)} = -e^{\beta/\delta e^v + C_2}$. Это выражение принадлежит $[-1/e, 0)$, поскольку левая часть принимает значения на $[-1/e; +\infty)$, а правая часть - отрицательна. Применим функцию Ламберта

$$-(p/\delta + 1) = W_k \left(-e^{\beta/\delta e^v + C_2}\right)$$

W -функция имеет две ветви на $[-1/e; 0)$, заметим, что левая часть меньше -1 при положительных p и больше -1 — при отрицательных. Выбираем W_{-1} на участке, где V возрастает, и W_0 — где убывает. Выразим и подставим $p = (\ln V)'$:

$$\frac{V'}{V} = \delta \left(-1 - W \left(-e^{\beta/\delta e^v + C_2}\right)\right) \quad (3)$$

Находим константу C_2 из условия $p(0) = \gamma - \delta$: получим $C_2 = -\gamma/\delta + \ln \gamma/\delta - \beta/\delta \cdot V_0$. Подставим в (3): $\frac{V'}{V} = \delta \left(-1 - W \left(-e^{\beta/\delta e^v + -\gamma/\delta + \ln \gamma/\delta - \beta/\delta \cdot V_0}\right)\right)$. Упростим и разделим переменные: $\frac{dV}{\delta V \left(-1 - W \left(-\gamma/\delta e^{\beta/\delta(V-V_0) - \gamma/\delta}\right)\right)} = dt$. Интегрируя обе части, получим первый интеграл (2). \square

Следствие 1. Обозначим $q = \frac{\gamma}{\delta} - \ln \frac{\gamma}{\delta}$, Максимальная величина вирусной нагрузки равна $V_{\max} = V_0 + \frac{\delta}{\beta} \cdot (q - 1)$ и достигается за время

$$t_{\max} = \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^{\ln \frac{\gamma}{\delta}} \frac{dz}{z - e^z + q + \beta/\delta \cdot V_0}$$

Следствие 2. Безопасная величина вирусной нагрузки V_h достигается за время

$$t_h = t_{\max} + \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^{Z_h} \frac{dz}{z - e^z + q + \beta/\delta \cdot V_0},$$

где $Z_h = \ln |W_0(-e^{\beta/\delta \cdot (V_h - V_0) - q})|$

Список литературы

- [1] Iwanami S, Ejima K, Kim KS, Noshita K, Fujita Y, Miyazaki T, et al., “Detection of significant antiviral drug effects on COVID-19 with reasonable sample sizes in randomized controlled trials: A modeling study.”, *PLoS Med*, **18**:7 (2021), 1–20.
- [2] Lambert J. H., “Observationes variae in mathesin puram”, *Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, **III** (1758), 128–168.

About COVID-19 viral dynamics equations

Alekseev D.V.

The simplest system of viral dynamics equations (cite covid) was studied. An analytical solution to the system was derived. Also, formulas for peak viral load and times for reaching the maximum and safe values of viral load were derived. *Keywords*: differential equations, Lotka-Volterra, COVID-19

References

- [1] Iwanami S, Ejima K, Kim KS, Noshita K, Fujita Y, Miyazaki T, et al., “Detection of significant antiviral drug effects on COVID-19 with reasonable sample sizes in randomized controlled trials: A modeling study.”, *PLoS Med*, **18**:7 (2021), 1–20.
- [2] Lambert J. H., “Observationes variae in mathesin puram”, *Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, **III** (1758), 128–168.

О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами

Н. Ф. Алексиадис¹

Целью настоящей работы является изучение замкнутых классов в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами, которые играют ключевую роль при решении проблемы полноты.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, замкнутые классы, рациональная функция

Этот доклад можно считать продолжением моих докладов, представленных на XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия ...» [1] и на Международной конференции «Мальцевские чтения» [2].

При изложении материала мы используем стандартную терминологию теории функциональных систем из книг [3] и [4].

Введем несколько стандартных обозначений:

N — множества всех натуральных чисел (включая 0),

Q — множества всех рациональных чисел,

c_0 — мощность счетного множества,

c — мощность континуум.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

Основной проблемой теории функциональных систем (ф.с.) является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. $\mathbf{F} = (F, O)$.*

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: функциональная система булевых функций [4], k -значные логики [3], функциональные системы автоматных функций [5], [6]. В этих ф.с. решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных.

Определим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами.

¹ Алексиадис Никос Филиппович — доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru.

Aleksiadis Nikos Philippovich — associate professor, National Research University «МРЕИ»

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ — полиномы с рациональными коэффициентами, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами*.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*. Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами \mathbf{F}_{RQ} — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя: *перестановку переменных; переименования переменных (без отождествления); отождествления переменных; введение фиктивной переменной; удаление фиктивной переменной; подстановку одной функции в другую*.

Следует отметить, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

Следующие две теоремы дают исчерпывающий ответ о структуре и числе конечных замкнутых классов в ф.с. \mathbf{F}_{RQ} .

Теорема 1. *В ф.с. \mathbf{F}_{RQ} существуют только следующие конечные замкнутые классы:*

- i) C , где C — произвольное конечное подмножество множества Q ;*
- ii) $I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$;*
- iii) $C \cup I_1, \{\pm c_1, \dots, \pm c_k\} \cup I_2$, где $\pm c_1, \dots, \pm c_k \in Q$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.*

Теорема 2. *В функциональной системе \mathbf{F}_{RQ}*

- i) число всех конечных замкнутых классов равно c_0 ;*
- ii) число всех бесконечных замкнутых классов равно c ;*
- iii) число всех замкнутых классов равно c .*

А следующие две теоремы о базисах замкнутых классов в ф.с. \mathbf{F}_{RQ} .

Теорема 3. *В функциональной системе \mathbf{F}_{RQ}*

- i) существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;*
- ii) существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;*
- iii) существует замкнутый класс, не имеющий базиса.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

Пример 1. Базисом замкнутого класса $A = \{2x, 4x, 8x, \dots, 2^n x, \dots\}$ является конечная система $B = \{2x\}$.

Пример 2. Базисом замкнутого класса $A = \{x, 2x, 3x, \dots, tx, \dots\}$ является бесконечная система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, \dots, px, \dots\}$, где p – любое простое число.

Пример 3. Замкнутый класс $A = [T]$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, \dots\}$ не имеет базиса.

Теорема 4. В функциональной системе \mathbf{F}_{RQ}

- i) число замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно c_0 ;
- ii) число замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно c ;
- iii) число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно c .

И, наконец, рассмотрим некоторые конкретные конечные замкнутые классы в ф.с. \mathbf{F}_{RQ} , которые играют ключевую роль при решении проблемы полноты, так как они являются предполными классами.

Пусть A – произвольное подмножество множества Q . Обозначим через $U(A)$ множество всех таких функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из F_{RQ} , что $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \in A$, если $c_1, c_2, \dots, c_n \in A$. В этом случае $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функцией, сохраняющей множество A , а $U(A)$ – классом, сохраняющим множество A .

На интересующий нас вопрос – является ли предполным классом класс всех rq -функций, сохраняющих конечное множество констант, ответ дает следующая теорема.

Теорема 5. Если A – произвольное конечное подмножество множества Q , то класс $U(A)$ является предполным классом в ф.с. \mathbf{F}_{RQ} .

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, профессору В. Б. Кудрявцеву за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

Список литературы

- [1] Алексиадис Н. Ф., “О рациональных A -функциях с рациональными коэффициентами”, XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», 2021, 97–101.
- [2] Алексиадис Н. Ф., “О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами”, Международная конференция «Мальцевские чтения», 2021, 143.

- [3] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, Изд-во МГУ, Москва, 1982, 157 с.
- [4] Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Изд-во Наука, Москва, 1986, 384 с.
- [5] Бабин Д. Н., “О задаче полноты для автоматов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*. Т. 23, вып. 4, 2020, 82-83.
- [6] Часовских А. А., “Проблема полноты в классах линейных автоматов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*. Т. 22, вып. 2, 2018, 151-154.

Closed classes in the functional system of rational functions with rational coefficients

Никос Филиппович Алексиадис

We study closed classes of the functional system of rational functions with rational coefficients that play the key role in deciding completeness.

Keywords: functional system, completeness, closed classes, rational function

References

- [1] Aleksiadis N. Ph., “Rational A -functions with rational coefficients”, *Proc. 19th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“*, 2021, 97–101 (In Russian).
- [2] Aleksiadis N. Ph., “The problem of completeness for rational functions with rational coefficients”, *Proc. Int. Conf. “Maltsev Readings“*, 2021, 143 (In Russian).
- [3] Kudryavtsev V. B., *Functional systems*, MSU Publishers, Moscow, 1982 (In Russian), 157 pp.
- [4] Yablonsky S. V., *Introduction to discrete mathematics*, Nauka Publishers, Moscow, 1986 (In Russian), 384 pp.
- [5] Babin D. N., “On the completeness problem for automata”, *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*. Vol. 23(4), 2020, 82–83 (In Russian).
- [6] Chasskikh A. A., “The problem of completeness in classes of linear automata”, *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*. Vol. 22(2), 2018, 151–154 (In Russian).

Градуированные квазифробениусовы кольца и модули

И. Н. Балаба¹, А. В. Михалёв²

В работе рассмотрены градуированные квазифробениусовы кольца и модули, установлены связи между различными определениями, получен ряд эквивалентных характеристик.

Ключевые слова: градуированные кольца и модули, квазифробениусовы кольца, квазифробениусовы модули, фробениусовы алгебры

1. Введение

Фробениусовы алгебры являются одним из важных классов алгебр, изучаемых в теории представлений конечномерных алгебр. Впервые они появились в работе Ф.Г.Фробениуса еще в начале XX века. Квазифробениусовы кольца являются их естественным обобщением. Класс квазифробениусовых колец включает в себя все артиновы полупростые кольца, а также все групповые алгебры конечных групп (не обязательно полупростые).

В работах Накаямы [1, 2] фробениусовые и квазифробениусовые кольца и алгебры были охарактеризованы в терминах аннуляторов, а Азума [3] с помощью аннуляторных условий определил квазифробениусовы модули.

В последние десятилетия интерес к квазифробениусовым кольцам и модулям возрастает в связи с их исключительной ролью в развитии теории линейных кодов и рекурент [4].

Градуированным фробениусовым алгебрам посвящены работы [5, 6, 7], а в [8] дано несколько эквивалентных характеристик градуированных квазифробениусовых колец.

В работе рассмотрены градуированные квазифробениусовы кольца и модули, установлены связи между различными определениями, получен ряд эквивалентных характеристик.

¹*Балаба Ирина Николаевна* — профессор каф. алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, e-mail: ibalaba@mail.ru

Balaba Irina Nikolaevna — professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Department of Algebra, Mathematical analysis and Geometry

²*Михалёв Александр Васильевич* — заведующий каф. теоретической информатики механико-математического ф-та МГУ, e-mail: aamikhalev@mail.ru

Mikhalev Alexander Vasilyevich — head of Department, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of Theoretical Informatics

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем»

2. Основные понятия и результаты

Все рассматриваемые кольца ассоциативные с единицей, модули унитарны, градуированы мультипликативной группой G . Градуированные аналоги стандартных определений будем обозначать приставкой gr -. Таким образом, градуированное кольцо называется gr -*артиновым* (справа), если оно удовлетворяет условию обрыва убывающей цепочки правых градуированных идеалов.

Градуированное кольцо R называется gr -*квазифробениусовым* или gr -*QF-кольцом*, если оно gr -артиново слева и справа и gr -самоинъективно справа (слева) и gr -*фробениусовым*, если оно gr -квазифробениусово и $S^{gr}(R) = R/J^{gr}(R)$, где $S^{gr}(R)$ – градуированный цоколь, а $J^{gr}(R)$ – градуированный радикал Джекобсона кольца R .

Для подмножества $S \subseteq R$ через $l_R(S)$ и $r_R(S)$ обозначим соответственно левый и правый аннуляторы множества S , т.е.

$$l_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}, \quad r_R(S) = \{a \in A \mid Sa = 0\}.$$

Если множество S вместе с каждым своим элементом содержит и все его однородные компоненты, то $l(S)$ и $r(S)$ являются соответственно левым и правым градуированными идеалами кольца R .

Для любого градуированного R -модуля M можно определить градуированное кольцо эндоморфизмов $S = \text{END}_R(M)$ и дуальный градуированный модуль $M^* = \text{HOM}_R(M, R)$.

Теорема 1. *Для градуированного кольца R следующие условия эквивалентны:*

1. R – gr -QF-кольцо;
2. R – gr -артиново кольцо и для любого левого градуированного идеала L и любого правого градуированного идеала K кольца R выполнены следующие аннуляторные условия: $l_R(r_R(L)) = L$, $r_R(l_R(K)) = K$;
3. градуированные модули, дуальные к gr -неприводимым правым R -модулям и к gr -неприводимым левым R -модулям, также являются gr -неприводимыми.

Каждое градуированное квазифробениусово кольцо является gr -квазифробениусовым. В то же время gr -квазифробениусово кольцо может не быть квазифробениусовым. Примером является групповой кольцо бесконечной группы с естественной градуировкой.

Градуированный бимодуль ${}_R Q_S$ называется *gr-квазифробениусовым* или *gr-QF-бимодулем*, если для любого максимального левого градуированного идеала $I \subseteq_R R$ его правый аннулятор $r_Q(I) = \{q \in Q \mid Iq = 0\}$ в Q или нуль или gr-неприводимый S -модуль и для любого максимального правого градуированного идеала $J \subseteq S_S$ его левый аннулятор $l_Q(J) = \{q \in Q \mid qJ = 0\}$ в Q или нуль или gr-неприводимый S -модуль.

Градуированный модуль ${}_R Q$ назовем *gr-квазифробениусовым модулем* или *gr-QF-модулем*, если для любого натурального n и любого конечно порожденного градуированного подмодуля U модуля $\hat{Q} = Q(g_1) \oplus Q(g_2) \oplus \dots \oplus Q(g_n)$, здесь $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$, $Q(g_i)$ – сдвиг модуля Q , фактор модуль \hat{Q}/U копорождается модулем Q и каноническое отображение $\text{НОМ}_R(\hat{Q}, Q) \longrightarrow \text{НОМ}_R(U, Q)$ – сюръективно.

Теорема 2. Для точного градуированного бимодуля ${}_R Q_S$ над конечными градуированными кольцами эквивалентны следующие условия:

1. ${}_R Q_S$ – gr-QF-бимодуль;
2. ${}_R Q_S$ – конечный gr-QF-бимодуль;
3. ${}_R Q$ – gr-QF-модуль и $S = \text{END}_R(Q)$;
4. для любых градуированных подмодулей $M \subseteq_R Q$ и $N \subseteq Q_S$ справедливы равенства $N = r_Q(l_R(N))$, $M = l_Q(r_S(M))$.

Теорема 3. Для gr-артинова кольца R эквивалентны следующие условия:

1. R – gr-QF-кольцо;
2. ${}_R R_R$ – gr-QF-бимодуль.

Пусть k – поле и $A \bigoplus_{g \in G} A_g$ – градуированная k -алгебра. Левому модулю ${}_A A$ как векторному пространству над полем k можно сопоставить дуальное векторное пространство $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$, являющееся правым A -модулем, если положить $(\varphi a)(x) = \varphi(ax)$ для всех $\varphi \in A^*$, $a, x \in A$.

Если алгебра A конечномерна, то A^* является правым градуированным A -модулем со следующей градуировкой

$$A_g^* = \{f \in A^* \mid f(A_h) = 0 \text{ для всех } h \neq g^{-1}\} \quad (g \in G).$$

Конечномерная градуированная k -алгебра A называется *gr-фробениусовой*, если левые градуированные A -модули ${}_A A$ и $(A_A)^*$ изоморфны и *gr-квазифробениусовой*, если модули ${}_A A$ и $(A_A)^*$ имеют одни и те же различные неразложимые компоненты.

Теорема 4. Конечномерная градуированная алгебра A является gr-фробениусовой в том и только том случае, если кольцо A – gr-фробениусово.

Конечномерная градуированная алгебра A является gr-квазифробениусовой в том и только том случае, если для каждого левого градуи-

рованного идеала I и каждого правого градуированного идеала J алгебры A справедливы равенства $l_A(r_A(I)) = I$, $r_A(l_A(J)) = J$.

Список литературы

- [1] Nakayama T., “On Frobeniusean algebra. I”, *Ann. of Math.*, **40**:2 (1939), 611–633.
- [2] Nakayama T., “On Frobeniusean algebra. II”, *Ann. of Math.*, **42**:1 (1941), 1–21.
- [3] Azumaya G., “A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules)”, *Am. J. Math.*, **81**:1 (1959), 249–278.
- [4] Куракин В.Л., Кузьмин А.С., Михалев А.В., Нечаев А.А., *Линейные рекуррентны над кольцами и модулями*, Современ, математика и ее прил. Тематич. обзоры. Т. 10. Алгебра – 2, «ВИНИТИ», Москва, 1994.
- [5] Dăscălescu S., Năstăsescu C., Năstăsescu L., “Frobenius algebras of corepresentations and group-graded vector spaces”, *Journal of Algebra*, **406** (2014), 226–250.
- [6] Wakamatsu T., “On graded Frobenius algebras.”, *Journal of Algebra*, **267** (2003), 377–395.
- [7] Балаба И.Н., “Градуированные фробениусовы алгебры и кольца”, *Тезисы докладов*, Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 2018), Изд-во МГУ, Москва, 2018, 34–37.
- [8] Краснова Е. Н., “Градуированные квазифробениусовы кольца”, *Материалы конференции*, XII Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященная восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева (Тула, 2014), Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н.Толстого, Тула, 2014, 168–171.

Graded quasi-Frobenius rings and modules

Balaba I.N., Mikhalev A. V.

The present paper is concerned with graded quasi-Frobenius rings and modules. The connection between different definitions is established, a series of equivalent characteristics are obtained.

Keywords: graded rings and modules, quasi-Frobenius rings, quasi-Frobenius modules, Frobenius algebra

References

- [1] Nakayama T., “On Frobeniusean algebra. I”, *Ann. of Math.*, **40**:2 (1939), 611–633.
- [2] Nakayama T., “On Frobeniusean algebra. II”, *Ann. of Math.*, **42**:1 (1941), 1–21.
- [3] Azumaya G., “A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules)”, *Am. J. Math.*, **81**:1 (1959), 249–278.

- [4] Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., *Linear recurring sequences over rings and modules*, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennaya Matematika I Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzor. Vol 10. Algebra – 2, «VINITI», Moscow, 1994 (In Russian).
- [5] Dăscălescu S., Năstăsescu C., Năstăsescu L., “Frobenius algebras of corepresentations and group-graded vector spaces”, *Journal of Algebra*, **406** (2014), 226–250.
- [6] Wakamatsu T., “On graded Frobenius algebras”, *Journal of Algebra*, **267** (2003), 377–395.
- [7] Balaba I. N., “Graded Frobenius algebras and rings”, *Abstracts of reports, International algebraic conference dedicated to the 110th anniversary of the birth of Professor A. G. Kurosh* (Moscow, 2018), Publishing house of MSU, Moscow, 2018, 34–37 (In Russian).
- [8] Krasnova E.N., “Graded quasi-Frobenius rings”, *Proceedings, XII International conference: Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application, dedicated to 80-th anniversary of professor V. N. Latyshev* (Tula, 2014), Publishing house of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, 2014, 168–171 (In Russian).

Optimization of neural network learning via system with automata approach

В. А. Бирюкова¹

В данной работе представлена автоматная модель обучения нейронных сетей, реализованная с помощью языка программирования высокого уровня python и апробированная на задаче бинарной классификации. Также внутри рассматриваемой системы реализована процедура автоматизации обучения нейронных сетей с помощью выбора стратегии обучения с точки зрения «лучших практик».

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, конечный автомат, бесконечный автомат, система для работы с нейронными сетями, автоматизация обучения нейронных сетей, оптимизация выбора гиперпараметров с использованием «лучших практик», компьютерное зрение, бинарная классификация.

В последнее время нейронные сети получили весьма широкое распространение, поскольку данные модели могут решать совершенно разные задачи и поэтому находят применение во многих областях, таких как научные исследования (моделирование биологических нейронных сетей)[1], финансовый сектор (прогнозирование котировок на основе статистических данных и новостных сообщений)[2], медицина (распознавание аномалий по снимкам пациентов) [3], проектирование беспилотных автомобилей [4] и т.д.

Искусственные нейронные сети (англ. artificial neural network, ANN) [5] — это математические модели и их программные и аппаратные реализации. Как математическая модель, нейронная сеть зависит от огромного количества параметров, процесс настраивания которых принято называть обучением нейронной сети. Помимо параметров, значения которых находятся во время обучения, нейронная сеть и сам процесс обучения имеют ряд параметров, требующих ручной настройки, т. н. гиперпараметров. Как набор гиперпараметров, так и их значения имеют многочисленные вариации даже в рамках решения очень узкого круга задач, поэтому выбор оптимальной стратегии обучения нейронной сети, которая бы после обучения удовлетворяла поставленным в задаче требованиям, остается процессом весьма трудным и требующим в существенной степени индивидуального подхода.

¹*Бирюкова Вероника Андреевна* — студент кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ, e-mail: biryukovaveronika@mail.ru.

Biryukova Veronika Andreevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Ввиду вышеописанных причин системы, позволяющие автоматизировать процесс подбора гиперпараметров сети, и, тем более, дающие возможность использовать такой мощный инструмент для решения задач из других научных сфер, весьма актуальны и востребованы. К решению данной проблемы существуют различные подходы, как чисто технические (программные), так и более концептуально-содержательные методы.

Например, библиотеки языка программирования python sklearn и keras имеют свои модули для автоматизации подбора гиперпараметров нейронной сети. О качестве полученных результатов и о возможностях улучшения процесса обучения нейронных сетей уже может судить эксперт.

Концептуально-содержательные подходы к автоматизации обучения нейронных сетей существуют, однако большинство из них имеют ограничения на тип используемой архитектуры. Данную проблему решают, например, с помощью алгоритмов «каскадной корреляции» [6] и «дальновидного мышления» [7] и их вариаций.

Кроме того, поскольку обучение нейронной сети можно рассматривать как некоторую оптимизационную задачу, то для решения вопроса об автоматизации обучения нейронных сетей можно использовать системы, изучающие моделирование логических процессов, такие как «автоматический решатель математических задач» А.С. Подколзина [8].

Предлагаемая в данной работе интеллектуальная система [9] и её реализация позволяют автоматизировать обучение нейронных сетей для решения различных задач, также в рамках этой системы возможно исполнение вспомогательных функций, таких как работа с имеющимися базами данных, обученными ранее моделями и накопленным в данной системе опытом обучения нейронных сетей. При создании данной системы используется автоматный подход [10]. Рассматриваемая система представляет собой взаимодействие двух абстрактных автоматов. Один автомат отвечает за управление системой – «управляющий» автомат (далее УА), другой – «исполняющий» автомат (далее ИА), который решает поставленные перед ним управляющим автоматом подзадачи.

Пользователь задает некоторый начальный набор параметров – предлагаемая системе задача и её характеристики, – и тем самым задавая начальные состояния обоих автоматов. Рассматриваются задачи из области компьютерного зрения – задачи машинного обучения, где объектами выступают изображения [11]. В процессе работы системы УА дает ИА указания, какую локальную задачу следует выполнить, и в зависимости от результата (выполнена подзадача или нет) переходит в соответствующее состояние. Если подзадача не выполнена, но система имеет вари-

анты решения этой проблемы, например предложение изменить условия поставленной перед системой задачи, тогда УА переходит в состояния, со второй компонентой «userdecision», где происходит взаимодействие с пользователем (с внешней средой), иначе система заканчивает свою работу.

Управляющий автомат – это конечный автомат без входа и выхода с несколькими начальными и заключительными состояниями. Состояние этого автомата задается двумя компонентами как прямое произведение двух конечных алфавитов (T, N) :

$T = \{ 'training', 'testing', 'database', 'history' \} = \{ t_0, t_1, t_2, t_3 \}$ – тип решаемой системой задачи (обучение, тестирование нейронной сети, работа с базами изображений, работа с сохраненной в этой системе «историей» обучения нейронных сетей соответственно).

$N = \{ 'check', 'database', 'userdecision', 'train', 'test', 'data', 'history', 'done' \} = \{ q_0, \dots, q_7 \}$ – название локально решаемой подзадачи.

Множество начальных состояний – $\{ (t, 'check'), t \in T \}$.

Множество заключительных состояний – $\{ (t, 'done'), t \in T \}$.

Функция переходов $Q(q, t) = \tilde{Q}(\psi(q, t), q, t)$, где $\psi(q, t) \in \{0, 1\}$ – выход ИА, который интерпретируется как выполнена ли локальная задача или нет.

На рисунке 1 представлена обобщенная диаграмма переходов УА.

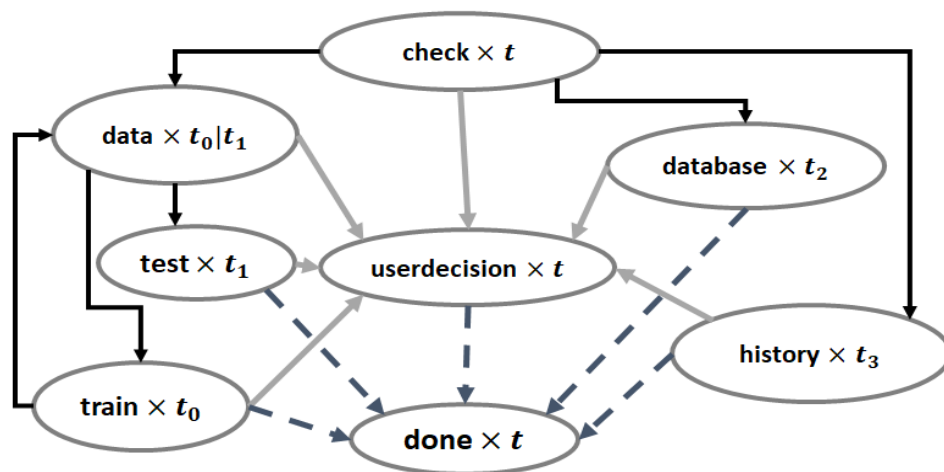


Рис. 1. Обобщенная диаграмма переходов управляющего автомата, $t \in T$

Компонента состояния УА, отвечающая блоку решения локальной подзадачи:

- *'check'* – любое начальное состояние имеет это значение второй компоненты, в данном блоке происходит проверка функционирования ИА, при $t \in \{ 'training', 'testing' \}$ ИА проводит поиск в своей внутренней базе моделей по соответствующему запросу;
- *'data'* – такое значение компоненты можем получить при $t \in \{ 'training', 'testing' \}$, в этом блоке ИА формирует множества для обучения и\или тестирования нейронной сети;
- *'userdecision'* – система взаимодействует с пользователем;
- *'train'* – в этом блоке происходит обучение нейронной сети ($t = 'training'$);
- *'test'* – проводится тестирование нейронной сети ($t = 'testing'$);
- *'database'* – блок работы с базами изображений ($t = 'database'$);
- *'history'* – блок работы с сохраненной в системе историей обучения нейронных сетей ($t = 'history'$);
- *'done'* – заключительное состояние УА, в него попадаем как при успешном выполнении поставленной задачи, так и при невозможности её решения.

Исполняющий автомат – это бесконечный автомат, представляющий собой часть системы, которая непосредственно занимается решением подзадач, поступающих от УА. Начальное состояние ИА задается по характеристикам задачи, поступающим из внешней среды. Состояние ИА s ($s \in S$) задается как прямое произведение нескольких конечных и бесконечных алфавитов S . Заключительное состояние ИА – одно, в него попадаем, если поставленная задача была решена или решить задачу не представляется возможным (УА переходит в одно из своих заключительных состояний).

В роли входного значения ИА выступает состояние УА (q, t) (у ИА конечный входной алфавит), которое указывает какую подзадачу требуется решить. Система выполняет соответствующие действия, выдает результирующее значение функции выходов $\psi(q, t) = \tilde{\psi}(q, t, s_i) = r$, $r \in \{0, 1\}$, которое интерпретируется УА как «решена» или «не решена» данная подзадача, а ИА переходит в новое состояние s_j ($\varphi(q, t, s_i) = s_j$, $s_j \in S$).

На рисунке 2 представлена обобщенная схема системы для работы с нейронными сетями.

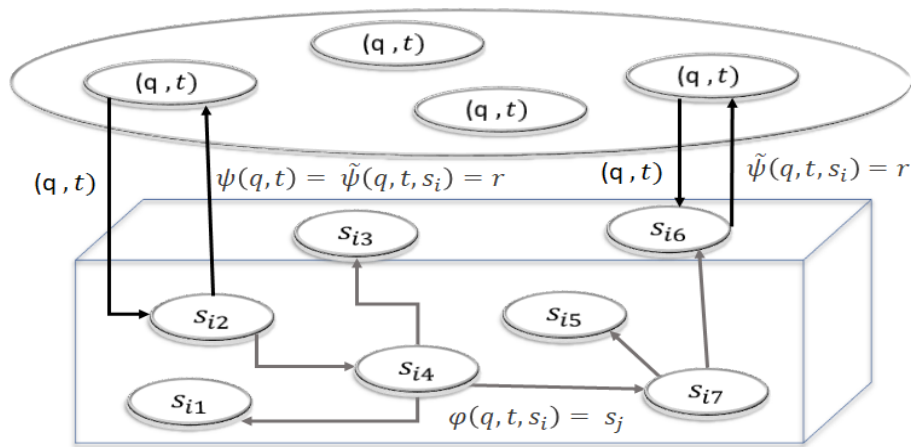


Рис. 2. Схема системы для работы с нейронными сетями

Для любого типа задачи в начальный момент времени в ИА передается специальный параметр с формализованным описанием задачи.

При $(t = 'database')$ в начальный момент времени ИА получает описание запроса к базе изображений. Подобным запросом может быть «проверить количество датасетов изображений в общей базе» или «предъявить список изображений, на которых есть объекты определенных категорий» и т. п.

При $(t = 'history')$ ИА получает из внешней среды содержательную информацию о задаче, связанной с накопленной в системе историей обучения моделей. Например, задача может состоять в просмотре статистики по нейронным сетям, которые обучались классифицировать 2 класса – «кошки» и «собаки».

При $(t = 'testing')$ задача состоит в тестировании предъявленной модели на объектах определенной категории.

При $(t = 'training')$ описание задачи – это категория задачи компьютерного зрения ('classification', 'detection', 'segmentation'), список классов объектов, которые будут распознаваться нейронной сетью ('cat', 'dog' и т. д.) и цель, например, распознавать с точностью 0.9 объекты из соответствующего списка. Уже в состоянии ('check', 'training') (далее компонента 'training' опущена) ИА проводит поиск в базе обученных нейронных сетей на предмет наличия уже обученной модели, соответствующей предъявляемым требованиям. Если такая сеть найдена, то она предъявляется пользователю с предложением закончить работу системы, в случае отказа система переходит в состояние 'data', где по списку категорий изображений создаются 3 множества для обучения и последующего тестирования модели. Затем начинается процесс обучения нейронной сети, в котором система самостоятельно определяет, как будет проходить

процесс обучения нейронной сети, как необходимо изменить гиперпараметры при обучении сети и т. д. Обучение продолжается, пока не будет достигнута требуемая цель, или не будут исчерпаны все возможности системы.

Автоматизация обучения нейронных сетей происходит за счет механизма с использованием «лучших практик». В системе хранится статистика обучения нейронных сетей, именуемая «историей», с описанием процедуры обучения нейронной сети – какая была категория задачи, какие гиперпараметры использовались при обучении, на каких изображениях сеть обучалась, где хранится эта сеть, какие результаты были достигнуты при обучении, какие объекты распознаются сетью и т. д. Первые примеры были записаны экспертом. Последующие записи – это уже результаты работы самой системы.

Из этой истории выбираются практики, соответствующие текущей задаче, затем одна запись определяется в качестве первоначальной стратегии обучения. После чего проводится обучение по этой стратегии. Затем, если требуется скорректировать процедуру обучения, происходит изменение параметров обучения и процесс обучения продолжается.

При необходимости после работы в рамках одной стратегии выбирается другая стратегия и процедура обучения проводится ещё раз. По результатам решения задачи статистическая база пополняется новой информацией о проведенном эксперименте, и уже эта информация может быть использована при решении других задач. Следовательно, рассматриваемая система является самообучающейся.

Таким образом, представленная система решает круг задач, связанных с обучением нейронных сетей. Сама система может быть рассмотрена с точки зрения теории автоматов как композиция двух автоматов – управляющего и исполняющего. Поставленная перед системой задача разбивается на подзадачи, которые последовательно подаются управляющим автоматом исполняющему для их последующего решения, и в зависимости от результата этого процесса определяется следующая подзадача.

В системе используется механизм для автоматизации обучения нейронных сетей – использование при обучении «лучших практик», накопленных в соответствующей базе системы. По результатам проведенного эксперимента в системе сохраняется информация о полученном опыте, который позднее будет ею использоваться при решении схожих задач. Другими словами, сама система является самообучающейся моделью.

Помимо обучения система предполагает выполнение вспомогательных функций, возникающих при работе с нейронными сетями, таких как

тестирование уже обученных моделей, работа с базами данных и анализ накопленного системой опыта.

Проводились эксперименты по обучению нейронных сетей внутри данной системы. Были обучены модели, способные решать задачу бинарной классификации с точностью более 90%. По результатам этих экспериментов система начала накапливать опыт по обучению нейросетевых моделей, который в дальнейшем использовался для решения других задач.

Разрабатываемая система предполагает взаимодействие с пользователем, и может рассматриваться как рекомендательная система для специалистов в области искусственных нейронных сетей, так и как инструмент для обучения нейронных сетей с возможностью последующего использования этих искусственных нейронных сетей в других областях, что делает разработку подобных систем весьма актуальной и востребованной задачей.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

Список литературы

- [1] P.R.Patnaik, “Applications of neural networks to recovery of biological products”, *Biotechnology Advances*, **1:6** (1999), 477-488.
- [2] Victor Skuratov, Konstantin Kuzmin, Igor Nelin and Mikhail K. Sedankin, “Creation of a neural network algorithm for automated collection and analysis of statistics of exchange quotes graphics”, *EUREKA: Physics and Engineering*, **3** (2020), 22-29.
- [3] Jerry A Darsey, William O Griffin, Sravanthi Joginipelli, Venkata Kiran Melapu, “Architecture and biological applications of artificial neural networks: a tuberculosis perspective”, *Methods in molecular biology*, 2015, 269-283.
- [4] Luca Caltagirone, Mauro Bellone, Lennart Svensson, Mattias Wahde, “LIDAR-camera fusion for road detection using fully convolutional neural networks”, *Robotics and Autonomous Systems*, **111** (2019), 125-131.
- [5] Саймон Хайкин, *Нейронные сети: полный курс*, 2-е издание, Издательский дом «Вильямс», Москва, 2006, 1104 с.
- [6] Yang, J. and Honavar, V., “Experiments with the Cascade-Correlation Algorithm”, *Microcomputer Applications*, **17:2** (1998), 40-46
- [7] Steven Abreu, *Automated Architecture Design for Deep Neural Networks*, arXiv: arxiv.org/abs/1908.10714.
- [8] А.С. Подколзин, *Компьютерное моделирование логических процессов. Архитектура и языки решателя задач*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2008, 1024 с.
- [9] В.Б.Кудрявцев, Э.Э. Гасанов, А.С. Подколзин, *Основы теории интеллектуальных систем*, МАКС Пресс, Москва, 2016, 612 с.
- [10] В.Б. Кудрявцев, С.В. Алёшин, А.С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов: Монография.*, 2-е издание, Издательство Московского университета, Москва, 2019, 436 с.

- [11] Ян Эрик Солем, *Программирование компьютерного зрения на языке Python*, ДМК Пресс, Москва, 2016, 312 с.

Viryukova V.A.

Автоматный подход для оптимизации работы системы обучения нейронных сетей

This paper presents an automata model for learning neural networks, implemented using the high-level programming language python and tested on the problem of binary classification. Also, within the system under consideration, a procedure for automating the neural network training by choosing a training strategy from the point of view of "best practices" is implemented.

Keywords: artificial neural networks, finite automata, non-finite automata, system for working with neural networks, automated machine learning, autoML, hyperparameter optimization via best practices, computer vision, CV, binary classification.

References

- [1] P.R.Patnaik, "Applications of neural networks to recovery of biological products", *Biotechnology Advances*, **1:6** (1999), 477-488
- [2] Victor Skuratov, Konstantin Kuzmin, Igor Nelin and Mikhail K. Sedankin, "Creation of a neural network algorithm for automated collection and analysis of statistics of exchange quotes graphics", *EUREKA: Physics and Engineering*, **3** (2020), 22-29
- [3] Jerry A Darsey, William O Griffin, Sravanthi Joginipelli, Venkata Kiran Melapu, "Architecture and biological applications of artificial neural networks: a tuberculosis perspective", *Methods in molecular biology*, 2015, 269-283
- [4] Luca Caltagirone, Mauro Bellone, Lennart Svensson, Mattias Wahde, "LIDAR-camera fusion for road detection using fully convolutional neural networks", *Robotics and Autonomous Systems*, **111** (2019), 125-131
- [5] Haykin Simon, *Neural Networks. A comprehensive foundation*, the second edition, «Williams», Moscow, 2006 (In Russian), 1104 с.
- [6] Yang, J. and Honavar, V., "Experiments with the Cascade-Correlation Algorithm", *Microcomputer Applications*, **17:2** (1998), 40-46
- [7] Steven Abreu, *Automated Architecture Design for Deep Neural Networks*, arXiv: arxiv.org/abs/1908.10714.
- [8] Podkolzin A.S., *Computer Simulation of Logical Processes. Solver Architecture and Task Solver Languages*, Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russian), 1024 с.
- [9] Kudryavtsev V.B., Gasanov E.E., Podkolzin A.S., *Fundamentals of Theory of Intelligent Systems*, MAKS Press, Moscow, 2016 (In Russian), 612 с.
- [10] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, the second addition, MSU Press, Moscow, 2019 (In Russian), 436 с.
- [11] Jan Erik Solem, *Programming Computer Vision with Python*, ДМК Пресс, Moscow, 2016 (In Russian), 312 с.

Construction of a hyperplane arrangement with a specific set of simple paths in a graph and its properties

А. И. Болотников¹

С помощью характеристического многочлена пучка гиперплоскостей можно посчитать количество регионов пучка. Это позволяет использовать пучки гиперплоскостей в решении сложных комбинаторных задач.

В работе изучается пучок гиперплоскостей, построенный по подмножеству множества всех простых путей графа. Полученные результаты связывают этот пучок с задачей о нахождении паросочетания с наибольшим весом в графе, а также позволяют найти характеристический многочлен построенного пучка для некоторых графов.

Ключевые слова: пучок гиперплоскостей, графический пучок, задача о максимальном паросочетании.

1. Введение

В работе [1] был получен результат, позволяющий найти количество регионов пучка гиперплоскостей с помощью его характеристического многочлена. Этот результат позволяет использовать пучки гиперплоскостей в комбинаторике. Например, с их использованием было подсчитано количество пороговых функций [2].

В работе [3] по множеству всех ребер графа был построен пучок, названный графическим, и были доказаны его свойства. В частности, было доказано, что характеристический многочлен графического пучка равен хроматическому многочлену графа, а количество регионов графического пучка равно количеству ациклических ориентаций в графе.

В данной работе строится пучок по подмножеству множества всех простых путей графа. Показана связь пучка с задачей о максимальном паросочетании и изучена возможность наличия одинаковых пучков у неизоморфных графов. Также получены значения характеристического многочлена пучка для некоторых графов.

При получении результатов использовались определения и теоремы о пучках гиперплоскостей, взятые из [4].

¹*Болотников Алексей Игоревич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotnikov-94@mail.ru.

Bolotnikov Aleksey Igorevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и результаты

Пучок гиперплоскостей - конечное множество гиперплоскостей в некотором векторном пространстве. *Регион* пучка - связная компонента дополнения к объединению гиперплоскостей пучка. *Ранг* пучка - размерность линейного пространства, натянутого на вектора нормалей к гиперплоскостям пучка.

Для произвольного пучка гиперплоскостей A следующим образом определяется частично упорядоченное множество $L(A)$: элементы $L(A)$ - всевозможные непустые пересечения гиперплоскостей пучка, частичный порядок \leq таков: $x \leq y \Leftrightarrow x \supseteq y$.

Функция Мёбиуса частично упорядоченного множества P определяется так:

- 1) $\mu(x, x) = 1 \quad \forall x \in P$
- 2) $\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \quad \forall x < y \in P$

Функция Мёбиуса от одного элемента $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$, где $\hat{0}$ - наименьший элемент частично упорядоченного множества, т.е. элемент, меньший любого другого элемента частично упорядоченного множества.

Характеристический многочлен пучка A определяется следующей формулой:

$$\chi_A(t) = \sum_{x \in L(A)} \mu(x) t^{\dim(x)}$$

Пусть $G(V, E)$, $|E|=n$ - граф без петель и кратных ребер. Рассмотрим в пространстве R^n следующие гиперплоскости: для любой последовательности ребер $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$, образующей простой незамкнутый путь или простой цикл четной длины в графе G , берем гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_n = 0$. Все такие гиперплоскости образуют некоторый пучок. Данный пучок будет далее обозначаться $PA(G)$.

Для пучка $PA(G)$ получены следующие результаты:

Утверждение 1. Пусть $G(V, E)$, $|E|=n$ - граф без петель и кратных ребер. Выберем произвольный регион пучка $PA(G)$ и выберем два вектора из этого региона. Для каждого вектора рассмотрим задачу о максимальном паросочетании в графе G с этим вектором в качестве вектора весов на ребрах. Утверждается, что эти две задачи имеют одно и то же решение, т.е. для обоих векторов одно и то же паросочетание будет иметь наибольший вес.

Утверждение 2. Пусть G_1, G_2 - графы без петель, кратных ребер и изолированных вершин, и $PA(G_1) = PA(G_2)$ Тогда G_1 и G_2 изоморфны.

ны, за исключением случая, когда один из графов содержит компоненту связности, изоморфную K_3 , а другой - компоненту, изоморфную $K_{1,3}$.

Утверждение 3. Пусть G - граф без петель, кратных ребер и изолированных вершин, G_1, G_2, \dots, G_k - его компоненты связности.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = \chi_{PA(G_1)} \cdot \chi_{PA(G_2)} \cdot \dots \cdot \chi_{PA(G_k)}$

Утверждение 4. Пусть G - дерево.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = (t-1)(t-2)\dots(t-n)$

Утверждение 5. Пусть G_1, G_2 - графы без петель и кратных ребер, причем существуют подграфы $H_1 \subset G_1, T_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2, T_2 \subset G_2$ такие, что:

- 1) $G_1 = H_1 \cup T_1, G_2 = H_2 \cup T_2$
- 2) $H_1 \cap T_1 = \{u\}, H_2 \cap T_2 = \{v\}$, где u - вершина в G_1 , v - вершина в G_2
- 3) существует изоморфизм из H_1 в H_2 , переводящий u в v
- 4) T_1 и T_2 - деревья с одинаковым ненулевым количеством ребер

Тогда $\chi_{PA(G_1)} = \chi_{PA(G_2)}$

Утверждение 6. Пусть G_1 - граф из утверждения 5, в котором $H_1 = K_3$.

Тогда

$$\chi_{PA(G_1)} = (t-1)(t-3)(t-4)\dots(t-(n-2))(t-(n-1))(t-(n-1))(t-n),$$

где n - количество ребер в графе G_1

Утверждение 7 Пусть G - граф, состоящий из одного простого цикла, n - количество ребер в G .

Тогда

- 1) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-n)^{n-1}$, если n - четное,
- 2) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-3)(t-5)\dots(t-(2k-1))\dots(t-(2n-3))(t-(n-1))$, если n - нечетное.

Список литературы

- [1] T. Zaslavsky, "Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes", *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).
- [2] Ирматов А.А., "Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions", *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211-226.

- [3] C.Green, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”. *Transactions of the American Mathematical Society*, **280**:1 (1983), 97–126.
- [4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics*. V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.

Bolotnikov A.I.

Построение пучка гиперплоскостей по определенному множеству простых путей графа и его свойства

There exists a way to calculate the amount of regions of a hyperplane arrangement using its characteristic polynomial. This allows using hyperplane arrangements in solutions of combinatorial problems.

This paper considers a hyperplane arrangement constructed with a subset of a set of all simple paths in a graph. Results in this paper connect this arrangement to the maximum matching problem and allow to calculate its characteristic polynomial for specific cases of the initial graph.

Keywords: hyperplane arrangement, graphical arrangement, maximum matching problem.

References

- [1] T. Zaslavsky, “Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).
- [2] Irmatov A.A., “Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions”, *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211–226.
- [3] C.Green, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”. *Transactions of the American Mathematical Society*, **280**:1 (1983), 97–126.
- [4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics*. V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.

Поиск ближайшего соседа на плоскости с помощью клеточного автомата с локаторами

Д. И. Васильев¹

В данной статье описывается клеточный автомат с локаторами, решающий задачу поиска ближайшего соседа. Задача заключается в том, чтобы из конечного множества точек выделить одну, самую близкую к заранее определенной “центральной” точке. В отличие от классической модели клеточного автомата, в рассматриваемой модели допускается мгновенная передача сигналов через эфир на произвольное расстояние. Показано, что такая возможность позволяет решить задачу за константное время, что в корне отличается от одномерного случая, где получена логарифмическая по искомому расстоянию нижняя оценка сложности.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, однородные структуры, поиск ближайшей точки.

Клеточным автоматом с локаторами на \mathbb{Z}^n называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}^n, E_n, V, E_q, +, L, \varphi, \psi)$, где \mathbb{Z}^n — множество целочисленных векторов размерности n , $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1})$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^n$, $E_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, $+$ — коммутативная полугрупповая операция, заданная на E_q , $L = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ — упорядоченный набор попарно различных телесных углов в \mathbb{R}^n с вершиной в начале координат, φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}, z_1, \dots, z_m$, $\varphi : E_n^h \times E_q^m \rightarrow E_n$, $\varphi(0, \dots, 0) = 0$, ψ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}, z_1, \dots, z_m$, $\psi : E_n^h \times E_q^m \rightarrow E_q$. Элементы множества \mathbb{Z}^n называются *ячейками* клеточного автомата σ ; элементы множества E_n называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ ; элементы множества E_q называются *сигналами вещания*; набор L называется *шаблоном локаторов* клеточного автомата σ ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ ; переменные x_0, x_1, \dots, x_{h-1} принимают значения из E_n , переменные z_1, \dots, z_m принимают значения из E_q . Состояние 0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ — как условие сохранения состояния покоя.

¹Васильев Денис Игоревич — м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: denis.vasilev.igor@gmail.com.

Vasilev Denis Igorevich — Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Данное определение было введено Гасановым Э.Э. [1] и усовершенствовано Калачевым Г.В. [2].

Сформулируем задачу поиска ближайшего соседа. Пусть на пространстве \mathbb{Z}^n задано начальное состояние I клеточного автомата, удовлетворяющее следующим критериям: а) Любая ячейка присвоено одно из трех состояний $\{q_S; q_{C_0}, *\}$; б) Есть лишь одна ячейка, которой присвоено состояние q_{C_0} ; в) Есть лишь конечное и непустое множество ячеек, которым присвоено состояние q_S . Решением задачи поиска ближайшего соседа, соответствующей начальному состоянию I назовем состояние автомата, удовлетворяющее следующим критериям: а) Ячейке, которой в I было присвоено состояние q_{C_0} присвоено состояние q_{CF} ; б) Ближайшей к ячейке в состоянии q_{CF} ячейке из тех, которым в I было присвоено состояние q_S , присвоено состояние q_{SF} . Если таких ячеек несколько, то одной (произвольной) из них присваивается состояние q_{SF} , а остальным - $*$; в) Остальные ячейки находятся в состоянии $*$.

Определим, что клеточный автомат с локаторами σ решает задачу поиска ближайшего соседа, если его начальное состояние удовлетворяет условиям, описанным выше, и его финальное состояние существует и соответствует решению задачи поиска ближайшего соседа для его начального состояния. При этом такой автомат, перейдя в состояние, соответствующее решению какой-либо задачи поиска ближайшего соседа должен в нем оставаться во всех дальнейших тактах.

В статье [3] для одномерного случая была доказана теорема:

Теорема 1. *Существует клеточный автомат σ с 25 состояниями и с мощностью алфавита вещания 12, который решает задачу поиска ближайшего соседа за время, не превосходящее $\log_2 s + 7$, где s — расстояние от центральной ячейки с начальным состоянием q_{C_0} до её ближайшего соседа с начальным состоянием q_S .*

В редакцию журнала Вестник МГУ была отправлена статья с аналогичной нижней оценкой:

Теорема 2. *Для любого клеточного автомата с локаторами σ с мощностью алфавита вещания M и любого общего положения задачи поиска ближайшего соседа I выполнено $T_I^\sigma > \log_M(\frac{s}{5})$, где s - расстояние от ячейки в состоянии q_{C_0} до ближайшей ячейки в состоянии q_S в задаче I , а T_I^σ - количество тактов, за которое автомат σ решает задачу I .*

Таким образом, для одномерного случая задачи поиска ближайшего соседа получен порядок сложности задачи.

Оказалось, что для размерности $n \geq 2$ аналогичные оценки неверны, поскольку для таких задач удалось построить автомат с локаторами, решающий их за константное время. Приведем пример такого автомата для случая $n = 2$:

Теорема 3. Существует клеточный автомат σ с 15 состояниями и с мощностью алфавита вещания 40, который решает двумерную задачу поиска ближайшего соседа за время, не превосходящее 13.

Рассмотрим клеточный автомат с локаторами σ с набором локаторов, состоящем из локаторов из Рис. 1 и одного развернутого локатора, который считывает сумму сигналов всех ячеек клеточного пространства. Определим алфавит вещания как некоторое подмножество $\{0; 1\}^{20}$ и полугрупповую операцию покомпонентного максимума на нем. Для удобства будем обозначать сигналы ячеек одним или несколькими числами - номерами ненулевых позиций в эфирном сигнале. Так сигнал $(0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0)$ будем записывать как пару сигналов 2 и 4.

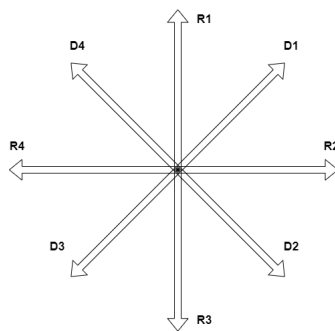


Рис. 1. Расположение и названия локаторов

Зададим на клеточном пространстве систему координат с центром в центральной ячейке. Центральная ячейка в построенном автомате постоянно отправляет в эфир сигнал 1. Ячейки, получивший такой сигнал с локатора $R3$ поймут, что находятся на верхней координатной полуоси. Аналогичным образом каждая ячейка может идентифицировать свое нахождение на остальных трех координатных полуосях. Ячейки, находящиеся на полуосях постоянно отправляют в эфир сигнал с номером своей полуоси (верхняя — 2, правая — 3, нижняя — 4 и левая — 5). По этим сигналам каждая ячейка может распознать, в какой координатной четверти она находится. Например, получив сигнал 2 с локатора $R4$ и сигнал 3 с локатора $R3$, можно однозначно определить, что рассматриваемая ячейка находится в первой координатной четверти. Идея функционирования построенного автомата состоит в том, чтобы спроецировать вдоль манхэттенской окружности все точки из задачи на одну полуось, найти ближайшую к центру проекцию, а затем восстановить её прообраз. Например, точка из первой четверти может послать специальный сигнал, считываемый только правой полуосью. Точка из правой полуоси, получив такой сигнал с локатора $D4$ поймет, что является проекцией одной

из точек задачи (Рис. 2 слева). Повторив такую итерацию 4 раза, можно спроецировать все точки на верхнюю полуось (Рис. 2 справа).

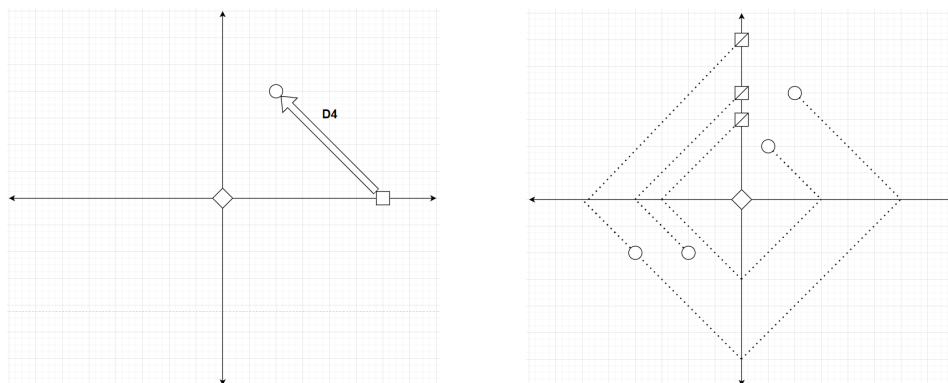


Рис. 2. Слева пример проецирования одной точки на полуось. Справа ход проецирования задачи на верхнюю полуось.

Чтобы найти ближайшего соседа на верхней полуоси, каждому кандидату достаточно послать в эфир специальный сигнал, и получив такой сигнал с локатора $R3$ самоустраниться (т.е. перейти в состояние по умолчанию). После того, как ближайшая проекция найдена, достаточно обратным ходом описанного алгоритма восстановить её прообраз.

Список литературы

- [1] Гасанов Э.Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:2** (2020), 121–133.
- [2] Калачев Г.В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:4** (2020), 47–57.
- [3] Васильев Д.И., “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:3** (2020), 99–120.

The closest neighbour problem on a plane solution using the cellular automata with locators model

Vasilev D.I.

This paper describes a cellular automaton with locators which solves the closest neighbor search problem. The problem itself is about finding the closest point from a given finite set to the so-called central cell. Unlike the classic cellular automaton model, cellular automata with locators allow fast signal transmission to any distance. It is proven

that such a possibility allows us to solve the problem in a constant time which is fundamentally different from the one dimensional case: the lower complexity estimate for this case is proven to be logarithmic.

Keywords: cellular automaton with locators, homogeneous structures, the closest neighbour search.

References

- [1] Gasanov E.E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **20**:2 (2020), 121–133.
- [2] Kalachev G.V., “Remarks on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent systems*, **24**:4 (2020), 47–57.
- [3] Vasilev D.I., “The closest neighbour problem solution using the cellular automata with locators model”, *Intelligent systems*, **24**:3 (2020), 99–120.

Вычисление функций Белого с использованием техники модулярных функций

А. М. Ватузов¹

В работе описан алгоритм вычисления функций Белого для заданного детского рисунка с использованием техники модулярных функций. Приведена функция Белого с группой монодромии M_{24} , вычисленная с использованием этого метода.

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, модулярные функции

В работе рассматривается задача вычисления функции Белого по заданному детскому рисунку. *Детский рисунок* – двукрашенный (связный) граф Γ , вложенный в компактную ориентированную поверхность X таким образом, что дополнение $\Gamma \setminus X$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Пусть X – компактная риманова поверхность. *Функцией Белого* называется накрытие $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ неразветвлённое вне $0, 1, \infty$. Тогда прообраз $\beta^{-1}[0, 1]$ – детский рисунок на X . Верно и обратное – для любого детского рисунка D существует пара Белого (X, β) такая, что $\beta^{-1}[0, 1]$ изоморфен D . Более того, в качестве X можно выбрать комплексную алгебраическую кривую определенную над $\overline{\mathbb{Q}}$ (см. [1]).

Итак, для каждого детского рисунка существует пара Белого, однако нахождение ее явного вида – нетривиальная задача. В случае $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ несложно написать систему алгебраических уравнений на коэффициенты функции Белого. Стандартный метод решения систем алгебраических уравнений – метод базиса Грёбнера. К сожалению, с увеличением количества переменных его сложность быстро растёт, и он практически не применим для детских рисунков с более чем 12 рёбрами. Поэтому разрабатываются другие методы вычисления функций Белого, подробный обзор этих методов дан в [2].

Общая схема вычислений. Решим систему уравнений приближенно, а затем получим точное решение в алгебраических числах с помощью LLL-алгоритма (см. [3]). Приближенное решение с достаточной точностью можно найти с помощью метода Ньютона, но требуется начальная

¹*Ватузов Александр Максимович* – аспирант каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amvatuzov@yandex.ru.

Vatuzov Alexander Maximovich – graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, department of theoretical computer science.

точка, для которой метод будет сходиться к решению, соответствующему заданному детскому рисунку.

Существуют разные техники получения такого начального приближения. В настоящий момент рекордом таких вычислений является вычисление функций Белого с группами монодромии J_2 и Co_3 степеней 100 и 276 соответственно (см. [4], [5]). В этих работах используется подход с вычислением модулярной функции. Тем не менее, эти вычисления – своего рода искусство, связанное с решением разных вопросов, влияющих на сходимость метода.

Рисунки, перестановки и модулярная группа. Один из способов задать детский рисунок D с n ребрами – выписать перестановки ребер, которые соответствуют циклическим порядкам при обходе вокруг черных и белых вершин: $a, b \in S_n$. Группа порождаемая ими называется *группой вращений ребер* рисунка, обозначается $ER(D)$ и изоморфна группе монодромии соответствующей функции Белого.

Будем говорить, что рисунок принадлежит $(2, 3)$ -типу, если все белые вершины имеют степень 1 или 2, а все чёрные вершины – степень 1 или 3. Любой детский рисунок может быть приведен к этому виду с помощью дополнительной триангуляции граней рисунка, однако эта операция увеличивает количество рёбер в 6 раз, что усложняет вычисления.

Для детского рисунка $(2, 3)$ -типа порождающие его группы вращений рёбер обладают свойством $a^3 = b^2 = 1$. Таким образом, можно считать, что на ребрах этого рисунка действует модулярная группа

$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1 \rangle.$$

Выберем стабилизатор некоторого ребра $\Gamma \subseteq \mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Тогда кривая может быть получена как фактор верхней полуплоскости: $t : \mathbb{H} \xrightarrow{\Gamma} X$. Фундаментальная область группы Γ состоит из нескольких копий фундаментальной области группы $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Группа Γ попарно отождествляет дуги-стороны фундаментальной области, задавая склейку, которая дает рисунок D . Если $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, то отображение t – функция на \mathbb{H} . Наша цель – научиться вычислять приближенные значения этой функции.

Точка $+i\infty$ соответствует центру одной из граней детского рисунка, пусть эта грань имеет степень m . Тогда группа Γ содержит элемент $z \rightarrow z + m$, а поскольку функция $t(z)$ инвариантна относительно Γ , то можно ее записать в виде $t(z) = f(q)$, где $q = \exp(2\pi iz/m)$. При этом функция f отображает окрестность точки $q = 0$ в окрестность соответствующего полюса β взаимнооднозначно. Отнормируем функцию Белого β так, чтобы этот полюс находился в точке ∞ . Тогда функция $f(q)$ будет иметь полюс первого порядка в точке $q = 0$ и разложение в ряд Лорана будет имеет вид

$$f(q) = c_{-1}q^{-1} + c_0 + c_1q + c_2q^2 + \dots \quad (1)$$

Для приближенных вычислений оставим только N слагаемых в (1). Составим систему *линейных* уравнений на коэффициенты c_i . Осталось еще две степени свободы нормировки функции β , что дает два уравнения. Остальные уравнения получаем, выбирая $N - 2$ пары точек на границе фундаментальной области: если $g \in \Gamma$ и $g(z_1) = z_2$, то должно быть выполнено $t(z_1) = t(z_2)$.

В вычислениях $N \approx 200$ было достаточно, чтобы стабильно находить приближённые (с точностью 0.01) коэффициенты $f(q)$. Подставляя координаты вершин модулярной фигуры в (1), получаем приближенные координаты вершин детского рисунка, что дает приближенные значения коэффициентов функции Белого, которые используем как стартовую точку метода Ньютона.

Результаты вычислений. В работе [6] классифицированы взвешенные деревья D такие, что группа вращений ребер $ER(D)$ примитивна и отлична от групп A_n и S_n . Применяя описанную технику вычислений, удалось вычислить функции Белого для всех взвешенных деревьев (2, 3)-типа со специальными примитивными группами.

Ниже приведен результат вычислений для рисунка на рис. 1, который не является взвешенным деревом. Вычисления проводились в системе SageMath.

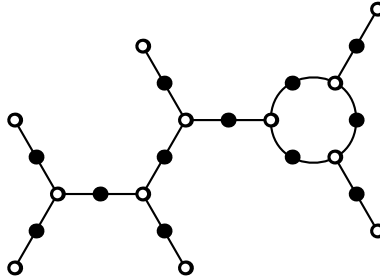


Рис. 1. Паспорт $(2^{12} \mid 3^6 1^6 \mid 21^1 3^1)$, $ER = \mathbf{M}_{24}$.

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cz^3} = \frac{Q_2^2}{cz^3} + 1$$

$$c = -2^{36} \cdot 3^6 \cdot 7^3 (1 - \omega)^2 (1 - 2\omega)(1 + 2\omega)^{11}$$

$$\omega = \frac{1 - \sqrt{-7}}{2}$$

$$\begin{aligned} P_3 = & z^6 + 19(1 - \omega)(1 - 2\omega)z^5 + \omega(1 - 2\omega)(67 + 284\omega)z^4 + \\ & + 2 \cdot 3(1 - \omega)(1 - 2\omega)(23 - 2\omega)(11 + 12\omega)z^3 + \\ & + 7(5 - 2\omega)(3 - 4\omega)z^2 - 7(1 - \omega)(5 - 2\omega)^2(7 + 6\omega)z - \\ & - 7\omega^{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= z^6 + 3^3(1-\omega)(1-2\omega)z^5 + 3\omega(1-2\omega)(49+212\omega)z^4 - \\
&\quad - 2 \cdot 3^2(1-\omega)(1-2\omega)(1-4\omega)(137-70\omega)z^3 - \\
&\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7^3(3-4\omega)(5-2\omega)z^2 - 3^2 \cdot 7^3(1-\omega)(5-2\omega)^2(7+6\omega)z - \\
&\quad - 7^3\omega^{30} \\
Q_2 &= z^{12} + 2 \cdot 3 \cdot 7(1-\omega)(1-2\omega)z^{11} - \\
&\quad - 3 \cdot 7(1-\omega)(1-2\omega)(1+2\omega)(3-4\omega)(3+4\omega)z^{10} + \\
&\quad + 2^2 \cdot 7\omega(1-2\omega)(1+2\omega)(3-8\omega)(83-60\omega)z^9 + \\
&\quad + 3^2 \cdot 7^2\omega(1+2\omega)(7+18\omega)(25-86\omega)z^8 + \\
&\quad + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11(1-\omega)(2\omega+9)(53-18\omega)z^7 - \\
&\quad - 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2(1-\omega)(1+2\omega)(51+4\omega)(1239-880\omega)z^6 + \\
&\quad + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2(1-2\omega)(1+2\omega)^2(317-414\omega)z^5 - \\
&\quad - 3^2 \cdot 7^2(1-2\omega)(1+2\omega)(9-2\omega)(21-10\omega)(1171+2546\omega)z^4 - \\
&\quad - 2 \cdot 7^2(1-\omega)(1-2\omega)(1+2\omega)(41-22\omega)(421-586\omega)(671+318\omega)z^3 + \\
&\quad + 3 \cdot 7^3(1-\omega)(1+2\omega)(5-2\omega)(7-2\omega)(1793+6742\omega)z^2 - \\
&\quad - 2^2 \cdot 3 \cdot 7^3\omega^{29}(5-2\omega)^2(7+6\omega)z - \\
&\quad - 7^3\omega^{60}
\end{aligned}$$

Calculating Belyi functions using modular functions approach Vatuzov A. M.

An algorithm for calculating the Belyi functions via modular functions is described. A Belyi function with the monodromy group M_{24} calculated using this method is presented.

Keywords: dessins d'enfants, Belyi functions, modular functions

References

- [1] Zvonkin A. K., Lando C. K., *Graphs on Surfaces and Their Applications*, 2004 (In Russian).
- [2] Sijtsling J., Voight J., "On computing Belyi maps", *Publications mathématiques de Besançon*, **1** (2014), 73–131.
- [3] Lenstra A. K., Lenstra H. W. Jr., Lovasz L., "Factoring polynomials with rational coefficients", *Mathematische Annalen*, **261**:4 (1982).
- [4] Monien H., "The sporadic group J_2 , Hauptmodul and Belyi map", arXiv: <https://arxiv.org/abs/1703.05200>.
- [5] Monien H., "The sporadic group Co_3 , Hauptmodul and Belyi map", arXiv: <https://arxiv.org/abs/1802.06923>.
- [6] Adrianov N. M., Zvonkin A. K., "Weighted trees with primitive edge rotation groups", *Fundament. i prik. matem.*, **18**, no. 6 (2013), 5–50; *J. Math. Sci.*, **209**:2 (2015), 160–191 (In Russian).

О моделировании торговых стратегий для валютных пар с использованием глубоких нейронных сетей и метода скользящего разделения смесей

Виляев А.Л.¹, Горшенин А.К.²

В работе описывается использование глубоких нейронных сетей совместно с методом скользящего разделения смесей для построения моделей анализа валютного рынка и выбора торговых стратегий. Рассмотрены архитектура нейронной сети и способы статистического расширения признакового пространства, а также приведены результаты модельных торгов, демонстрирующие преимущества предложенного подхода.

Ключевые слова: глубокие нейронные сети, LSTM-сети, скользящее разделение смесей, валютные пары.

1. Введение

Торговые стратегии играют большую роль в мире финансового трейдинга, в том числе реализуемые в автоматических системах (роботах). В данной работе рассматривается совместное использование нейронных сетей и метода оценивания параметров смешанных вероятностных моделей в скользящем режиме для построения торговых стратегий на валютном рынке.

Основная задача – построить торговый алгоритм, который, получая на вход временной ряд, выдавал бы для каждого момента времени t сигнал $y_n(t) \in \{-1, 0, 1\}$, где «-1» означает необходимость продавать актив, «0» – удерживать, «1» – покупать. Сигналы предсказывают, будет ли стоимость актива через заданный промежуток времени выше или ниже текущей стоимости.

¹Виляев Антон Львович – студент кафедры Математической Статистики факультета Вычислительной Математики и Кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: avilyaev720@gmail.com

Vilyaev Anton Lvovich – BSc student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.

²Горшенин Андрей Константинович – д.ф.-м.н., доцент, руководитель отдела Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, e-mail: agorshenin@frcsc.ru

Gorshenin Andrey Konstantinovich – Doctor of Science, Associate Professor, Head of Department, Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences

2. Подготовка данных. Нейросетевая архитектура

В качестве исходных данных рассматривается временной ряд $X(t)$, представляющий цены закрытия валютной пары евро/британский фунт на протяжении 10 лет (часовые данные). Обучающая выборка строится по методу скользящего окна, каждое окно захватывает временной промежуток $(t - w + 1, t]$, где t – определенный момент времени, w – размер окна. Для каждого окна находятся: а) цена открытия $p_0(t)$ на момент первой сделки в окне, которое заканчивается в момент времени t ; б) наивысшая цена $p_h(t)$ - актива за окно; в) наименьшая цена $p_l(t)$ актива за окно; г) цена закрытия $p_c(t)$ на момент последней сделки в окне.

2.1. Расширение признакового пространства

В качестве дополнительных элементов при обучении рассматриваются разности самих указанных в начале раздела величин, а также их логарифмов. Кроме того, для повышения качества прогнозирования предложено дополнительно использовать в качестве признаков статистические характеристики ряда. Для этого на каждом окне строится аппроксимирующая смешанная модель с помощью метода скользящего разделения смесей (СРС) [1]. Это позволяет учитывать в нейросетевой модели изменение параметров распределения на каждом из окон.

А именно, для каждого окна с помощью EM-алгоритма находятся оценки параметров смеси вида $f_{\mu, \sigma}(x) = \sum_{i=1}^K p_i \varphi(x, \mu_i, \sigma_i)$, где μ_i , σ_i – математические ожидания, среднеквадратические отклонения в функции плотности нормального распределения $\varphi(\cdot)$, а p_i – веса. Для расширения признакового пространства используются локальные компоненты связности [2], формирующие дополнительную многомерную матрицу нетривиальных признаков на основе математической модели данных, не используя какие-либо дополнительные наблюдения.

2.2. Архитектура нейронной сети

В качестве архитектуры для торгового алгоритма используется ансамбль из двух рекуррентных сетей LSTM [3]. Первая из них решает задачу бинарной классификации и выдает сигнал $y_n(t) \in \{0, 1\}$: следует ли торговать в момент времени t или нет. Затем этот сигнал используется как вход второй модели LSTM, которая решает исходную задачу троичной классификации и выдает сигнал $y_n(t) \in \{-1, 0, 1\}$ о действии с активом. Такая конфигурация позволяет разбить задачу троичной классификации на две задачи более простой бинарной классификации – вторая модель не пытается улавливать моменты, в которых необходимо бездействовать, а опирается на готовые результаты.

3. Результаты

Для сравнения результатов между моделями проводилась симуляция торгов на тестовой части выборки. На рис. 1 показаны лучшие полученные результаты для случая использования расширения признакового пространства и без него.

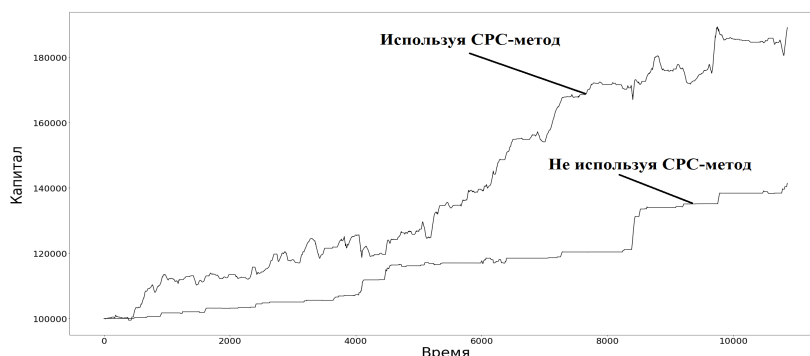


Рис. 1. Сравнительные результаты моделирования торгов

Наилучший результат без использования СРС-метода – 141 400 у.е. при начальном капитале 100 000 у.е., при использовании СРС-метода – 189 100 у.е. Нетривиальное расширение признакового пространства позволило увеличить доходность алгоритма более, чем в два раза. В среднем на всех симуляциях прирост капитала составляет 95,1% (122 400 против 143 700 у.е.), хотя использование СРС-метода требует более аккуратной настройки гиперпараметров, так как значительно увеличивается количество признаков в нейросетевой модели.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Список литературы

- [1] Горшенин А.К., Кузьмин В.Ю., “Метод повышения точности нейросетевых прогнозов с использованием смешанных вероятностных моделей и его реализация в виде цифрового сервиса”, *Информатика и её применения*, **15:3** (2021), 63–74.
- [2] Горшенин А.К., Королев В.Ю., Щербина А.А., “Статистическое оценивание распределений случайных коэффициентов стохастического дифференциального уравнения Ланжевена”, *Информатика и её применения*, **14:3** (2020), 3–12.
- [3] Tsantekidis A., Tefas A., “Transferring trading strategy knowledge to deep learning models”, *Knowledge and Information System*, **63** (2021), 87–104.

On modeling trading strategies for currency pairs using deep neural networks and method of moving separation of mixtures

Vilyaev A.L., Gorshenin A.K.

The paper describes the use of deep neural networks and the method of moving separation of mixtures to construct models for analyzing the foreign exchange market and choosing trading strategies. The architecture of a neural network and methods of statistical extension of the feature space are considered. The results of a trading model demonstrating the advantages of the proposed approach are presented.

Keywords: deep neural networks, LSTM, moving separation of mixtures, currency pairs.

References

- [1] Gorshenin A.K., Kuzmin V.Yu., “Method for improving accuracy of neural network forecasts based on probability mixture models and its implementation as a digital service”, *Inform. Primen.*, **15:3** (2021), 63–74 (In Russian).
- [2] Gorshenin, A.K., Korolev, V.Yu., Shcherbinina, A.A., “Statistical estimation of distributions of random coefficients in the Langevin stochastic differential equation”, *Inform. Primen.*, **14:3** (2020), 3–12 (In Russian).
- [3] Tsantekidis A., Tefas A., “Transferring trading strategy knowledge to deep learning models”, *Knowledge and Information System*, **63** (2021), 87–104.

Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции

А. С. Воротников¹

В работе получена верхняя оценка переключательной мощности реализации периодической последовательности автономной автоматной схемой. Приводится схема, реализующая произвольную наперёд заданную последовательность длины 2^n для натуральных n с переключательной мощностью не более $\frac{2^{n/2}}{n}$.

Ключевые слова: плоские схемы, переключательная мощность, верхние оценки, функция Шеннона.

Впервые понятие схемы из клеточных элементов, далее так же называемой плоской схемой, было введено в работе Кравцова С.С. [1]. В работах [2, 3] Г. В. Калачев показал, что порядок потенциала и переключательной мощности плоской схемы, реализующей булеву функцию от n переменных, составляет $2^{n/2}$.

Вводимое определение несколько расширяет определение *плоской схемы*, введённое в работе [2]. Определения *сети из клеточных элементов*, *графа корректной сети из клеточных элементов*, *входов (выходов)*, *узлов*, *подсхемы* так же присутствуют в указанной работе.

Клеточным элементом будем называть автомат с не более чем двумя состояниями, у которого в сумме не более четырёх входов и выходов, причём каждому его входу и каждому выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, r, t, b\}$, причём метки не повторяются.

Клеточный элемент будем изображать в виде единичного квадрата на плоскости.

Метки, присвоенные входам (выходам) автомата будем называть входами (выходами) элемента.

Описывать элемент с одним состоянием будем уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки (l, r, t или b). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую будут входить только входные метки. На рисунке 1 приведены примеры клеточных элементов.

Всюду далее значок $:=$ будет обозначать «по определению равно».

¹Воротников Алексей Сергеевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vorotnikov.lexa@yandex.ru.

Vorotnikov Alexey Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

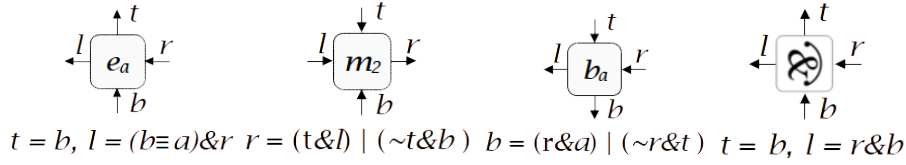


Рис. 1. Примеры логических элементов.

Далее везде используется базис \mathcal{B} , состоящий из всех элементов с одним состоянием и множества элементов с двумя состояниями $\{(E, E, E, \phi, \psi_1), (E, E, E^2, \phi, \psi_2), (E, E, E^3, \phi, \psi_3)\}$, где $E = \{0, 1\}$,

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \varphi(t+1) = a(t). \end{cases}$$

$$\psi_1(t) = q(t), \quad \psi_2(t) = (q(t), q(t)), \quad \psi_3(t) = (q(t), q(t), q(t)),$$

где $a(t)$ — входной сигнал в момент времени t , $q(t)$ — состояние автомата в момент времени t . Будем называть такие элементы *задержками*.

Плоской автоматной схемой на множестве $M \subset \mathbb{Z}^2$ над базисом $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ будем называть корректную сеть из клеточных элементов, в графе которой все ориентированные циклы содержат хотя бы одну задержку. Множество M будем называть *носителем* схемы K .

Каждой плоской схеме K можно сопоставить структурный автомат $Circ(K)$ следующим образом:

- 1) каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s клеточной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализующий $f_{s,i}$; если i -й и j -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если i -й выход s_1 подключен к j -му входу s_2 , то соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ зависит от j -го аргумента;
- 3) удалим из схемы все тождественные функции, подсоединив их вход ко всем их выходам;
- 4) аналогично поступаем с задержками.

Сопоставление корректно, так как правила сопоставления вкладываются в правила индуктивного построения структурных автоматов [4]. Правило обратной связи, требующее зависимость со сдвигом от замыкаемой

переменной, так же выполнено в силу наличия задержки в каждом ориентированном цикле. Поскольку только ориентированные циклы могут порождать обратную связь, всё верно.

Будем говорить, что схема K реализует автомат A_K , если схема из автоматных элементов $Circ(K)$ реализует A_K .

Далее рассматриваем только плоские автоматные схемы без входов с единственным выходом — автономные автоматные схемы.

Рассмотрим плоскую автоматную схему K , реализующую периодическую последовательность длины $l \in \mathbb{N}$. Последовательность, реализуемую схемой K обозначим α_K . Для каждой такой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На i -м узле реализуется некоторая автоматная функция g_i .

Состоянием схемы K на такте t назовём вектор $s_K(t) := (g_1(t), \dots, g_h(t))$.

Величину $c_K(t) := |s_K(t) \oplus s_K(t+1)|$ назовём *затратой энергии на переключение схемы* с такта t на $t+1$. Длина вектора понимается как сумма целых чисел его компонент: $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Схема K функционирует циклически с периодом l , если последовательность на её выходе имеет период l .

Переключательной мощностью схемы K , функционирующей циклически с периодом l , назовём $W(K) = \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} c_K(t)$.

Переключательной мощностью последовательности α назовём величину $W(\alpha) = \min_{\alpha_K = \alpha} W(K)$.

Функцией Шеннона для переключательной мощности последовательностей из класса $\{0, 1\}^l$ назовём $W(l) = \max_{\alpha \in \{0, 1\}^l} W(\alpha)$.

Теорема 1. Для произвольного $k \in [\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \frac{n}{2} - \log_2 n] \cap \mathbb{N}$ верно

$$W(2^n) \lesssim \begin{cases} 50 \frac{2^{n/2}}{n}, & \text{если } k = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \\ 12 \frac{2^{n/2}}{k}, & \text{если } k \in (\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \frac{n}{2} - \log_2 n), \text{ при } n \rightarrow \infty \\ 36 \frac{2^{n/2}}{n}, & \text{если } k = \frac{n}{2} - \log_2 n, \end{cases}$$

причём существует реализация плоской автоматной схемы, требующая не более $n + k + \log_2 k$ задержек.

В работе приводятся схемы, удовлетворяющие таким условиям. При построении схем активно применялись идеи, возникавшие ранее в работах Г. В. Калачёва [2].

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. профессору Э. Э. Гасанову за научное руководство и помощь в работе, а также к.ф.-м.н., м.н.с. Г. В. Калачёву и А. А. Ефимову за ценные замечания и предложения по тексту работы.

Список литературы

- [1] Кравцов С. С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [2] Г. В. Калачев, “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] Г. В. Калачев, “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [4] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С., *Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая. Теория автоматов.*, Издательские решения, Москва, 2018, ISBN: 978-5-4493-5160-9.

Upper bounds of plane circuits implemented autonomous automaton functions switchable power

Vorotnikov A. S.

Switchable power of flat automatic schema without inputs implementation by periodical sequence is received in this work. A scheme is given that implements arbitrary pre-defined sequence of length 2^n for positive integer n with switchable power no more than $\frac{2^{n/2}}{n}$.

Keywords: plain circuits, switchable power, upper bounds, Shannon function.

References

- [1] Kravtsov S. S., “About implementation functions of the logic algebras in one class of circuits consisting of functional and commutational elements”, *Cybernetics problems*, **19** (1967), 285–293.
- [2] G. V. Kalachev, “Plain circuit implemented boolean functions power by the order”, *Discrete Math*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] G. V. Kalachev, “Lower bounds of the plain circuits implemented partial boolean operators power”, *Intelligent systems*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [4] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, 2, Moscow university, Moscow, 2019, ISBN: 978-5-19-011370-9.

Порождение правильных семейств функций

А. В. Галатенко¹, В. А. Носов², А. Е. Панкратьев³,
В. М. Староверов⁴

В работе показано, что задача проверки правильности семейства функций при компактном задании входа является coNP-полной, а также предложены процедуры для порождения множества всех правильных семейств заданного порядка и равномерного распределения на этом множестве.

Ключевые слова: правильные семейства функций, цепи Маркова

1. Введение

Задача порождения семейств квазигрупп, обладающих заданными свойствами, актуальна для криптографических приложений. В криптосистеме с открытым ключом из работы [1] для генерации ключей требуются два семейства многомерных квадратичных квазигрупп порядка 32, каждое из которых должно иметь мощность не ниже 2^{20} . В. А. Носов предложил порождать большие семейства квазигрупп большого порядка с помощью правильных семейств функций [2]. В работе [3] авторы рассмотрели методы для явного порождения больших семейств многомерных квадратичных квазигрупп с заданным значением квадратичности с помощью правильных семейств булевых функций. Для переноса результатов на логики большей значности возникла задача поиска правильных семейств специального вида. Для булева случая известны утверждения

¹ *Галатенко Алексей Владимирович* — старший научный сотрудник каф. MaTIS мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: agalat@msu.ru.

Galatenko Alexei Vladimirovich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MaTIS chair

² *Носов Валентин Александрович* — ведущий научный сотрудник каф. MaTIS мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vnosov40@mail.ru.

Nosov Valentin Aleksandrovich — leading researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MaTIS chair

³ *Панкратьев Антон Евгеньевич* — доцент каф. MaTIS мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: apankrat@intsys.msu.ru.

Pankratiev Anton Evgenievich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MaTIS chair

⁴ *Староверов Владимир Михайлович* — доцент каф. выч. мат. мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru.

Staroverov Vladimir Mikhailovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mathematics

о трудности задачи распознавания правильности (coNP-полнота в случае задания функций схемами [4]) и о скорости роста числа правильных семейств: если $T(n)$ — число правильных семейств булевых функций порядка n , то, как показано в [5], существует положительная константа A , такая что $n^{A2^n} \leq T(n)$. Эти утверждения удалось перенести на случай k -значной логики при $k \geq 3$. Мы также предлагаем алгоритм для построения всех правильных семейств функций k -значной логики порядка n при условии, что получены все правильные семейства порядка $n - 1$ (из неравенства на $T(n)$ следует, что алгоритм допускает практическое применение при небольших значениях n), и МСМС-процедуру для порождения равномерного распределения на множестве всех правильных семейств заданного порядка в логике значности $k \geq 3$ (случай $k = 2$ рассмотрен в работах [6]).

2. Основные понятия и результаты

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$, P_k^n — множество всех функций k -значной логики от n переменных.

Определение 1. Семейство (f_1, \dots, f_n) , где $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in P_k^n$, называется правильным, если для любых $\alpha, \beta \in E_k^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha \neq \beta$, найдется индекс i , $1 \leq i \leq n$, такой что $\alpha_i \neq \beta_i$, но $f_i(\alpha) = f_i(\beta)$.

Очевидным примером правильного семейства является набор константных функций.

Заметим, что правильные семейства булевых функций порядка n могут быть естественным образом инъективно вложены в множество правильных семейств k -значной логики того же порядка. Для этого достаточно рассмотреть функцию $\mu: E_k \rightarrow E_2$, такую что $\mu(x) = 0$ если и только если $x = 0$, и отобразить булево семейство (f_1, \dots, f_n) в семейство (g_1, \dots, g_n) функций k -значной логики, определяемых соотношением $g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n))$.

Из приведенной конструкции вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. Задача проверки, является ли семейство функций k -значной логики, заданное схемой в конечном функционально полном базисе, правильным, coNP-полна.

Теорема 2. Пусть $T_k(n)$ — число правильных семейств функций k -значной логики порядка n , Тогда $T_k(n) > T(n) \geq n^{A2^n}$.

Пусть $F = (f_1, \dots, f_n)$ — правильное семейство функций k -значной логики, $1 \leq i \leq n$, α — последовательность элементов E_k . Рассмотрим преобразование $\text{Switch}(F, i, \alpha)$, возвращающее семейство $F' =$

$(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_n)$, где f'_i определяется следующим образом. По семействам F_j , полученным из F фиксацией $x_i = j$ и отбрасыванием i ой функции, строим граф с множеством вершин E_k^{n-1} с помощью процедуры, описанной в работе [7]. Затем выделяем компоненты связности графа в некотором порядке (например, лексикографическом). Компоненте связности номер m ставим в соответствие m ую компоненту набора α . Пусть $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ — вершина из компоненты связности номер m , $a \in E_k$. Полагаем $f'_i(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) = \alpha_m$.

Рассмотрим следующую процедуру. Всевозможными способами выбираем набор (G_0, \dots, G_{k-1}) правильных семейств порядка n . Определяем функции f_1, \dots, f_n с помощью соотношения $f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \bigvee_{j=0}^{k-1} (I_{x_{n+1}}(j) \wedge g_i^j(x_1, \dots, x_n))$, где g_i^j — функция номер i семейства G_j . Полагаем $f_{n+1} \equiv 0$ и выдаем на выход $\text{Switch}((f_1, \dots, f_{n+1}), n+1, \alpha)$ для всевозможных α .

Теорема 3. *Описанная процедура порождает все правильные семейства порядка $n+1$ в k -значной логике.*

Для генерации равномерного распределения на множестве правильных семейств заданного порядка можно воспользоваться цепью Маркова, порожденную следующим методом. Стартуем с правильного семейства, все функции которого есть тождественный 0. На каждом шаге случайно равновероятно выбираем i и α и применяем преобразование Switch к текущему семейству.

Теорема 4. *Множество состояний указанной цепи Маркова совпадает с множеством всех правильных семейств заданного порядка k -значной логики. При числе итераций, стремящемся к бесконечности, имеется сходимость к равномерному распределению на множестве состояний.*

Экспоненциальная по n сложность преобразования является ожидаемой — проверка правильности является сложной задачей.

Список литературы

- [1] Gligoroski D., Markovski S., Knapskog S. J., “Public key block cipher based on multivariate quadratic quasigroups”, Cryptology ePrint Archive, Report 2008/320, 2008, 22 pp.
- [2] Носов В. А., “Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных”, *Интеллектуальные системы*, 4:3–4 (1999), 307–320.
- [3] Галатенко А. В., Носов В. А., Панкратьев А. Е., “Порождение квадратных квазигрупп с помощью правильных семейств булевых функций”, *Фундаментальная и прикладная математика*, 23:2 (2020), 57–73.

- [4] Gärtner B., Thomas A., “The complexity of recognizing unique sink orientations”, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, **30** (2015), 341–353.
- [5] Matousek J., “The number of unique-sink orientations of the hypercube”, *Combinatorica*, **26** (2006), 91–99.
- [6] Schurr I., *Unique sink orientations of cubes*, Doctoral thesis, ETH Zurich, 2004, 171 с.
- [7] Галатенко А. В., Носов В. А., Панкратьев А. Е., “Об одном алгоритме построения правильных семейств функций”, Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», 2020, 142–146

Generation of proper families of functions

Galatenko A.V., Nosov V.A., Pankratiev A.E., Staroverov V.M.

We show that the problem of deciding properness of a family of functions specified by a circuit is coNP-complete, and propose procedures for generation of all proper families of a given order and of uniform distribution on the set of proper families.

Keywords: proper families of functions, Markov chains

References

- [1] Gligoroski D., Markovski S., Knapskog S. J., “Public key block cipher based on multivariate quadratic quasigroups”, Cryptology ePrint Archive, Report 2008/320, 2008, 22 pp.
- [2] Nosov V. A., “Construction of classes of Latin squares in Boolean databases”, *Intelligent Systems*, **4:3–4** (1999), 307–320 (In Russian)
- [3] Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E., “Generation of multivariate quadratic quasigroups using proper families of Boolean functions”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **23:2** (2020), 57–73 (In Russian)
- [4] Gärtner B., Thomas A., “The complexity of recognizing unique sink orientations”, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, **30** (2015), 341–353
- [5] Matousek J., “The number of unique-sink orientations of the hypercube”, *Combinatorica*, **26** (2006), 91–99
- [6] Schurr I., *Unique sink orientations of cubes*, Doctoral thesis, ETH Zurich, 2004, 171 pp.
- [7] Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E., “An algorithm for construction of proper families of functions”, Proc. 18th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“, 2020, 142–146 (In Russian)

Эффективность проверки существования n -подквазигрупп

А. В. Галатенко¹, А. Е. Панкратьев², В. М. Староверов³

В работе описан алгоритм проверки наличия n -подквазигрупп, приведена оценка временной и пространственной сложности и исследована практическая эффективность этого алгоритма.

Ключевые слова: n -квазигруппы, n -подквазигруппы

1. Введение

В последние годы возник интерес к использованию некоммутативных и неассоциативных алгебраических структур для построения криптоалгоритмов [1]. Одним из ярких примеров некоммутативных и неассоциативных структур являются конечные квазигруппы, на основе которых построено значительное количество шифров, хэш-функций, алгоритмов электронной подписи и других криптографических примитивов (см., например, обзоры [2, 3]). Привлекают интерес и структуры более высокой сложности — n -квазигруппы при $n \geq 3$. Публикуются работы о криптографически важных свойствах n -квазигрупп [4, 5, 6], предлагаются реализации алгоритмов (см., например, [7]).

Одним из криптографически важных свойств n -квазигрупп является “бедная” структура n -подквазигрупп (подмножеств, сохраняемых n -квазигрупповой операцией). В целом наличие нетривиальных n -подквазигрупп нежелательно, так как может привести к вырождению операции со всего универсума на универсум n -подквазигруппы; в ряде случаев n -подквазигруппы порядка 1, т.е. “неподвижные точки”, считаются допустимыми. Таким образом, приобретают актуальность задачи эффективной проверки наличия произвольных собственных n -подквазигрупп и собственных n -квазигрупп порядка не ниже 2. В работе [6] были предложены алгоритмы для решения этих задач и приведена

¹ Галатенко Алексей Владимирович — старший научный сотрудник каф. МаТИС мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: agalat@msu.ru.

Galatenko Alexei Vladimirovich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MaTIS chair

² Панкратьев Антон Евгеньевич — доцент каф. МаТИС мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: apankrat@intsys.msu.ru.

Pankratiev Anton Evgenievich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MaTIS chair

³ Староверов Владимир Михайлович — доцент каф. выч. мат. мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru.

Staroverov Vladimir Mikhailovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mathematics

оценка временной сложности. Мы уточняем результаты [6], добавив к ним оценки пространственной сложности и практической эффективности.

Дальнейшее изложение имеет следующую структуру. В разделе 2 даются необходимые определения и формулируется основной результат. В разделе 3 описывается программная реализация алгоритма и приводятся результаты тестирования. Раздел 4 является заключением.

2. Основные понятия и результаты

Определение 1. *Конечной n -квазигруппой называется пара (Q, f) , где $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ — конечное множество, а $f: Q^n \rightarrow Q$ такова, что при произвольной фиксации любых $n - 1$ переменных результат является биекцией, то есть перестановкой на множестве Q . При этом операция f называется n -квазигрупповой.*

В дальнейшем все структуры будут конечными, поэтому для краткости слово “конечный” будет опускаться.

Определение 2. *Пусть $Q' \subset Q$, $1 \leq |Q'| < |Q|$. Если $f(Q') = Q'$, то говорим, что n -квазигруппа (Q, f) содержит собственную n -подквазигруппу (Q', f') , где f' — ограничение операции f на $(Q')^n$. Если дополнительно выполнено условие $|Q'| > 1$, то подквазигруппа называется нетривиальной.*

В дальнейшем для краткости мы будем отождествлять n -подквазигруппу (Q', f') с множеством Q' .

Определение 3. *Пусть M , $|M| < \infty$ — некоторое множество, $t \in \mathbb{N}$, M_1, \dots, M_t — подмножества M . Множество $M_0 \subseteq M$ называется системой представителей для M_1, \dots, M_t , если для всех i от 1 до t найдется элемент $m_i \in M_0$, такой что $m_i \in M_i$.*

Элемент $m_i \in M_0$, такой что $m_i \in M_i$, называется представителем множества M_i . Заметим, что представители для различных i могут совпадать.

Пусть n -квазигруппы заданы таблично. В этом случае вычисление значения f на заданном наборе является элементарной операцией. Случай функционального задания n -квазигрупп является предметом будущих исследований.

Авторами предлагается алгоритм проверки наличия n -подквазигрупп порядка $\geq d$ на основе использования систем представителей частичных замыканий всех d -элементных подмножеств Q .

Теорема 1. Предложенный алгоритм корректно определяет наличие n -подквазигрупп порядка $\geq d$. В случае $d = 1$ временная сложность составляет $O\left(k^{\frac{n^2+n+1}{n+1}} \log^{\frac{n}{n+1}} k\right)$, а пространственная сложность есть $O(k^n)$ при фиксированном n и $k \rightarrow \infty$. В случае $d = 2$ временная сложность составляет $O\left(k^{\frac{n^2+2n+4}{n+2}} \log^{\frac{n}{n+2}} k\right)$, а пространственная сложность есть $O(k^n)$ при фиксированном $n \geq 3$ и $O(k^{5/2} \log^{1/3} k)$ при $n = 2$ и $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что таблица Кэли n -квазигрупповой операции состоит из k^n элементов.

3. Оценка практической эффективности

Алгоритм был программно реализован и протестирован для случая $n = 3$ на рабочей станции с 8-ядерным процессором i7-3770 CPU @3.40GHz и 32 гигабайтами памяти. Оказалось, что в случае $d = 1$ алгоритм практически мгновенно обрабатывает 3-квазигруппу любого порядка, помещающуюся в оперативную память. В случае $d = 2$ время увеличивается, но все еще не превосходит минуты. Максимальные времена обработки в секундах приведены в следующей таблице.

d	$ Q = 256$	$ Q = 512$	$ Q = 1024$	$ Q = 2048$
1	0	0	3	5
2	1	1	6	42

4. Заключение

В работе описан алгоритм проверки наличия n -подквазигрупп, приведена оценка временной и пространственной сложности и исследована практическая эффективность этого алгоритма. В дальнейшем планируется исследовать случай функционального задания операции.

Список литературы

- [1] Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., “Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding”, *Journal of Mathematical Sciences*, **245:2** (2020), 178–196.
- [2] Глухов М. М., “О применениях квазигрупп в криптографии”, *Прикладная дискретная математика*, 2008, № 2, 28–32.
- [3] Shcherbacov V. A., “Quasigroups in cryptology”, *Computer Science Journal of Moldova*, **17:2(50)** (2009), 193–228.

- [4] Dimitrova V., Mihajloska H., “Classification of ternary quasigroups of order 4 applicable in cryptography”, Proceedings of the 7th International Conference for Informatics and Information Technology (CIIT 2010), 2010, 145–148.
- [5] Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Староверов В. М., “Проверка полиномиальной полноты n -квазигрупп”, Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», 2020, 146–150.
- [6] Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Староверов В. М., “Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных n -подквазигрупп”, Материалы XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», 2021, 100–103.
- [7] Dömösi P., Horváth G., “A novel cryptosystem based on abstract automata and Latin cubes”, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **52:2** (2015), 221–232.

Efficiency of deciding existence of n -subquasigroups
Galatenko A.V., Pankratiev A.E., Staroverov V.M.

We describe an algorithm that decides the presence of n -subquasigroups, estimate temporal and spatial complexity of this algorithm and investigate practical efficiency.

Keywords: n -quasigroup, n -subquasigroup

References

- [1] Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., “Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding”, *Journal of Mathematical Sciences*, **245:2** (2020), 178–196.
- [2] Glukhov M. M., “Applications of quasigroups in cryptography”, *Applied Discrete Mathematics*, 2008, № 2, 28–32 (In Russian).
- [3] Shcherbacov V. A., “Quasigroups in cryptology”, *Computer Science Journal of Moldova*, **17:2(50)** (2009), 193–228.
- [4] Dimitrova V., Mihajloska H., “Classification of ternary quasigroups of order 4 applicable in cryptography”, Proceedings of the 7th International Conference for Informatics and Information Technology (CIIT 2010), 2010, 145–148.
- [5] Galatenko A. V., Pankratiev A. E., Staroverov V. M., “Deciding polynomial completeness of n -quasigroups”, Proc. 18th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“, 2020, 146–150 (In Russian).
- [6] Galatenko A. V., Pankratiev A. E., Staroverov V. M., “An algorithm for deciding existence of nontrivial n -subquasigroups”, Proc. 19th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“, 2021, 100–103 (In Russian).
- [7] Dömösi P., Horváth G., “A novel cryptosystem based on abstract automata and Latin cubes”, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **52:2** (2015), 221–232.

Реализация баз данных типа "ключ-значение" клеточными автоматами с локаторами

Э. Э. Гасанов¹, А. А. Пропажин²

В данной работе показано, что базы данных типа “ключ-значение” могут быть реализованы клеточными автоматами с локаторами таким образом, что время выполнения основных операций, таких как поиск, вставка, удаление, не будет зависеть от размера базы данных и будет равно суммарной длине ключа и значения.

Ключевые слова: Клеточные автоматы с локаторами, базы данных, ключ-значение.

База данных “ключ-значение” — это популярная сейчас парадигма хранения данных, также называемая словарем. Такую базу данных можно представлять в виде множества пар строк (k, v) , где первая строка k называется ключом и служит идентификатором пары, а вторая строка v называется значением. *Строка* — это последовательность символов некоторого алфавита A , оканчивающаяся специальным символом \emptyset , называемым *символом окончания строки*, причем символ \emptyset не принадлежит алфавиту A .

База данных “ключ-значение” поддерживает следующие операции:

1) *вставка пары* (k, v) — в базе данных появляется запись с ключом k и значением v ; если запись с ключом k уже имелась в базе данных, то значение заменяется на v ;

2) *удаление записи с ключом* k — из базы данных удаляется запись (k, v) ; если записи с ключом k в базе данных нет, то база данных не изменяется;

3) *поиск элемента по ключу* k — в базе данных находится запись (k, v) , и значение v возвращается в качестве ответа; если записи с ключом k в базе данных нет, то ответом служит пустое множество.

Понятие клеточного автомата с локаторами было введено Э. Э. Гасановым в работе [1] и уточнено Г. В. Калачевым в работе [2]. Точное определение можно найти в упомянутых работах, здесь же мы приведем

¹Гасанов Эльяр Эльдарович — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasnov@mail.ru.

Gasnov Elyar Eldarovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

²Пропажин Артем Алексеевич — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: artem.propazhin@mail.ru.

Propazhin Artem Alekseevich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

неформальное определение одномерного клеточного автомата с одним полным локатором, который и будет использоваться в данной работе.

Одномерный клеточный автомат представляет собой множество одинаковых элементарных автоматов, расположенных в целочисленных узлах вещественной прямой, и называемых клетками. Поведение клеточного автомата задается функцией переходов, а именно состояние клетки в следующий момент однозначно определяется собственным состоянием в текущий момент и состояниями его соседей. Далее будем считать, что у каждой клетки ровно два соседа: ближайший слева и ближайший справа. Одно из состояний клетки называется состоянием покоя, и если клетка и ее соседи находятся в состоянии покоя, то и в следующий момент клетка останется в состоянии покоя. В клеточном автомате с одним полным локатором кроме алфавита состояний имеется алфавит вещания с заданной на нем коммутативной полугрупповой операцией. В данной работе в качестве такой операции будет использоваться операция максимум. В клеточном автомате с одним полным локатором каждая клетка каждый момент посылает в эфир некоторый сигнал из алфавита вещания, определяемый функцией вещания. Значение функции вещания клетки определяется собственным состоянием клетки, состояниями ее соседей и суммарным сигналом, полученным из эфира. Суммарный сигнал эфира формируется суммированием с помощью полугрупповой операции сигналов вещания всех клеток за исключением сигнала данной клетки. В клеточном автомате с одним полным локатором значение функции переходов клетки также определяется собственным состоянием клетки, состояниями ее соседей и суммарным сигналом, полученным из эфира.

Введем еще одну сущность — *пользователя* базы данных. Будем считать, что пользователь базы данных имеет возможность посылать в эфир сигналы из алфавита вещания и получать из эфира сигналы из алфавита вещания. Будем считать, что клеточный автомат с локаторами вместе с пользователем реализуют базу данных типа “ключ-значение”, если алфавит вещания представляет собой множество, состоящее из пар вида (“команда”, $A \cup \{0\}$), где “команда” — принимает одно из значений: “поиск”, “вставка”, “удаление”, “ответ”, “нет ответа”, “нет команды” (здесь “нет команды” является минимальным элементом), и поведение клеточного автомата задается следующим образом.

1) Пользователь подает в эфир команду “поиск” и первый символ ключа k , а затем последовательно все остальные символы ключа, включая символ 0. Если в базе данных нет записи с ключом k , то на следующий такт после подачи символа 0 клеточный автомат выдает в эфир команду “нет ответа”. Если в базе данных есть запись (k, v) , то на следующий такт после подачи символа 0 клеточный автомат выдает в эфир

пару (“ответ“, a), где $a \in A$ — первый элемент значения v , и в последующие такты клеточный автомат последовательно выдает в эфир все остальные символы значения v вплоть до символа 0 включительно.

2) Пользователь подает в эфир команду “вставка“ и первый символ ключа k , а потом последовательно все остальные символы ключа, включая 0, и после этого таким же способом передаются символы значения v . В результате в базе данных, реализуемой клеточным автоматом, появляется пара (k, v) , т.е. если в последующем подать на вход клеточному автомату команду “поиск“ и ключ k , то клеточный автомат вернет значение v в ответ.

3) Пользователь подает команду “удаление“ и первый символ ключа k , а потом последовательно все остальные символы ключа, включая 0. В результате из базы данных, реализуемой клеточным автоматом, исчезает запись с ключом k , т.е. при последующем поиске по ключу k клеточный автомат вернет “нет ответа“.

Теорема 1. *Существует клеточный автомат с локаторами и пользователем, который реализует базу данных типа “ключ-значение“, и для которого время выполнения операций поиск, вставка, удаление не будет превышать суммарную длину ключа и значения.*

Приведем идею доказательства данной теоремы.

Будем использовать одномерный клеточный автомат с одним полным локатором, причем элементарные автоматы, лежащие в отрицательной области числовой прямой использоваться не будут. Выше уже был описан алфавит вещания. Алфавит состояний состоит из троек вида (“команда“, “тип ячейки“, $A \cup \{0, *\}$), где “команда“ принимает одно из значений: “поиск“, “вставка“, “удаление“, “ответ“; “тип ячейки“ принимает одно из значений: “командир“, “текущая ячейка типа ключ“, “текущая ячейка типа значение“, “необрабатываемая ячейка“, “приемник для записи“; * — специальный символ. Символом “приемник для записи“ будет помечаться элементарный автомат, начиная с которого будет осуществляться следующая запись в базу данных. В начальный момент этим символом будет помечен автомат с номером 0. Записи базы данных будут представлять собой пары строк ключ-значение, причем первый символ каждой записи будет отмечен состоянием “командир“.

Опишем функционирование данного автомата. Когда начинается вставка, все командиры получают из эфира сигнал в виде (“вставка“, k_1), где k_1 — первый символ ключа. Если k_1 совпадает со значением, хранящимся в состоянии клетки командира, то в состоянии следующей справа клетки команда меняется на “вставка“, а тип ячейки на “текущая ячейка типа ключ“. На следующий такт следующая справа от командира клетка, также получив сигнал из эфира, проверяет совпадение с хранящимся

символом. При совпадении происходит аналогичный предыдущему процесс за тем исключением, что в конце такта тип этой клетки изменится на “необрабатываемая ячейка”. Процесс происходит последовательно до символа 0 включительно. Процесс проверки ключа начинается одновременно со всех командиров. Если в какой-то момент случилось несовпадение, то тип следующей клетки меняется на “необрабатываемая ячейка”. Если дошли до символа 0, то это означает, что мы нашли запись с искомым ключом, и эту запись надо исключить из базы данных. Исключения из базы данных достигается тем, что 0 в состоянии текущей клетки меняется на символ *. В результате при последующих поисках совпадения не будет.

Одновременно с поиском ключа, начиная с клетки, помеченной состоянием “приемник для записи”, происходит последовательная запись пары “ключ-значение” в базу данных. В момент прихода команды “вставка” клетка, находящаяся в состоянии “приемник для записи”, становится командиром и сохраняет в своем состоянии первый символ ключа k_1 . При этом в следующий момент клетка, находящаяся правее данной клетки меняет команду на “вставка” и тип ячейки на “приемник для записи”. Далее клетки, имеющие команду “вставка” и тип ячейки “приемник для записи” сохраняют в своем состоянии поступающие из эфира символы ключа и значения. При этом состояние (“вставка”, “приемник для записи”) переходит к следующей справа клетке. Исключением является момент прихода символа 0 для значения. В этот момент следующая справа клетка переходит в состояние (“поиск”, “приемник для записи”).

Удаление происходит аналогично вставке. Только во время удаления не начинается процесс записи в конец базы данных.

Во время поиска считывание ключа происходит так же, как и при вставке. Но дойдя до символа 0, замена данного символа на * не происходит. Клетка, следующая справа от клетки с символом 0, меняет команду на “поиск” и тип ячейки на “текущая обрабатываемая ячейка типа значение”. Клетки, находящиеся в этом состоянии, отправляют в эфир сигнал (“ответ”, a), где $a \in A$ — хранимый символ. Текущая клетка после отправки сигнала меняет тип на “необрабатываемая ячейка”. Сигналы с символами значения последовательно отправляются в эфир до сигнала с символом 0 включительно.

Список литературы

- [1] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, **24:2** (2020), 121–133.
- [2] Калачев Г. В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, **24:4** (2020), 47–56.

Implementation of key-value databases by cellular automata with locators

E.E.Gasanov, A.A.Propazhin

In this paper, it is shown that key-value databases can be implemented by cellular automata with locators in such a way that the execution time of basic operations, such as search, insert, delete, will not depend on the size of the database and will be equal to the total length of the key and value.

Keywords: Cellular automata with locators, key-value databases.

References

- [1] Gasanov E. E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and applications*, **24:2** (2020), 121–133 (In Russian).
- [2] Kalachev G. V., “Remarks on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent Systems. Theory and applications*, **24:4** (2020), 47–56 (In Russian).

Оценки времени установления автоматом свойств графа быть деревом и псевдодеревом

А. А. Демидова¹

В данной работе рассматриваются автоматы, осуществляющие обход связных плоских простых неориентированных графов с целью установления их свойств. Приводится алгоритм, с использованием которого автомат с двумя красками может установить, является ли граф, обход которого он совершает, деревом или псевдодеревом, и определяются оценки для числа шагов, которое должен совершить автомат.

Ключевые слова: Автоматы, графы, деревья, псевдодеревья.

Исследования автоматов, осуществляющих обход лабиринтов, берут исток из работы Шеннона [1]. Подробный анализ данного направления теории автоматов представлен в работе [2].

В работе [3] представлен обзор известных результатов в области автоматов, осуществляющих обход графов.

Основным отличием в функционировании автоматов в лабиринтах и на графах является то, что при обходе лабиринта автомат обладает компасом, который позволяет получать некоторую дополнительную информацию [4].

В работах [5], [6] был рассмотрен обход автоматами с красками прямоугольных лабиринтов, а в работе [7] – связных простых ориентированных графов с ограничением на степень вершин.

В работе [8] было исследовано применение автоматов со стираемыми красками для определения свойств связных плоских простых неориентированных графов. В частности, было доказано, что двух красок хватит для того, чтобы установить, является ли граф, обход которого осуществляет автомат, деревом или псевдодеревом, и был представлен алгоритм, в соответствии с которым должен действовать автомат. В данной работе представлена улучшенная версия этого алгоритма, требующая выполнения меньшего числа действий, и найдены оценки для числа шагов, которое автомат должен осуществить для установления рассматриваемых свойств графа.

¹ Демидова Анна Андреевна — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.dem98@mail.ru.

Demidova Anna Andreevna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи.

Обозначим через \mathbf{G}_k класс всех связных плоских простых неориентированных графов с k рёбрами. Будем считать, что до начала обхода графа все его рёбра имеют серый цвет.

Псевдодеревом является связный неориентированный граф, содержащий не более одного цикла. На Рисунке 1 представлен общий вид псевдодерева с одним циклом.

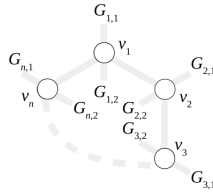


Рис. 1. Общий вид псевдодерева, содержащего цикл

Пусть \mathfrak{A}_1 – класс автоматов, определяющих, является ли граф деревом, а \mathfrak{A}_2 – класс автоматов, определяющих, является ли граф псевдодеревом.

Пусть \mathcal{A} – автомат, принадлежащий одному из классов \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 . $T(\mathcal{A}, G)$ – время, необходимое автомату \mathcal{A} для определения свойств графа G из класса \mathbf{G}_k .

Введём следующие величины:

$$\tilde{T}(\mathcal{A}, k) = \max_{G \in \mathbf{G}_k} T(\mathcal{A}, G), \quad (1)$$

$$T_m(k) = \min_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_m} \tilde{T}(\mathcal{A}, k), \quad m=1,2. \quad (2)$$

Теорема 1. $2k \leq T_1(k) \leq 3k - 1$.

Автомат осуществляет обход графа по правилу левой руки и всегда перекрашивает изначально серые рёбра в чёрный цвет. Автомат установит, что граф является деревом, когда по второму разу зайдёт в первый лист. Наибольшее число шагов автомат должен будет осуществить в том случае, если граф является цепью, а обход начался из предпоследней вершины цепи в направлении более длинного отрезка цепи. Нижняя оценка следует из того, что автомат не может завершить обход дерева до тех пор, пока не пройдёт по каждому ребру дважды.

Теорема 2. $2k \leq T_2(k) \leq 5k - 3$.

Автомат по умолчанию осуществляет обход графа по правилу левой руки, однако в определённые моменты может выбирать не левые рёбра. На вход автомата поступает неполная информация о текущей вершине и некоторых рёбрах, инцидентных ей. На выходе автомат сообщает, по какому ребру следует идти в следующий момент времени и нужно ли красить его в некоторый цвет.

Далее будем предполагать, что в графе есть один цикл, длина которого равна n .

Пусть $G_{i,j} = (V_{i,j}, E_{i,j})$, $(i = \overline{1, n}, j = \overline{1, 2})$ – поддеревья графа G ; $N_{i,j} = |E_{i,j}|$ – количество рёбер в $G_{i,j}$. $G_{i,j}$ включает в себя v_i . Если обход $G_{i,j}$ начинается из v_i , то автомат обойдёт поддерево за $2N_{i,j}$ шагов.

Следует отметить, что $\sum_{i=1}^n (N_{i,1} + N_{i,2}) = k - n$.

В работе [8] после обнаружения цикла автомат осуществлял повторный обход цикла с целью установления наличия или отсутствия левых и правых ветвлений. Однако от повторного обхода можно отказаться, если автомат к моменту обнаружения цикла будет обладать информацией о том, проходил ли он до этого по чёрным рёбрам, покрашенным ранее, – это свидетельствовало бы о наличии левых ветвлений, за исключением, возможно, $G_{1,1}$, но и его тоже можно отследить. Если левые ветвления не были обнаружены, но до момента обнаружения цикла автомат посетил вершины, степень которых была больше 2, то в графе есть правые ветвления.

В результате рассмотрения возможных вариантов было установлено, что наибольшее время будет затрачено в случае, если с точки зрения автомата в графе есть только правые ветвления, поскольку в такой ситуации автомат осуществит $2n$ шагов, после чего начнёт обход заново, но так, чтобы существующие ветвления стали левыми. В худшем случае для завершения работы автомату после этого потребуется ещё $2k + n$ шага. С учётом того, что $n \leq k - 1$, $T_2(k) = 2n + 2k + n \leq 5k - 3$.

Список литературы

- [1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found.*, 1951, 173–180.
- [2] Кудрявцев В. Б., Килибарда Г., Ушчумлич Ш., “Системы автоматов в лабиринтах”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1–4 (2006), 449–562.
- [3] Okhotin A., “Graph-walking automata: from whence they come, and whither they are bound”, *International Conference on Implementation and Application of Automata*, 2019, 10–29.
- [4] Blum M., Kozen D., “On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs)”, *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 1978, 132–142.

- [5] Насыров А. З., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки”, *Дискретная математика*, **9:1** (1997), 123–133.
- [6] Голованов А. В., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта”, *Интеллектуальные системы*, **3:3–4** (1998), 193–212.
- [7] Голубев Д. В., “Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской”, *Интеллектуальные системы*, **4:1–2** (1999), 243–272.
- [8] Демидова А. А., “Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:2** (2021), 111–127.

**Estimates of the time for the automaton to establish the
properties of a graph to be a tree and a pseudo-tree
Demidova A.A.**

In this paper, we consider automata that traverse connected plane simple undirected graphs in order to establish their properties. An algorithm is presented, using which an automaton with two colors can determine whether the graph it traverses is a tree or a pseudotree, and upper bounds are determined for the number of steps that the automaton must make.

Keywords: Automata, graphs, trees, pseudotrees.

References

- [1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found.*, 1951, 173–180.
- [2] Kudryavtsev V. B., Kilibarda G., Uščumlić Š., “Automata systems in labyrinths”, *Intelligent Systems*, **10:1–4** (2006), 449–562 (In Russian).
- [3] Okhotin A., “Graph-walking automata: from whence they come, and whither they are bound”, *International Conference on Implementation and Application of Automata*, 2019, 10–29.
- [4] Blum M., Kozen D., “On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs)”, *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 1978, 132–142.
- [5] Nasyrov A. Z., “On traversing labyrinths by automata that leave not-erasable marks”, *Discrete mathematics*, **9:1** (1997), 123–133 (In Russian).
- [6] Golovanov A. V., “On traversing labyrinths by automata that leave a trail at the vertices of the labyrinth”, *Intelligent Systems*, **3:3–4** (1998), 193–212 (In Russian).
- [7] Golubev D. V., “On graph traversal by automata with one not-erasable paint”, *Intelligent Systems*, **4:1–2** (1999), 243–272 (In Russian).
- [8] Demidova A. A., “Automaton analysis of the properties of a graph to be a tree and a pseudo-tree”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25:2** (2021), 111–127 (In Russian).

Оценки мощности объёмных схем для класса частичных булевых операторов

А. А. Ефимов¹

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся укладкой схем функциональных элементов в пространстве. Был рассмотрен класс объёмных схем, реализующих частичные булевы операторы. Для этого класса получена нижняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. Получен порядок функции Шеннона потенциала для класса всюду определенных операторов для объёмных схем без ограничений и схем с близкими выходами.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

В этой работе мы будем рассматривать такую модель СФЭ, как объёмные схемы. *Объёмной схемой* K или *схемой из кубических элементов* будем называть такую укладку СФЭ в трёхмерную целочисленную решётку \mathbb{Z}^3 , чтобы в каждое ребро решётки попадало не более одного ребра СФЭ. Таким образом в каждой вершине решётки реализуется булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов. Будем говорить, что схема K *реализует* булев оператор F , если соответствующая СФЭ реализует F . Через $\text{Impl}(F)$ обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор F .

Узлами объёмной схемы K будем называть рёбра решётки \mathbb{Z}^3 , в которые уложены провода СФЭ. Отметим, что в результате такой укладки вершины СФЭ (в вершинах которых реализуются только булевы функции) склеиваются в вершины решётки \mathbb{Z}^3 (в вершинах которой реализуются булевы операторы). При этом каждому узлу s объёмной схемы K соответствует такая вершина w СФЭ, что исходящее ребро из w уложено в s . Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. Функцию, реализуемую в i -м узле, обозначим через g_i (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовём величину $u_K(x) = \sum_{i=1}^{\ell} g_i(x)$, где ℓ — число узлов в схеме K . Таким образом,

¹Ефимов Алексей Андреевич — выпускник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: efimovqwerty@yandex.ru.

Ефимов Alexey Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

потенциал схемы на наборе — количество узлов схемы, значение в которых равно 1 на этом наборе.

Максимальным потенциалом схемы K назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0,1\}^n} u_K(x).$$

Пусть $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ — булев оператор. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in \text{Impl}(f)} \hat{U}(K).$$

Средним потенциалом схемы K с n входами на множестве входных наборов $D \subseteq \{0,1\}^n$ назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Пусть $f : D \rightarrow \{0,1\}^m$ — частичный булев оператор. Тогда

$$U(f) := \min_{K \in \text{Impl}(f)} U_D(K).$$

Множество булевых операторов $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ обозначим $P_2(n, m)$. Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U(f), \quad \hat{U}(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}(f).$$

В данной работе получена нижняя оценка потенциала для класса частичных булевых операторов, сформулированная в следующей теореме.

Теорема 1. *Существует константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что если $D \subseteq \{0,1\}^n$, то доля операторов $f : D \rightarrow \{0,1\}^m$, для которых выполнено неравенство*

$$U(f) \geq C \frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)},$$

не меньше $\alpha(n, m, |D|)$, причём

$$\alpha(n, m, d) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad d \rightarrow \infty, \quad n \log_2 n = o(d), \quad \log_2 m \leq C_2 d.$$

Другими словами, в теореме утверждается, что если область определения D содержит существенно больше $n \log n$ наборов и число выходов m не близко к числу всевозможных частичных функций на D , то потенциал почти всех операторов $f : D \rightarrow \{0,1\}^m$ по порядку не меньше $\frac{m \sqrt[3]{|D|}}{\min^{2/3}(m, \log_2 |D|)}$.

Ранее в работе [3] была получена верхняя оценка потенциала для класса всюду определенных операторов.

Теорема 2. [3] Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$. Тогда существует объёмная схема W_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём

$$\hat{U}(W_f) = \mathcal{O} \left(\frac{m2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)} \right).$$

В качестве следствия из Теоремы 1 и Теоремы 2 можно получить порядок функции Шеннона для всюду определенных операторов.

Следствие 1.

$$U(n, m) \asymp \hat{U}(n, m) \asymp \frac{m2^{n/3}}{\min^{2/3}(m, n)}$$

при $n \rightarrow \infty, \log_2 m = o(2^n)$.

Также рассмотрим более узкий класс объёмных схем, где выходы расположены близко.

Деревом выходов схемы K назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы K , причем расстояние между элементами – расстояние между их центрами в манхэттенской метрике. Введём множество $T_h := \{K : T(K) \leq h\}$, состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит h . Обозначим T' – множество объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит числа выходов. Если P – некоторый класс объёмных схем, f – булев оператор, то положим $U_P(f) := \min_{K \in \text{Impl}(f) \cap P} U(K)$.

Теорема 3. Если $D \subseteq \{0, 1\}^n, d = |D|$, то существует такая константа C , такая, что неравенство

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{n}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h \\ C \frac{m \sqrt{md}}{n \sqrt{h}}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h \end{cases}$$

выполнено для почти всех частичных операторов $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ при $h \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d), m = 2^{o(d)}$.

Теорема 4. Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m, m < n^2 \cdot 2^n$. Тогда существует объёмная схема \widetilde{W}_f (с минимальной длиной дерева выходов) со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём

$$\hat{U}(\widetilde{W}_f) = \mathcal{O} \left(\frac{m^{4/3} \cdot 2^{n/3}}{\min(m, n)} \right) = \mathcal{O} \left(\max \left(1, \frac{m}{n} \right) \cdot \sqrt[3]{m2^n} \right).$$

Следствие 2. Для почти всех $f \in P_2(n, m)$, $m \leq 2^{n/2}$, при $n \rightarrow \infty$ верно равенство:

$$U_{T'}(f) \asymp \max\left(1, \frac{m}{n}\right) \cdot \sqrt[3]{m2^n}.$$

Список литературы

- [1] Коршунов А. Д., “Об оценках сложности из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.
- [2] Калачёв Г. В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] Ефимов А. А., “Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 105–124.

Power estimates of volumetric circuits for a class of partial Boolean operators Efimov A.A.

In this paper, volumetric circuits are researched. They are the embedding of Boolean circuits of logic gates in space. A class of volumetric circuits implementing partial Boolean operators was explored. Define the potential — a measure of power equal to the number of circuit elements issuing a one on a given input. For this class of volumetric circuits, a lower estimate of the potential is obtained. The order of the Shannon function of the potential for a class Boolean operators for volumetric circuits without constraints and Boolean circuits with near outputs is obtained.

Keywords: Boolean circuits consisting of logic gates, volumetric circuits, power of Boolean circuits, potential.

References

- [1] Korshunov A. D., “Complexity estimates volumetric functional elements and volumetric boolean circuits consisting of functional elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 275–283.
- [2] Kalachev G. V., “Order of power of planar circuits implementing Boolean functions”, *Discrete mathematics*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] Efimov A. A., “Upper estimate of energy consumption of volumetric circuits implementing Boolean operators”, *Intelligent systems*, **23**:2 (2019), 105–124.

О глубоких гауссовских моделях в задачах машинного обучения

А. Р. Ибрагимова¹, А. К. Горшенин²

Работа посвящена исследованию глубоких нейросетевых архитектур с реализацией смесей нормальных распределений в скрытых слоях для решения задач кластеризации и регрессии. Проведено сравнение таких моделей с различными наборами гиперпараметров относительно классических методов: k -средних, линейной регрессии, смешанных гауссовских моделей GMM и других.

Ключевые слова: глубокие нейронные сети, смеси нормальных распределений, EM-алгоритм.

1. Введение

Модели глубокого обучения в последнее время становятся все более популярными в задачах машинного обучения. В статье [1] для решения задачи кластеризации был предложен метод на основе глубокой гауссовской модели DGMM, обобщающей классические конечные нормальные смешанные распределения на несколько слоев нейронной сети.

Ключевым является представление k -компонентной смеси для некоторого p -мерного случайного вектора y $f(y; \theta) = \sum_{j=1}^k p_j \varphi^{(p)}(y; \mu_j, \Sigma_j)$, где $\theta = (p_1, \dots, p_k, \mu_1, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k)$, $p_1, \dots, p_k > 0$ — веса компонент, такие что $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, μ_j, Σ_j — математическое ожидание и ковариационная матрица j -ой компоненты смеси в виде смеси факторных анализаторов [2]: $y = \mu_j + \Lambda_j z + u$ с вероятностью p_j , $j = \overline{1, k}$, где z — латентная p -мерная переменная, $u \sim N(0, \Psi_j)$ — вектор случайной ошибки, Λ_j — квадратная матрица факторных нагрузок размерности p , Ψ_j — диагональная матрица, такая что $\Sigma_j = \Lambda_j \Lambda_j^T + \Psi_j$.

¹Ибрагимова Альфия Рустемовна — магистрант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: alfiyakzn@gmail.com.

Ibragimova Alfiya Rustemovna — MSc student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.

²Горшенин Андрей Константинович — д.ф.-м.н., доцент, руководитель отдела Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, e-mail: agorshenin@frcsc.ru.

Gorshenin Andrey Konstantinovich — Doctor of Science, Associate Professor, Head of Department, Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences.

Для оценивания неизвестных параметров модели применяется EM-алгоритм [3] и широко его использующаяся стохастическая модификация [4, 5].

В данной работе проведено сравнение рассматриваемой модели с классическими методами кластеризации без учителя и с учителем, включая алгоритмы k -средних, экстремального градиентного бустинга, опорные вектора и случайные леса, на основе тестирования на наборах открытых данных репозитория UCI Machine Learning.

Рассмотрены возможные подходы к построению аналога подобного метода для решения регрессионных задач.

2. Архитектура нейронной сети

Глубокая гауссовская смесь из h слоев случайного вектора y имеет вид:

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \eta_{s_1}^{(1)} + \Lambda_{s_1}^{(1)} z^{(1)} + u^{(1)} \quad \text{с вероятностью } p_{s_1}^{(1)}, \quad s_1 = \overline{1, k_1}, \\ (2) \quad z^{(1)} &= \eta_{s_2}^{(2)} + \Lambda_{s_2}^{(2)} z^{(2)} + u^{(2)} \quad \text{с вероятностью } p_{s_2}^{(2)}, \quad s_2 = \overline{1, k_2}, \\ &\dots \\ (h) \quad z^{(h-1)} &= \eta_{s_h}^{(h)} + \Lambda_{s_h}^{(h)} z^{(h)} + u^{(h)} \quad \text{с вероятностью } p_{s_h}^{(h)}, \quad s_h = \overline{1, k_h}, \end{aligned}$$

где $z^{(1)}, \dots, z^{(h)}$ — скрытые переменные на слоях, имеющие размерности r_1, \dots, r_h , при $z^{(h)} \sim N(0, I_p)$, $\eta_{s_1}^{(1)}, \dots, \eta_{s_h}^{(h)}$ — векторы средних длины p , $\Lambda_{s_1}^{(1)}, \dots, \Lambda_{s_h}^{(h)}$ — матрицы факторных нагрузок размерности $r_{h-1} \times r_h$, при $r_0 = p$, $u^{(l)} \sim N(0, \Psi_{s_l}^{(l)})$, $l = 1, \dots, h$ — векторы случайных ошибок.

Тогда функция плотности распределения y имеет вид:

$$f(y|\theta) = \sum_{s_1=1}^{k_1} p_{s_1}^{(1)} \dots \sum_{s_h=1}^{k_h} p_{s_h}^{(h)} \varphi^{(p)} \left(\eta_{s_1}^{(1)} + \sum_{l=2}^h \left(\prod_{m=1}^{l-1} \Lambda_{s_m}^{(m)} \right) \eta_{s_l}^{(l)}, \right. \\ \left. \Psi_{s_1}^{(1)} + \sum_{l=2}^h \left(\prod_{m=1}^{l-1} \Lambda_{s_m}^{(m)} \right) \Psi_{s_l}^{(l)} \left(\prod_{m=1}^{l-1} \Lambda_{s_m}^{(m)} \right)^\top \right).$$

Например, при $h = 2$ получим:

$$f(y|\theta) = \sum_{s_1=1}^{k_1} p_{s_1}^{(1)} \sum_{s_2=1}^{k_2} p_{s_2}^{(2)} \varphi^{(p)} (\eta_{s_1}^{(1)} + \Lambda_{s_1}^{(1)} \eta_{s_2}^{(2)}, \Psi_{s_1}^{(1)} + \Lambda_{s_1}^{(1)} \Psi_{s_2}^{(2)} \Lambda_{s_1}^{(1)\top}).$$

3. Результаты

Качество работы метода DGMM для решения задачи кластеризации продемонстрировано на рисунке 1 на примере 50 тестовых выборок репозитория UCI. Использована метрика Adjusted Rand Index (ARI), зависящая

только от разбиения выборки на кластеры. Видно, что данный метод имеет точность, до 70% превышающую результаты для алгоритмов из аналогичного класса (k-средних и GMM), и всего на 9% в среднем хуже по сравнению с ситуацией обучения с учителем.

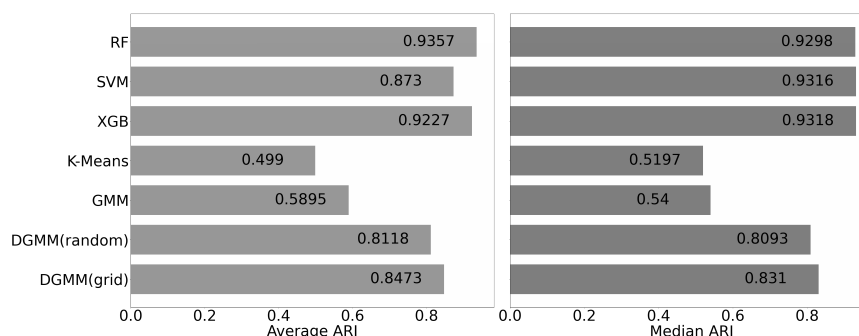


Рис. 1. Сравнение DGMM с другими алгоритмами

Также показано на основе анализа ряда тестовых выборок, что для регрессионных задач использование подобных моделей позволяет добиться точности, сопоставимой с GMM в терминах метрики RMSE и превзойти показатели для линейной регрессии на 22%. Развитие регрессионного варианта DGMM представляет направление дальнейших исследований.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Список литературы

- [1] Viroli C., McLachlan G.J., “Deep Gaussian Mixture Models”, *Statistics and Computing*, **29**:1 (2006), 43–51.
- [2] Baek J., McLachlan J.G., Flack L., “Mixtures of factor analyzers with common factor loadings: applications to the clustering and visualization of high-dimensional data”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **32**:7 (2010), 1298–1309.
- [3] Wu X., Kumar V., Quinlan J., et al., “Top 10 algorithms in data mining”, *Knowledge and Information Systems*, **14**:1 (2008), 1–37.
- [4] Горшенин А.К., Королев В.Ю., Турсунбаев А. М., “Медианные модификации EM- и SEM-алгоритмов для разделения смесей вероятностных распределений и их применение к декомпозиции волатильности финансовых временных рядов”, *Информатика и ее применения*, **2**:4 (2008), 12–47.
- [5] Горшенин А.К., “О сходимости последовательности SEM-оценок в задаче статистического разделения смесей”, *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*, **4**:23 (2011), 39–49.

On Deep Gaussian Mixture Models in Machine Learning Problems

Ibragimova A.R., Gorshenin A.K.

The work is concentrated on the study of deep neural network architectures with implementation of mixtures of normal distributions in hidden layers for solving clustering and regression problems. The model with different sets of hyperparameters was compared to classical methods: k-means, linear regression, Gaussian mixture models (GMM), etc.

Keywords: deep neural networks, mixtures of normal distributions, EM algorithm.

References

- [1] Viroli C., McLachlan G.J., “Deep Gaussian Mixture Models”, *Statistics and Computing*, **29**:1 (2006), 43–51.
- [2] Baek J., McLachlan J.G., Flack L., “Mixtures of factor analyzers with common factor loadings: applications to the clustering and visualization of high-dimensional data”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **32**:7 (2010), 1298–1309.
- [3] Wu X., Kumar V., Quinlan J., et al., “Top 10 algorithms in data mining”, *Knowledge and Information Systems*, **14**:1 (2008), 1–37.
- [4] Gorshenin A.K., Korolev V.Yu., Tursunbayev A.M., “Median modification of EM- and SEM-algorithms for separation of mixtures of probability distributions and their application to the decomposition of volatility of financial time series”, *Inform. Primen.*, **2**:4 (2008), 12–47 (In Russian).
- [5] Gorshenin A.K., “On convergence of SEM estimates sequence for statistical separation of mixture distribution”, *Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.*, **4**:23 (2011), 39–49 (In Russian).

О разметках графов абелевых автоматов

Р. А. Ищенко¹

Автор исследует вопрос количества возможных разметок ребер сильно-связного ориентированного графа, чтобы образованная диаграмма Мура соответствовала некоторому абелевому автомату. Доказано, что в случае алфавита из двух элементов такая разметка единственна (кроме крайнего случая) и приведен алгоритм такого восстановления. В случае алфавита из большего числа элементов показано, что максимальное количество разметок экспоненциально зависит от количества вершин.

Ключевые слова: абелевые автоматы, диаграмма Мура, граф переходов, разметка графа автомата, структура графа автомата.

1. Введение

Абелевы автоматы являются одним из основополагающих классов автоматов, изучавшихся в том числе в работах [1, 2, 3, 4]. Если мы сотрем отметки на диаграмме Мура автомата (предположим, информация потеряна), то получим ориентированный граф. В данной работе приводится критерий того, что ориентированный граф может быть доопределен (размечен) до графа некоторого абелева автомата (восстановление информации), в таком случае граф называется *абелевым*, а разметка — *a-разметкой*. Рассматривается вопрос количества a-разметок в зависимости от структуры графа и показано, что в общем случае максимальное количество a-разметок экспоненциально зависит от количества вершин, однако существует широкий класс абелевых графов с единственной a-разметкой. Отдельно рассматриваются автоматы с двумя входными символами, обладающие рядом интересных свойств, например в [5] было показано, что они вместе с булевыми функциями образуют полную систему относительно суперпозиции. В данной работе показано, что в случае двух входных символов существует алгоритм разметки графа до абелевого автомата за время $O(n)$, где n - число вершин графа.

Автор выражает благодарность профессору Д.Н. Бабину за постановку задачи и помощь в работе.

¹*Ищенко Роман Андреевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ishchenko.roman1@gmail.com.

Ishchenko Roman Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть $V = (A, Q, \varphi)$ — конечный автомат без выходов. Автомат V называется *абелевым*, если для любых символов $\alpha, \beta \in A$ и состояния $q \in Q$ выполняется $\varphi(q, \alpha\beta) = \varphi(q, \beta\alpha)$. *Графом автомата* $V = (A, Q, \varphi)$ называется размеченный ориентированный граф $G = (Q, W, f)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом $e = (q, p) \in W$, $f(e) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(q, \alpha) = p$, где $f : W \rightarrow A, \alpha \in A$. Ориентированный граф $G = (Q, W)$ называется *автоматным*, если существует такая функция $f : W \rightarrow A$, что размеченный граф (Q, W, f) является графом некоторого автомата, в таком случае функция f называется *разметкой* автоматного графа G в алфавите A , а количество символов в алфавите (исходящая степень вершин) называется *степенью графа* G . Автоматный граф $G = (Q, W)$, у которого существует разметка f , что $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого абелевого автомата $V_f = (A, Q, \varphi_f)$, называется *абелевым графом*, а разметка f — *a-разметкой*. Далее иногда мы будем подразумевать под разметкой f соответствующий ей автомат V_f .

Граф G с разметкой f раскладывается в сумму подграфов $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_f(\alpha)$, где $G_f(\alpha) = (Q, W(\alpha), f(\alpha))$, где $W(\alpha) = \{e \in W \mid f(e) = \alpha\}$ и $f(\alpha) = f|W(\alpha)$ (сужение функции f на множество $W(\alpha)$). Как и в случае групповых автоматов, которые изучались в [6], будем различать разметки с точностью до замены букв и/или кратных ребер: разметки f_1 и f_2 графа G в алфавите A называются *различными*, если множество $\{G_{f_1}(\alpha) \mid \alpha \in A\} \neq \{G_{f_2}(\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Если понятно, о какой разметке f идет речь, иногда мы будем писать $G(\alpha)$ вместо $G_f(\alpha)$.

Граф называется *сильно-связным*, если существует ориентированный путь из любой вершины в любую другую. Автомат называется *сильно-связным*, если его граф сильно-связный. В дальнейшем в статье мы будем рассматривать только сильно-связные графы и автоматы.

Определим граф $G(n, m) = (V, W)$ как:

- $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$, где $k = n/m$ и $|V_i| = m$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$
- $W = \{(v, u) \mid v \in V_i \text{ и } u \in V_{i'}, \text{ где } i' = i + 1, \text{ если } i < k \text{ и } i' = 1, \text{ если } i = k\}$

Несложно показать, что граф $G(n, m)$ является абелевым и однозначно определенным с точностью до изоморфизма.

Далее сформулируем основные результаты данной работы:

Теорема 1. *Абелевый граф $G(n, m)$ имеет не менее $(m!)^{n/m-1}$ различных a-разметок.*

Теорема 2. Пусть G — сильно-связный абелевый граф G с n вершинами степени 2, не равный $G(n, 2)$, тогда G имеет единственную a -разметку.

Теорема 3. Пусть G — сильно-связный автоматный граф степени 2, тогда существует алгоритм, который находит a -разметку или определяет, что такой разметки не существует, за время $O(n)$.

Список литературы

- [1] Fleck A.C., “Isomorphism Groups of Automata”, *Journal of the ACM*, **9**:4 (1962), 469–476.
- [2] Charles A. Trauth, “Group-Type Automata”, *Journal of the ACM*, **13**:1 (1966), 170–175.
- [3] Yukio S., “On the structure of abelian automata”, *Journal of Computer and System Sciences*, **13**:2 (1976), 143–152.
- [4] Мальгин В.И., “О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов”, *Вестн. Моск. ун-та Сер. 1, Математика, Механика*, 1988, № 4, 88–90.
- [5] Babin D.N., “On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition”, *Discrete Mathematics and Applications*, **1**:4 (1991), 423–431.
- [6] Ищенко Р.А., “Оценка количества разметок графов групповых автоматов”, *Интеллектуальные системы*, **24**:4 (2020), 75–86.

On the labelings of abelian automata graphs Ishchenko R.A.

The author investigates the number of possible labelings of the edges of a strongly connected directed graph so that the resulting Moore diagram corresponds to some abelian automaton. It is proved that in the case of an alphabet of two elements, such a labeling is unique (except for the extreme case), and the algorithm for such a labeling is given. In the case of an alphabet with a larger number of elements the exponential dependence of the maximum number of labelings on the number of vertices is proved.

Keywords: abelian automata, automation diagramm, transition graph, labelings of automation graph, structure of automation graph.

References

- [1] Fleck A.C., “Isomorphism Groups of Automata”, *Journal of the ACM*, **9**:4 (1962), 469–476.

- [2] Charles A. Trauth, “Group-Type Automata”, *Journal of the ACM*, **13**:1 (1966), 170–175.
- [3] Yukio S., “On the structure of abelian automata”, *Journal of Computer and System Sciences*, **13**:2 (1976), 143–152.
- [4] Малыгин В.И., “О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов”, *Вестн. Моск. ун-та Сер. 1, Математика, Механика*, 1988, № 4, 88–90.
- [5] Babin D.N., “On completeness of the binary bounded determined functions with respect to superposition”, *Discrete Mathematics and Applications*, **1**:4 (1991), 423–431.
- [6] Ishchenko R.A., “The number of labelings of group automata graphs (”, *Intelligent systems*, **24**:4 (2020), 75–86 (In Russian)).

О темпах роста структур с конечным числом существенных ограничений

С. А. Комков¹

Для конечного множества A с заданным на нём множеством операций M определена функция, называемая темпом роста. Порядок роста этой функции характеризует силу и исчислимость множества операций. Показано, что если среди множества всех предикатов, сохраняемых всеми функциями из M , встречается лишь конечное число важных существенных предикатов, то темп роста пары (A, M) имеет логарифмический порядок.

Ключевые слова: темп роста, конечные множества, язык ограничений, логарифмический темп роста.

1. Введение

Рассмотрим декартову степень $n \in \mathbb{N}$ конечного множества A с заданным на нём множеством операций M . Элементы A^n называют *наборами*. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам по координатно, можно получать новые наборы:

$$\left(\begin{array}{c} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} a_1^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} f(a_1^1, \dots, a_1^k) \\ \vdots \\ f(a_n^1, \dots, a_n^k) \end{array} \right), f \in M.$$

Также можно получать новые наборы с помощью уже полученных наборов.

Темпом роста пары (A, M) называют функцию $d_{(A,M)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого n функция $d_{(A,M)}(n)$ равна минимальному числу наборов, из которых можно итеративно получить всё A^n , применяя операции из M по координатно. Таким образом, порядок темпа роста характеризует силу и исчислимость заданного множества операций.

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $M = \{\neg\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $M = \{+\text{mod } 3\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = n$.

Темп роста — не просто количественная характеристика. PSPACE-полная задача может быть сведена к NP-полной задаче в зависимости от

¹Комков Степан Алексеевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stepan.komkov@intsys.msu.ru.

Комков Степан Алексеевич — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

темпа роста некоторой её внутренней структуры. Эта зависимость была показана Хьюби Ченом [1] на основе подкванторной задачи удовлетворения ограничений (QCSP) и задачи удовлетворения ограничений (CSP).

Задача QCSP заключается в проверке выполнимости формулы

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \exists x_n \left(R_1(x_{i_1^1}, \dots, x_{i_1^1}) \wedge \dots \wedge R_p(x_{i_p^p}, \dots, x_{i_p^p}) \right). \quad (1)$$

Здесь R_i , $1 \leq i \leq p$ — это предикаты, заданные на некотором конечном множестве A . Известно, что QCSP является PSPACE-полной задачей.

CSP является частным случаем QCSP, где в проверяемой формуле отсутствуют кванторы всеобщности. Известно, что CSP является NP-полной задачей.

Допустим, что среди предикатов формулы (1) могут встречаться не любые предикаты, а только предикаты из некоторого подмножества всех предикатов. С помощью соответствия Галуа [2, 3] этому подмножеству предикатов можно сопоставить замкнутое множество операций M на множестве A . В [1] показано, что если темп роста пары (A, M) ограничен сверху полиномом, то в этом случае QCSP задача сводится к CSP задаче за полиномиальное время.

Данный результат показывает важность и актуальность изучения темпов роста произвольных конечных замкнутых множеств с заданными на них операциями.

В настоящей работе изучаются темпы роста таких конечных структур, что их множество операций сохраняет лишь конечное число важных существенных предикатов. В терминах QCSP это означает, что язык ограничений содержит лишь конечно число важных существенных предикатов, что является интересным крайним случаем.

2. Основные понятия и формулировка результата

В дальнейшем без утери общности будем полагать, что $A = E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Замечание. $d_{(E_k, M)}(n) \geq \lceil \log_k n \rceil$, $k \geq 2$.

Отображение $\rho : E_k^n \rightarrow \{0, 1\}$ называют *предикатом арности n* .

Говорят, что операция f сохраняет предикат ρ арности n , если для любых таких наборов $a^1, \dots, a^m \in E_k^n$, что $a^{i^\top} \in \rho$, $1 \leq i \leq m$, выполняется $(f(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, f(a_n^1, \dots, a_n^m))^\top \in \rho$. Классы функций могут быть описаны через предикаты, которые они сохраняют [4].

Пусть R — множество предикатов, а M — множество операций. Через $\text{Pol}(R)$ обозначают множество всех операций, сохраняющих каждый

предикат из R . Через $\text{Inv}(M)$ обозначают множество всех предикатов, которые сохраняются всеми операциями из M .

Пусть на множестве $\{1, \dots, n\}$ задано отношение эквивалентности. Предикат ρ называют *диагональю*, если $\rho(a_1, \dots, a_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_i = a_j$ для всех пар $i, j \in \{1, \dots, n\}$ из одного класса эквивалентности. Для удобства множество диагоналей дополняют пустым предикатом. Тем самым, ρ — диагональ тогда и только тогда, когда $\text{Pol}(\{\rho\}) = P_k$.

Предикатом равенства называют такую диагональ $\rho_=$ арности 2, что $\rho_=(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Предикаты могут выводиться из других предикатов аналогично операциям суперпозиции над функциями. Говорят, что предикат ρ *выводится из множества предикатов* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если он представим в виде

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \exists y_1 \dots \exists y_l (\rho_{i_1}(z_{1,1}, \dots, z_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge \rho_{i_s}(z_{s,1}, \dots, z_{s,n_s})),$$

где $z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l\}$ и $\rho_{i_j} \in \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{\rho_=\}$. При этом $\text{Pol}(\{\rho\}) \supset \text{Pol}(\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A})$.

Предикат называют *существенным*, если он не выводится без кванторов существования из множества всех предикатов меньшей арности.

Через \tilde{R} обозначают множество всех существенных предикатов.

Замечание. $d_{(E_k, M)}(n) = d_{(E_k, M \cap \tilde{R})}(n)$.

Предикат ρ называют *важным*, если $\rho(a, \dots, a) = 1$ для любого $a \in E_k$ и при этом предикат ρ не является диагональю, то есть $\text{Pol}(\{\rho\}) \neq P_k$.

Термин важного предиката впервые был введён в [5] для доказательства следующего утверждения:

Теорема. $d_{(E_k, M)}(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда не найдётся важного предиката $\rho \in \text{Inv}(M)$. Причём, если не нашлось важного предиката $\rho \in \text{Inv}(M)$, то $|d_{(E_k, M)}(n) - \log_k n| \leq k + 1$ для любого n .

Через \mathcal{R}_{Imp} обозначают множество всех важных предикатов.

В настоящей работе получены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть $|\text{Inv}(M) \cap \tilde{R} \cap \mathcal{R}_{\text{Imp}}| < \infty$. Тогда $d_{(E_k, M)}(n) \asymp \log n$, $n \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Пусть $|\text{Inv}(M) \cap \tilde{R}| < \infty$. Тогда $d_{(E_k, M)}(n) \asymp \log n$, $n \rightarrow \infty$.

Список литературы

- [1] Chen H., “Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property”, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2008, 197–208.
- [2] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., “Теория Галуа для алгебр Поста I”, *Кибернетика*, 1969, № 3, 1–10.
- [3] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., “Теория Галуа для алгебр Поста II”, *Кибернетика*, 1969, № 5, 1–9.
- [4] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2006, 668 с.
- [5] Комков С. А., “Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста”, *Дискрет. матем.*, **30**:1 (2018), 19–38; *Discrete Math. Appl.*, **29**:3 (2019), 159–173.

On growth rate of structures with a finite number of essential constraints Komkov S.A.

Growth rate is a function defined for an arbitrary finite set A with a set of operations M defined on it. Its order characterizes the strength of given operations. We show that if there is only a finite number of important essential predicates among all predicates that are preserved by each function from M then the growth rate order of the (A, M) pair is logarithmic.

Keywords: growth rate, finite sets, constraint language, logarithmic growth rate.

References

- [1] Chen H., “Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property”, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2008, 197–208.
- [2] Bodnarchuk V. G., Kaluzhnin L. A., Kotov V. N., Romov B. A., “Galois theory for post algebras. I”, *Cybernetics*, **5**:3 (1969), 243–252.
- [3] Bodnarchuk V. G., Kaluzhnin L. A., Kotov V. N., Romov B. A., “Galois theory for Post algebras. II”, *Cybernetics*, **5**:5 (1969), 531–539.
- [4] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2006, 668 с.
- [5] Komkov S. A., “On classes of functions of many-valued logic with minimal logarithmic growth rate”, *Discrete Mathematics and Applications*, **30**:4 (2020), 265–272.

Ускорение вычисления тестовой функции при оценке качества решающей функции NAGTA

Н. П. Кочетова¹ А. Б. Фролов²

Для неадаптивного группового тестирования предложен способ ускорения вычисления тестовой функции при оценке качества порогового решающего правила принятия решения о позитивности множества образцов. Ускорение достигается использованием наряду с дуальными блоками комбинаторной блок-схемы ее блоков, соответствующих элементам анализируемого множества.

1. Введение

Идея группового тестирования инициализирована еще в 1943 г. Р. Дорфманом [1] в связи задачей массового тестирования характерного заболевания по анализу крови. Целью группового тестирования является выявление т.н. позитивного множества редких позитивных образцов из заданного множества образцов по результатам тестирования определенным образом составляемых групп образцов на предмет наличия или отсутствия позитивного образца в группе. Она получила развитие в приложениях комбинаторики [2], в частности, с использованием комбинаторных блок-схем для представления и анализа используемых групп образцов [3]. В [4] изучаются алгоритмы неадаптивного группового тестирования в условиях шумов, сопровождающих измерения при групповом тестировании. В настоящей работе рассматривается идеальная схема группового тестирования (без шумов) и решается задача ускорения вычисления тестовой функции при оценке качества пороговой функции принятия или отклонения решения о позитивности анализируемого множества образцов. Ускорение достигается использованием блоков комбинаторной блок-схемы вместо ее дуальных блоков. Рассматриваются комбинаторные линейные и квадратичные трансверсальные блок-схемы [5].

¹Кочетова Наталья Петровна — студентка каф. МКМ института ИВТ МЭИ, e-mail: iNatashka99@yandex.ru.

Kochetova Natalya Petrovna — student, MPEI, Institute of Information and Computing Technologies, Department of Mathematical and Computer Modeling.

²Фролов Александр Борисович — профессор каф. МКМ института ИВТ МЭИ, e-mail: frolovab@mail.ru.

Frolov Alexander Borisovich — professor, MPEI, Institute of Information and Computing Technologies, Department of Mathematical and Computer Modeling.

2. Основные понятия и формулировка результата

Пусть X есть множество m образцов и \mathcal{A} есть множество его подмножеств -тестов. Пара (X, \mathcal{A}) называется (m, n) -NAGTA (non adaptive group algorithm) [3]. Обозначим U , $U \subset X$ множество позитивных образцов. Результатом группового тестирования является т.н. *тестовая функция* $R_U(A) : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ с областью единичных значений (*тестовым множеством*)

$$R_U^{(1)} = \{A : A \cap U \neq \emptyset\}. \quad (1)$$

По (1) нужно выделить подмножество U позитивных образцов. По (1) и X можно вычислить множество

$$U^* = X \setminus \cup_{A \notin R_U^{(1)}} A. \quad (2)$$

Если $|U^*| = |U|$, то по результату тестирования позитивное множество определяется однозначно: $U = U^*$, и если $U \neq U^*$, то $R_U^{(1)} \neq R_{U^*}^{(1)}$. Но в реальных условиях мощность $|U|$ позитивного множества заранее неизвестна, но можно предположить, что $|U| \leq s$, где $s \leq m$ - заданное целое число. Тогда (X, \mathcal{A}) называется (X, \mathcal{A}) - NAGTA с порогом s , если $R_U \neq R_V$ всякий раз, когда $U, V \subseteq X, |U| \leq s, |V| \leq s$, и $U \neq V$ [3]. Таким образом, практически используется пороговое правило принятия решения о позитивности полученного по результату тестирования множества U^* , определяемое предикатом $|U^*| \leq s$. Для оценки качества этого правила применительно к конкретной (X, \mathcal{A}) - NAGTA с порогом s предлагается использовать экспертные решения для каждого множества U , $|U| \leq s$, определяемые предикатом $|U^*| = |U|$. Тогда можно характеризовать решения порогового правила по каждому такому множеству: tp , если $|U^*| \leq s$ и $|U^*| = |U|$; fp , если $|U^*| \leq s$ и $|U| < |U^*|$; fn , если $|U^*| > s$ и $|U^*| = |U|$; tn , если $|U^*| > s$ и $|U| < |U^*|$;

При этом качество пороговой функции определится по количествам $n_{tp}, n_{fp}, n_{fn}, n_{tn}$ таких характеристик, полученных по всем множествам $U, |U| \leq s$ и для каждого из них придется вычислять тестовое множество $R_U^{(1)}$.

Замена индивидуального тестирования групповым тестированием целесообразна только при выполнении неравенства: $|\mathcal{A}| < |X|$. Такие комбинаторные схемы можно встретить в классе систем троек Штейнера или комбинаторных трансверсальных дизайнов.

Линейная трансверсальная комбинаторная блок-схема $TD(2, k, n)$ строится на множестве Y из kn элементов, имеет n^2 блоков $B(a), a \in X$, (множество $\mathcal{B}, |\mathcal{B}| = |X|$) по k элементов и kn дуальных блоков по n элементов (множество $\mathcal{A}, |\mathcal{A}| = |Y|$) [5].

Квадратичная трансверсальная комбинаторная блок-схема $TD(3, k, n)$ строится на множестве Y из kn элементов, имеет n^3 блоков $B(a)$, $a \in X$, (множество \mathcal{B} , $|\mathcal{B}| = |X|$) по k элементов и kn дуальных блоков по n^2 элементов (множество \mathcal{A} , $|\mathcal{A}| = |Y|$) [5].

Если в качестве множества \mathcal{A} принять множество дуальных блоков, то для вычисления тестового множества (1) в случае линейной трансверсальной блок-схемы потребуется выполнить $|U|kn \log_2 n$ операций в поле $GF(n)$ и вдвое больше в случае квадратичной. Это соответствует способу вычисления тестового множества непосредственно по его определению с использованием множества дуальных блоков.

Альтернативным является вычисление тестового множества с построением блоков. Множество (1) получается объединением $|U|$ блоков $B(a)$:

$$R_U^{(1)} = \cup_{a \in U} B(a). \quad (3)$$

Всего при вычислении по (3) затрачивается не более $|U|(t(k-1) + k \log_2 kn) = |U|(k \log_2 kn + t) - t$ операций.

Вычислениями по (3) и далее по (2) с использованием блоков и дуальных блоков трансверсальных дизайнов $TD(t, k, n)$ экспериментально подтверждены данные об их применении, приведенные в Таблице 1.

Таблица 1.

Дизайн	kn (Число групповых тестов)	b (число образцов)	r (число элементов в группе)	Порог s	$n_{tp}\%$	$n_{tn}\%$	$n_{fn}\%$
TD(3,3,4)	12	64	16	1	1	0	0
TD(2,2,8)	16	64	8	1	1	0	0
TD(2,3,8)	24	64	8	2	1	0	0
TD(3,4,8)	32	512	64	2	73	27	0

Если s увеличить на 1, то все числа будут $n_{tp} = 0$, $n_{tn} = 1$, при $s = 1$ для TD(3,4,8) значения $n_{tp} = 1$, $n_{tn} = 0$.

Применительно к TD(3,4,8) вычислительным экспериментом подтверждено, что построенное по тестовому множеству множество из $s = 2$ элементов является множеством положительных образцов. Такими оказываются 73 процентов множеств: $n_{tp} = 93777$, $n_{tn} = 33649$. По тестовым множествам, построенным по любому из остальных позитивных множеств мощности s , получаются множества, содержащие кроме элементов исходного позитивного множества еще и другие элементы. Добавление таких элементов к исходному множеству не изменяет тестовое множество.

Список литературы

- [1] R. Dorfman, “The detection of defective members of large populations”, *Annals of Mathematical Statistics*, **14** (1943), 436–411.
- [2] D.-Z. Du and F. K. Hwang, “Combinatorial Group Testing and Its Applications”, *2nd ed. World Scientific Publishing Company*, 2000.
- [3] D. Stinson, *Combinatorial designs: constructions and analysis*, Springer, Berlin, Germany, 2003.
- [4] DChun Lam Chan, Sidharth Jaggi, Venkatesh Saligrama, Samar Agnihotri, “Non-adaptive Group Testing: Explicit bounds and novel algorithms”, *2012 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings*, 2012.
- [5] Paterson M. B., Stinson D. R., “Unied Approach to Combinatorial Key Predistribution Schemes for Sensor Networks”, *Designs, Codes and Cryptography*, **71**:3 (June 2014), 433–457.

Speeding up the computing of the test function when assessing the quality of the NAGTA threshold function Kochetova N.P., Frolov A.B.

For non-adaptive group testing, a method is proposed to accelerate the computing of the test function when assessing the quality of the threshold decision rule for making a decision on the positivity of a set of samples. Acceleration is achieved by using, along with dual blocks, a combinatorial block diagram of its blocks corresponding to the elements of the analyzed set.

References

- [1] R. Dorfman, “The detection of defective members of large populations”, *Annals of Mathematical Statistics*, **14** (1943), 436–411.
- [2] D.-Z. Du and F. K. Hwang, “Combinatorial Group Testing and Its Applications”, *2nd ed. World Scientific Publishing Company*, 2000.
- [3] D. Stinson, *Combinatorial designs: constructions and analysis*, Springer, Berlin, Germany, 2003.
- [4] DC. L. Chan, S. Jaggi, V. Saligrama, S. Agnihotri, “Non-adaptive Group Testing: Explicit bounds and novel algorithms”, *2012 IEEE IS on IT Proc.*, 2012.
- [5] Paterson M. B., Stinson D. R., “Unied Approach to Combinatorial Key Predistribution Schemes for Sensor Networks”, *Designs, Codes and Cryptography*, **71**:3 (June 2014), 433–457.

Детские рисунки и их приложения

Е. М. Крейнес¹

Обсуждается соответствие между детскими рисунками Гротендика и парами Белого на приводимых кривых. Особое внимание будет уделено приложениям.

Ключевые слова: детские рисунки, вложенные графы, пары Белого.

Детским рисунком называется граф Γ , вложенный в компактную гладкую ориентированную поверхность M без границы таким образом, что теоретико-множественное дополнение $M \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Это понятие было впервые введено Александром Гротендиком в [8], отсюда же пришло название “детский рисунок”. Вдохновленный теоремой Г. Белого [4] Гротендик положил начало систематическому изучению таких графов и их связей с алгебраическими кривыми χ , на которых существует непостоянная мероморфная функция $\beta : \chi \rightarrow \mathbb{C}P^1$ с не более чем тремя критическими значениями. Здесь под критическим значением понимается такая точка многообразия $\mathbb{C}P^1$, которая имеет меньше прообразов относительно действия β , чем общая точка. Функции с не более чем тремя критическими значениями называются *функциями Белого*, а пары алгебраическая кривая и функция Белого на ней — *парами Белого*. В работе [14] Воеводским и Шабатом установлена эквивалентность подходящим образом введенных категорий детских рисунков и пар Белого. Выявленные связи объектов столь различной природы приводят к обнаружению новых и нетривиальных взаимосвязей между различными структурами в теории категорий, алгебре, алгебраической геометрии, комплексном анализе, теоретической физике и информатике, см. работы [1, 2, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16] и приведенные в них ссылки. В последнее время обнаружили даже нетривиальные приложения в генетике [3, 5], поскольку оказалось, что рекомбинация кусков ДНК при удвоении моделируется детскими рисунками специального вида и описывается в их терминах.

Основная цель настоящего исследования — ввести детские рисунки и пары Белого на приводимых кривых и изучить связи между ними. В качестве *допустимых* детских рисунков будем рассматривать объединение нескольких детских рисунков, которое либо является несвязным,

¹*Крейнес Елена Михайловна* — к.ф.-м.н., ст.н.с. каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elena.kreines@math.msu.ru.

Kreines Elena Mikhailovna — senior scientific researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Informatics.

либо несколько рисунков имеют общую вершину или центр грани, причем дополнение поверхности до графа может являться объединением как открытых дисков, так и наборов открытых дисков, у которых все диски в каждом наборе имеют единственную общую точку. *Допустимые* пары Белого представляют собой пары Белого на полных кривых, возможно, особых и/или приводимых. При этом все значения в особых точках по определению относятся к критическим значениям.

Допустимые детские рисунки и пары Белого возникают естественным образом при решении систем уравнений, определяющих пары Белого, см. [1, 2, 9]. Также они важны для приложений. Целью доклада является аккуратное определение допустимых детских рисунков и изучение соответствия, возникающего между ними и допустимыми парами Белого, аналогичного классическому случаю. Также мы обсудим преимущества использования допустимых детских рисунков в приложениях.

Доклад основан на серии совместных результатов с Н.Я. Амбург и Г.Б. Шабатом.

Список литературы

- [1] N. M. Adrianov, Ya N. Amburg, V. A. Dremov, Yu A. Levitskaya, E. M. Kreines, Yu Yu Kochetkov, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, “Catalog of dessins d’enfants with no more than 4 edges”, *Journal of Mathematical Sciences*, **158**:1 (2009), 22–80.
- [2] Н.Я. Амбург, Е.М. Крейнс, Г.Б. Шабат, “Паразитические решения систем уравнений, определяющие функции Белого плоских деревьев”, *Вестник Моск. Университета*, **1** (2004), 20-25.
- [3] A. Angeleska, N. Jonoska, M. Saito DNA recombinations through assembly graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **157** (2009), 3020–3037.
- [4] Г.В. Белый, “О расширениях Гауа максимального кругового поля”, *Изв. Акад. Наук СССР*, **43** (1979), 269-276.
- [5] J. Burns, E. Dolzhenko, N. Jonoska, T. Muche, M. Saito, “Four-Regular Graphs with Rigid Vertices Associated to DNA Recombination”, *Discrete Applied Mathematics*, **161** (2013), 1378-1394.
- [6] J. Bètréma, D. Pèrè, A. Zvonkin, “Plane Trees and their Shabat Polynomials, Catalog”, *Bordeaux: Rapport Interne de LaBRI*, 1992.
- [7] Ph. L. Bowers, K. Stefenson, “Uniformizing dessins and Belyi maps via circle packing”, *Memoirs of the AMS*, **805**:107 (2004).
- [8] A. Grothendieck, “Esquisse d’un programme”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **242** (1997), 5-48.
- [9] E. M. Kreines, “On families of geometric parasitic solutions for Belyi systems of genus zero”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **128**:6 (2005), 3396-3401.
- [10] G. A. Jones, D. Singerman, “Belyi functions, hypermaps and Galois groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), 561-590.
- [11] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications, with an appendix by D. Zagier.*, *Encycl. of Math. Sciences*, **141**, Springer, 2004.

- [12] P. Lochak, L. Schneps, “Geometric Galois Actions, 1, 2”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 242 — 243, 1997.
- [13] L. Schneps (ed.), “The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **200** (1994).
- [14] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, “Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift, III”, *Progress in Mathematics*, **88** (1990), 199-227.
- [15] G. Shabat, A. Zvonkin, “Plane trees and algebraic numbers”, *Contemporary Mathematics*, **178** (1994), 233-275.
- [16] A. Zvonkin, “How to draw a group?”, *Discrete Math.*, **180** (1998 403-413).

Dessins d’enfants and their applications Kreines E.M.

The correspondence between Grothendieck dessins d’enfants and Belyi pairs on reducible curves is discussed. Much attention is paid for the applications.

Keywords: dessin d’enfants, embedded graphs, Belyi pairs.

References

- [1] N. M. Adrianov, Ya N. Amburg, V. A. Dremov, Yu A. Levitskaya, E. M. Kreines, Yu Yu Kochetkov, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, “Catalog of dessins d’enfants with no more than 4 edges”, *Journal of Mathematical Sciences*, **158**:1 (2009), 22–80.
- [2] N. Ya. Amburg, E. M. Kreines, G. B. Shabat, “Parasitical solutions of systems of equations determining Belyi pairs for plane trees”, *Vestnik Mosk. Universiteta*, **1** (2004), 20-25 (in Russian).
- [3] A. Angeleska, N. Jonoska, M. Saito DNA recombinations through assembly graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **157** (2009), 3020–3037.
- [4] G. V. Belyi, “On Galois extensions of a maximal cyclotomic field”, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **43** (1979), 269-276 (in Russian).
- [5] J. Burns, E. Dolzhenko, N. Jonoska, T. Muche, M. Saito, “Four-Regular Graphs with Rigid Vertices Associated to DNA Recombination”, *Discrete Applied Mathematics*, **161** (2013), 1378-1394.
- [6] J. Bètréma, D. Pèrè, A. Zvonkin, “Plane Trees and their Shabat Polynomials, Catalog”, *Bordeaux: Rapport Interne de LaBRI*, 1992.
- [7] Ph. L. Bowers, K. Stefenson, “Uniformizing dessins and Belyi maps via circle packing”, *Memoirs of the AMS*, **805**:107 (2004).
- [8] A. Grothendieck, “Esquisse d’un programme”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **242** (1997), 5-48.
- [9] E. M. Kreines, “On families of geometric parasitic solutions for Belyi systems of genus zero”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **128**:6 (2005), 3396-3401.
- [10] G. A. Jones, D. Singerman, “Belyi functions, hypermaps and Galois groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), 561-590.

- [11] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications, with an appendix by D. Zagier.*, Encycl. of Math. Sciences, **141**, Springer, 2004.
- [12] P. Lochak, L. Schneps, “Geometric Galois Actions, 1, 2”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series 242 — 243*, 1997.
- [13] L. Schneps (ed.), “The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **200** (1994).
- [14] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, “Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift, III”, *Progress in Mathematics*, **88** (1990), 199-227.
- [15] G. Shabat, A. Zvonkin, “Plane trees and algebraic numbers”, *Contemporary Mathematics*, **178** (1994), 233-275.
- [16] A. Zvonkin, “How to draw a group?”, *Discrete Math.*, **180** (1998 403-413).

Исследование пограничных случаев реализации клеточным автоматом двунаправленного движения на луче

Е. В. Кузнецова¹

В работе рассматривается реализация клеточным автоматом различных законов движения точки на бесконечном экране. Найдены алгоритмы построения изображений для трёх классов законов движения. Показано, что для моделирования этих законов движения точки на луче минимальное число состояний клеточного автомата равно 4.

Ключевые слова: клеточный автомат, число состояний, бесконечный экран, двунаправленное движение, конструирование изображений.

Пусть S — некоторое множество слов в алфавите $\{f, s, b\}$, в префиксе любой длины которых количество символов b не превышает количества символов f . Элементы множества S будем называть *законами движения*. Символ f подразумевает движение на одну клетку вправо, s — остаться на месте, b — на одну клетку влево.

Экраном будем называть следующую конструкцию.

Пусть имеется бесконечная в правую сторону полоса шириной в одну клетку. В каждую клетку полосы поместим по одному экземпляру одного и того же конечного автомата. К входам этого автомата присоединим выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, у автомата имеется три входа: *левый*, *правый* и состояние автомата в предыдущий момент времени. Выходом автомата в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени. Для автомата, стоящего в самой левой клетке полосы левый вход не определён. Будем называть его *управляющим входом* и подавать на него *управляющие сигналы*.

Значения состояний клеточного автомата, при которых считается, что клетка, находящаяся в данном состоянии, видима (чёрная) будем называть *метками*.

Будем говорить, что *на экране реализуется движение по закону* $A \in S$, если выполняются следующие условия:

¹ Кузнецова Екатерина Викторовна — младший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: kuz.net.sova@mail.ru.

Kuznetsova Ekaterina Viktorovna — Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

- 1) в некоторый момент времени в самой левой клетке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток);
- 2) изменение позиции метки на экране в i -й момент от начала движения соответствует i -й букве в слове или сверхслове A , а именно, если $A(i) = s$, то в $(i + 1)$ -й момент метка остается в той же клетке, где была в текущий момент, если $A(i) = f$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, если $A(i) = b$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну клетку влево;
- 3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран будем называть *универсальным* для множества законов движения S , если для любого закона движения из S существует такая последовательность управляющих сигналов, что на экране формируется такое изображение, что метка движется по закону S .

В начальный момент все элементарные автоматы экрана находятся в состоянии ноль. Затем начинаем подавать на управляющий вход сигналы. В какой-то момент в самой левой клетке экрана появится метка.

Под появлением точки на экране будем подразумевать переключение клетки автомата, соответствующей самой левой клетке экрана, в состояние, соответствующее состоянию метки.

Законы движения из S , обладающие тем свойством, что перед символом f в них всегда стоит символ s , то есть движение вперед возможно со скоростью, не большей, чем $1/2$, можно реализовать клеточным автоматом с пятью состояниями, причем оценка на количество состояний не улучшаема.

Ранее Титовой Е. Е. был получен аналогичный результат для законов движения без движения назад.

Теорема 1 (Титова [1]). Пусть $F = ((sf) \vee (s))^\infty$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s\}$. Существует универсальный экран для множества законов движения F , имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для F не существует.

Теорема 2 (доказана в работе [2]) по сути является расширением результата Титовой.

Теорема 2. Пусть $S^1 = ((sf) \vee (s) \vee (b))^\infty$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S^1 любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Существует универсальный экран для множества

законов движения S^1 , имеющий 5 состояний клеточного автомата. Универсального экрана с 4 состояниями для S^1 не существует.

С одной стороны в работе [1] доказано, что трёх состояний клеточного автомата не хватает даже для реализации классов законов движения, в которых нет движения назад. С другой стороны с пятью состояниями можно реализовать S^1 . Остаётся вопрос, какие законы можно реализовать экранами с четырьмя состояниями. Оказывается, что можно реализовать законы движения с меньшими скоростями движения вперёд или назад — подмножества S^1 .

Теорема 3 (Законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад $1/2$). Пусть S^2 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, s, sb\}$ таких, что в префиксе S^2 любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Существует универсальный экран для множества законов движения S^2 , имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^2 не существует.

Теорема 4 (Законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад 1). Пусть S^3 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s, b\}$ и начинающихся с элемента s таких, что в префиксе S^3 любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Существует универсальный экран для множества законов движения S^3 , имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^3 не существует.

Теорема 5 (Законы движения со скоростью движения вперёд $1/3$, скоростью движения назад 1 и чётным количеством остановок). Пусть S^4 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss, b\}$ таких, что в префиксе S^4 любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Существует универсальный экран для множества законов движения S^4 , имеющий 4 состояния клеточного автомата. Универсального экрана с 3 состояниями для S^4 не существует.

Гипотеза. Пусть S^5 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, s, b\}$ таких, что в префиксе S^5 любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата для множества законов движения S^5 .

Если бы удалось доказать эту гипотезу, то был бы полностью закрыт вопрос о том, какие законы движения можно реализовать экранами с четырьмя состояниями.

Автор выражает благодарность научному руководителю, д. ф.-м. н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

- [1] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.
- [2] Кузнецова Е.В., “Число состояний универсального автомата бесконечного экрана, реализующего двунаправленное движение на луче”, *Интеллектуальные системы*, **25**:1 (2021), 127–148.

Investigation of edge cases of a cellular automaton implementation of bidirectional motion on a ray

Kuznetsova E. V.

The paper considers the implementation of various motion laws of a point on an infinite screen by a cellular automaton. Algorithms for constructing images for three classes of motion laws are found. It is shown that for modeling these motion laws of a point on a ray, the minimum number of a cellular automaton states is 4.

Keywords: cellular automaton, number of states, infinite screen, bidirectional motion, image construction.

References

- [1] Titova E.E., “Konstruirovaniye dvizhushchikhsya izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Moving images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **18**:1 (2014), 153–180 (in Russian).
- [2] Kuznetsova E.V., “The number of states of a universal automaton of an infinite screen that implements bidirectional motion on a ray”, *Intelligent Systems*, **25**:1 (2021), 127–148 (in Russian).

Критерий безопасного объединения систем с моделью take-grant

В. А. Кузовихина¹

В работе рассматривается задача безопасного объединения систем с моделью take-grant с точки зрения добавления новых доступов и соответствия субъектов. Объединение систем безопасно, если множество доступов внутри каждой из систем не изменилось. Получены критерии безопасного объединения для каждого из способов объединения.

Ключевые слова: формальные модели безопасности, модель take-grant, безопасное объединение.

1. Введение

В случае слияния нескольких компаний или создания служб “единого окна” актуальной становится задача безопасного объединения систем. Объединение систем является безопасным, если в результате объединения множество возможных доступов внутри каждой системы осталось неизменным.

Задача безопасного объединения формальных моделей безопасности рассматривалась в работах Иткеса А.А. ([1]) и Шапченко К.А. ([2]). Были получены критерии безопасного объединения в некоторых частных случаях, а также установлена эквивалентность ряда формальных моделей.

На данный момент известно довольно большое количество формальных моделей безопасности, среди которых такие классические модели, как модель take-grant ([3]), модель Белла – Лападула ([3]), и современные модели, например, модель СВАС ([4]).

В данной работе рассматривается задача объединения систем с политикой take-grant с двух сторон. Во-первых, с точки зрения доступов (задаются новые доступы между системами). Во-вторых, с точки зрения соответствия субъектов. Получены критерии безопасного объединения систем с моделью take-grant для каждого из способов объединения.

2. Основные понятия и результаты

Приведем описание модели take-grant, взятое из работы ([3]).

¹Кузовихина Веста Андреевна — учитель, Новая школа, e-mail: pletnyova_va@mail.ru.

Kuzovikhina Vesta Andreevna — teacher, New School.

Состояние системы описывается графом доступов. Множество доступов $R = \{r, w, c, t, g\}$ на чтение, запись, исполнение и пара выделенных доступов take (t) и grant (g). На множестве объектов $O(\tau)$ как на вершинах определен ориентированный граф $G_\tau(V, E)$, где $V = O(\tau)$, а E — множество ребер, помеченных доступами. Будем считать, что множество субъектов $S(\tau) = O(\tau)$. Преобразование графов доступов проводится при помощи четырех команд: take , grant , create и remove .

Систему будем считать безопасной, если невозможно получить запрещенный доступ с помощью последовательности разрешенных команд. Свойство безопасности модели take-grant разрешимо.

Определение. В графе доступов G вершины P и S называются tg -связными, если существует путь в G , соединяющий P и S , безотносительно ориентации дуг, но такой, что каждое ребро этого пути имеет метку t или g .

Теорема (Критерий безопасности системы, [3]). Пусть в системе все объекты являются субъектами. Тогда субъект P может получить доступ α к субъекту X тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) Существует субъект S такой, что в текущем графе G есть ребро (S, α, X) .
- 2) S tg -связен с P .

Таким образом, множество вершин V разбивается в объединение компонент tg -связности.

2.1. Объединение с помощью добавления ребер

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — две системы, реализующие модель take-grant , $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Система $G = (V, E)$ называется объединением G_1 и G_2 , если $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, причем все ребра из E_3 имеют вид (v', v'') , где $v' \in V_1, v'' \in V_2$ или $v' \in V_2, v'' \in V_1$.

В качестве доступов далее будем рассматривать доступы не из множества $\{t, g\}$. Если вершина a компоненты tg -связности A имеет доступ α к вершине b , то любая вершина $a' \in A$ имеет доступ α к вершине b . Обозначим множество таких доступов (A, α, b) . Множество всех доступов компоненты A обозначим R_A .

Предположим, что в графе G есть две компоненты tg -связности A и B с одинаковыми наборами доступов, то есть $R_A = R_B$. Тогда если соединить компоненты A и B tg -ребрами, то множество всех возможных доступов в графе G не изменится. Без ограничения общности, будем считать, что все tg -компоненты одной системы имеют попарно различные

множества возможных доступов (иначе, tg-компоненты с одинаковыми доступами будем считать одной tg-компонентой). Через R'_A обозначим множество новых доступов, проведенных из компоненты A .

Теорема 1. *Объединение G_1 и G_2 безопасно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- 1) *каждая tg-компонента графа G_1 соединена tg-ребрами с не более чем одной tg-компонентой графа G_2 и наоборот;*
- 2) *если A — tg-компонента графа G_1 соединена tg-ребрами с B — tg-компонентой графа G_2 , то $R'_A \subseteq R_B$ и $R'_B \subseteq R_A$.*

2.2. Объединение через соответствие субъектов

Рассмотрим объединение двух систем G_1 и G_2 с помощью отображений $m_1 : S_1 \rightarrow 2^{S_2}, m_2 : S_2 \rightarrow 2^{S_1}$, где S_1 — множество субъектов первой системы G_1 , а S_2 — множество субъектов второй системы G_2 .

В такой постановке рассматривал задачу объединения А.А. Иткес в своей работе ([1]).

Будем считать, что субъект $s_1 \in S_1$ отождествлен с субъектом $s_2 \in S_2$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\forall s_i \in S_2$ такого, что есть доступ (s_i, a, s_2) , есть доступ (s_i, a, s_1)
- 2) $\forall s_j \in S_2$ такого, что есть доступ (s_2, a, s_j) , есть доступ (s_1, a, s_j) .

Содержательно это означает, что пользователь s_1 входит во вторую систему под именем пользователя s_2 .

Теорема 2. *Объединение G_1 и G_2 безопасно тогда и только тогда, когда субъект системы G_1 отождествлен с субъектами системы G_2 из не более чем одной компоненты tg-связности и наоборот.*

3. Заключение

В работе рассмотрена задача объединения систем с моделью take-grant. Получены критерии безопасного объединения систем относительно доступов и отождествления субъектов.

Прямого доступа между субъектами может и не быть, но при этом информация может передаваться с помощью информационного потока. Простейшие информационные потоки возникают от объекта O к субъекту S , если субъект S осуществляет доступ на чтение к объекту O , и от субъекта S к объекту O , если субъект S осуществляет доступ на запись к объекту O . Более сложные информационные потоки возникают

при транзитивном замыкании цепочек доступов. Интересно посмотреть на задачу объединения систем с моделью take-grant, рассматривая информационные потоки вместо доступов.

Автор благодарит научного руководителя к.ф.-м.н. Галатенко А.В. за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Иткес А. А., “Объединение моделей логического разграничения доступа для сложноорганизованных распределенных информационных систем”, *Проблемы информатики*, 2010, № 1, 85 – 94.
- [2] Шапченко К.А., “Современные методы проверки свойств безопасности в моделях логического разграничения доступа”, *Проблемы информатики*, 2009, № 3, 10 – 19.
- [3] Грушо А.А., Тимонина Е.Е., *Теоретические основы защиты информации*, Яхтсмен, Москва, 1996.
- [4] Afonin S., Bonushkina A., “Validation of Safety-Like Properties for Entity-Based Access Control Policies”, *Advances in Soft and Hard Computing*, 2019, 259 – 271.

Criterion of secure union of systems with take-grant models Kuzovikhina V.A.

In this work we consider the problem of secure union of systems with take-grant models from the point of view of adding new accesses and corresponding of subjects. Union of systems is considered secure if the set of accesses did not change for each individual system. We obtain the criteria of secure union for each union type.

Keywords: formal security models, take-grant model, secure union.

References

- [1] Itkes A. A., “Union of access control models for complex distributed information systems”, *Problemy informatiki*, 2010, № 1, 85 – 94 (in Russian).
- [2] Shapchenko K.A., “Modern approaches to verification of security properties in access control models”, *Problemy informatiki*, 2009, № 3, 10 – 19 (in Russian).
- [3] Grusho A. A., Timonina E.E., *Theoretical Foundations of Information Security*, Yachtsman, Moscow, 1996 (in Russian).
- [4] Afonin S., Bonushkina A., “Validation of Safety-Like Properties for Entity-Based Access Control Policies”, *Advances in Soft and Hard Computing*, 2019, 259 – 271.

Алгоритм минимизации сложности аппаратной реализации сбалансированных S-блоков

Е. А. Курганов¹

В докладе рассматривается авторский алгоритм, позволяющий получить аппаратную реализацию произвольной системы из m булевых функций от n переменных и его применение к сбалансированным S-блокам. После этого в плане сложности сравниваются аппаратные реализации S-блоков, полученные при помощи нового алгоритма и других известных методов.

Ключевые слова: S-блок, аппаратная реализация, оптимизация сложности схем, потоковые шифры, блочные шифры.

1. Введение

S-блок — это нелинейное преобразование, принимающее на вход n бит и возвращающее m бит. Такое преобразование проще всего представлять как таблицу подстановок размером $n \times m$. Чаще всего в криптографии используют только сбалансированные S-блоки (это значит, что отображение, задаваемое S-блоком, является биекцией, т.е. число входных битов равно числу выходных битов).

В настоящем докладе рассматривается аппаратная реализация сбалансированных S-блоков. Один из определяющих параметров производительности таких реализаций — сложность схемы, т.е. общее число элементов схемы. Рассматривается базис из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (игнорируется при вычислении сложности).

2. Алгоритм минимизации сложности системы булевых функций

Рассмотрим систему из m булевых функций от n переменных $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$. Каждой из этих функций можно поставить в соответствие ее вектор значений p_1, \dots, p_m длины 2^n , где

¹Курганов Евгений Александрович — ведущий разработчик программного обеспечения, ФГАУ НИИ «Восход», e-mail: kuev@yandex.ru.

Kurganov Evgenii Alexandrovich — senior software developer, Scientific and Research Institute Voskhod.

$p_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, 2^n$. Причем $p_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда в таблице истинности функции f_i на j -м месте стоит 1. Будем рассматривать только системы из попарно различных векторов.

Введем обозначение: для каждого вектора p_i , $i = 1, \dots, m$

$$N_V(p_i) = \begin{cases} wt_H(p_i) - 1, & \text{если } wt_H(p_i) > 1, \\ 0, & \text{если } wt_H(p_i) \leq 1, \end{cases}$$

где $wt_H(v)$ означает количество координат, равных единице (т.н. вес Хэмминга), для вектора v .

Для пары векторов p_i, p_j , $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$ определим вектор $p_i \& p_j$ следующим образом: $(p_i \& p_j)_k = p_{i_k} \& p_{j_k}$.

Основная идея алгоритма состоит в следующем:

- 1) Разбить исходное множество векторов на пары $(p_i, p_j)_t$, $t = 1, \dots, n/2$, так, что $N_V(v_t = (p_i \& p_j)_t)$ максимально.
- 2) Для каждой пары $(p_i \& p_j)_t$ (где l — номер шага алгоритма)
 - Добавить в изначально пустое множество $P_{l,2}$ векторы $p_i \& \bar{v}_t, p_j \& \bar{v}_t$,
 - Добавить в изначально пустое множество $P_{l,3}$ вектор v_t ,
- 3) Повторить шаги 1-2 для множества $P_{l,2}$ до тех пор, пока $N_V(v_t) > 0$,
- 4) Повторить шаги 1-2 для множества $P_{l,3}$ до тех пор, пока $N_V(v_t) > 0$.

Описанный процесс легко представить в виде бинарного дерева. Оно строится по следующим правилам:

- 1) Корень дерева — исходное множество векторов p_1, \dots, p_m ,
- 2) Левый потомок данного узла — множество $P_{l,2}$,
- 3) Правый потомок данного узла — множество $P_{l,3}$,
- 4) Узел не имеет потомков, если содержит только один вектор или $N_V(v_t) = 0 \forall t = 1, \dots, n/2$.

Далее для синтеза логической схемы строится дешифратор, после чего для корня дерева вызывается рекурсивная процедура, описанная в алгоритме 2.1. Более подробное описание алгоритма можно найти в статье [1].

Теорема 1. *Обозначим $H = \min \{2m - 1, 2^{n-1}\}$. Тогда данный алгоритм имеет сложность $O(m^2 2^{H+n-1})$.*

Algorithm 2.1 Синтез схемы по бинарному дереву

```
1: procedure SYNTHESIZE(node)
2:   Для каждого вектора  $p_i, i = 1, \dots, n$ 
3:   if  $left = 0$  и  $right = 0$  then ▷ Данный узел — лист
4:     Синтезировать логическую схему  $LC_i$  для  $p_i$ 
5:   else
6:     SYNTHESIZE(right)
7:     SYNTHESIZE(left)
8:     Синтезировать схему  $LC_i = LC_{left_i} \vee LC_{right_{i/2}}$ 
9:   end if
10: end procedure
```

Теорема 2. *Схема, полученная в результате работы алгоритма 2.1, примененного к результату алгоритма построения бинарного дерева, реализует все t требуемых функций.*

Следствие 1. *Для любого фиксированного $n \geq 2$ для каждого S-блока $n \times n$ бит бинарные деревья, получаемые в результате работы алгоритма построения бинарного дерева, изоморфны.*

Следствие 2. *Для каждого S-блока $n \times n$ бит алгоритм построения бинарного дерева работает со сложностью $O(n^2 2^{3n-2})$.*

3. Практические результаты

Для сравнения результатов была написана программа на языке C++. На вход подается сама подстановка (записанная в файл) и метод, которым надо сгенерировать схему. На выходе получается файл со схемой на языке Verilog. Поддерживаются следующие шесть методов синтеза: наивный, улучшенный наивный, Шеннона, Лупанова, на основе минимальной ДНФ и авторский. Подробнее о методах см. в [1, 2].

S-блок	Шифр	Размер
S_1	Шифр Кузнечик	8×8 бит
S_2	Шифр AES	8×8 бит
S_3	Шифр ZUC (первый S-блок)	8×8 бит
S_6	Шифр KASUMI (первый S-блок)	7×7 бит
S_7	Шифр KASUMI (второй S-блок)	9×9 бит

Для того, чтобы понять, насколько эффективен приведенный выше метод, были сгенерированы схемы для некоторых S-блоков, использующихся в криптографических алгоритмах (см. таблицу выше). Также данные S-блоки были синтезированы на программе Logic Friday (LF) [3].

Таблица 1. Сложность реализации S-блоков

S-блок	Наив.(ул.)	Шеннон	Лупанов	мДНФ	LF	Авт.
S_1	1319(1068)	680	677	973	823	838
S_2	1319(1068)	680	677	973	780	838
S_3	1319(1068)	680	677	960	800	838
S_6	604(512)	372	353	463	461	416
S_7	2878(2371)	1359	1340	1846	–	1750

В дополнение к результатам статьи [1] в докладе скорректирована оценка сложности алгоритма построения дерева и показано, что авторский метод является развитием идеи улучшенного наивного.

Список литературы

- [1] Курганов Е.А., “Об аппаратной реализации сбалансированных S-блоков”, *Программная инженерия*, **12**:1 (2020), 8–20.
- [2] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, «Наука», Москва, 1986, 384 pp.
- [3] *Logic Friday*, Программа в сети Интернет [Электронный ресурс], Режим доступа: <https://download.cnet.com/developer/logic-friday/i-10268041>

An algorithm for minimizing the complexity of hardware implementation of balanced S-blocks

Kurganov E.A.

The paper considers the author’s algorithm, which allows obtain a hardware implementation of an arbitrary system of m Boolean functions from n variables and its application to balanced S-blocks. This is followed by a comparison of hardware implementations of S-blocks obtained in terms of complexity.

Keywords: S-box, hardware implementation, circuit complexity optimization, stream ciphers, block ciphers.

References

- [1] Kurganov E.A., “On Hardware Implementation of Balanced S-boxes”, *Programmная Ingeneria*, **12**:1 (2020), 8–20 (in Russian)
- [2] Jablonskii S.V., *Introduction to discrete mathematics*, «Nauka», Moscow, 1986 (in Russian), 384 pp.
- [3] *Logic Friday*, available at: <https://download.cnet.com/developer/logic-friday/i-10268041>

О проверяющих тестах относительно локальных перестановок входов схем

М. А. Лопунов¹

В работе установлен порядок роста функции Шеннона длины проверяющего теста относительно источника неисправностей, который может произвольным образом менять местами любые k подряд идущих входов схемы.

Ключевые слова: проверяющий тест, тесты на входах СФЭ, функция Шеннона, перестановки.

1. Введение

В данной работе исследуется поведение функции Шеннона длины проверяющего теста для неисправностей, происходящих на входах схем, а именно будет рассматриваться источник, который может произвольным образом менять местами подряд идущие входы схемы в рамках фиксированных границ. В работе [1] было доказано, что нижней оценкой для функции Шеннона длины проверяющего теста относительно единичных транспозиций переменных в булевой функции является величина $0,25n \log_2 n(1 + o(1))$. В работе [2] доказано, что верхней оценкой для данной функции Шеннона является величина $n \log_2 n(1 + o(1))$. Таким образом, было установлено, что данная функция Шеннона ведёт себя как $\Theta(n \log n)$.

2. Основные понятия и формулировка результата

Рассматриваются проверяющие тесты для входов схем из функциональных элементов (СФЭ) с одним выходом. Множество наборов T булева куба называется *проверяющим тестом* для СФЭ Σ относительно источника неисправностей U , если любая неисправная схема, полученная под действием этого источника из исходной схемы, может быть функционально отличима хотя бы на одном наборе из этого множества от исходной схемы. Множество T с минимальным числом наборов называется *минимальным тестом* для Σ относительно U . *Длиной теста для булевой функции f* будем называть наименьший по мощности минимальный

¹ Лопунов Михаил Александрович — студент каф. математической кибернетики факультета ВМК МГУ, e-mail: miklop07@gmail.com.

Lopunov Mikhail Alexandrovich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Mathematical Cybernetics.

тест среди всех СФЭ, реализующих f . *Функцией Шеннона длины проверяющего теста* называется функция $l^{detect}(n)$, равная максимуму длин проверяющих тестов для булевых функций по всем булевым функциям от n переменных.

В данной работе рассматривается источник неисправностей U_k , который может произвольным образом менять местами любые k подряд идущих входов схемы. Обозначим через $l_k^{detect}(n)$ функцию Шеннона длины проверяющего теста относительно источника неисправностей U_k . В результате доказаны верхняя и нижняя оценки для $l_k^{detect}(n)$, устанавливающие порядок роста.

Теорема 1. Пусть k, n – натуральные числа, $2 \leq k \leq n$, $n \rightarrow \infty$, $k = k(n)$. Тогда имеет место неравенства $\frac{1}{16}n \log_2 k \leq l_k^{detect}(n) \leq 6n \log_2 k$.

Доказательство. *Верхняя оценка.* Рассмотрим произвольную булеву функцию (БФ) $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2(n)$. Сначала докажем оценку для $2 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Рассмотрим $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{2k} \rfloor$ наборов переменных БФ f вида $(x_{ik+1}, \dots, x_{ik+2k})$, где $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{2k} \rfloor - 1\}$. Обозначим множество всех таких наборов через M . Если n не кратно k , добавим в M набор $\delta = (x_t, \dots, x_n)$, $t = (\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{2k} \rfloor)k + 1$. Далее, рассмотрим произвольный набор $x' \in M$ и множество $S_{x'}$ всевозможных перестановок переменных (x_1, \dots, x_n) , которые могут менять местами только переменные x' . Введём множество $W_{f,x'}$ всех БФ, получающихся из f путём перестановок из $S_{x'}$ входных переменных. Очевидно, что множество перестановок $S_{x'}$ индуцирует на E_2^n группу биекций относительно композиции. Используем результат, полученный в работе [2]. Тогда f можно отличить от любой БФ из $W_{f,x'}$, используя $\lceil \log_2 |S_{x'}| \rceil = \lceil \log_2 ((2k)!) \rceil \leq 2k \log_2(2k) \leq 4k \log_2 k$ наборов. Видно, что

$$|M| \leq \left\lfloor \frac{n}{2k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{2k} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2n+k}{2k} \leq \frac{3n}{2k}.$$

Поэтому, чтобы отличить f от любой БФ из объединения $W_{f,x'}$ по всем x' из M , используем не более $|M|4k \log_2 k \leq 6n \log_2 k$ наборов. Обозначим множество этих наборов через T .

Далее, рассмотрим произвольную БФ f_φ , которая получается из f под действием источника неисправностей U_k и отличается от f хотя бы на одном наборе. Из построения T видно, что $\exists \tilde{\beta} \in T$ такой, что $f(\tilde{\beta}) \neq f_\varphi(\tilde{\beta})$. Следовательно, T является тестом для f .

При $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n$ также воспользуемся результатом [2] для $k = n$. Очевидно, что с помощью такого теста T также можно отличить любые неисправности, связанные с U_k при $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n$. Тогда

$$|T| \leq \lceil n \log_2 n \rceil \leq n \log_2(2n) \leq n \log_2(4k+2) \leq 6n \log_2 k.$$

Таким образом, доказано, что $l_k^{detect}(n) \leq 6n \log_2 k$.

Нижняя оценка. Воспользуемся идеей, предложенной в работе [1]. Будем строить функцию для $k + \log_2 k \leq n$. Если $k + \log_2 k > n$, то для таких параметров k и n будем строить функцию как для параметров k' и n соответственно, где k' — такое наибольшее возможное целое число, что $2 \leq k'$ и $k' + \log_2 k' \leq n$. Тогда останется нерассмотренным случай $k = n = 2$, но в этом случае положим результатом построения БФ $f(x_1, x_2) = (0, 0, 1, 0)$ с тестом длины 1.

Построим характеристическое множество N_f БФ f . Пусть m — остаток от деления n на k . Также определим число δ' равное m , если $m \geq \lfloor \log_2 k \rfloor - 1$ и равное $k + m$ иначе. Построим множества $K_i \subseteq E_2^n$ для всех i из $I = \{1, 2, \dots, \lfloor \log_2 k \rfloor\}$. Опишем наборы $\tilde{\omega}$, из которых будет состоять множество K_i . У всех наборов $\tilde{\omega}$ координаты с номерами, большими $n - i + 1$, будут равны единице. Положим координаты с номерами $n - \delta' + 1, n - \delta' + 2, \dots, n - i + 1$ равными нулю. Среди первых $n - \delta'$ будет ровно одна единица, остальные координаты положим равными нулю. Эта единица может стоять на любых позициях с номерами $1 + a2^i, 2 + a2^i, \dots, 2^{i-1} + a2^i$, где a может быть любым целым неотрицательным числом, не превосходящим значение $\lfloor \frac{n-\delta'}{2^i} \rfloor - 1$. Таким образом, K_i состоит из всевозможных наборов $\tilde{\omega} \in E_2^n$, описанных выше, и только из них. Тогда положим N_f как объединение всех K_i по всем i из I . Пусть $T = N_f$.

Покажем, что T является тестом для f . Рассмотрим произвольную перестановку ζ переменных x_1, \dots, x_n такую, что $f_\zeta = f(\zeta(x_1, \dots, x_n)) \neq f$. Тогда $N_f \neq N_{f_\zeta}$, но $|N_f| = |N_{f_\zeta}|$. Значит, $\exists \hat{\sigma} \in N_f = T : f(\hat{\sigma}) \neq f_\zeta(\hat{\sigma})$.

Теперь докажем минимальность T . Зафиксируем произвольный набор $\tilde{\Delta} \in N_f$. Пусть i — число единиц среди последних δ' координат. По построению в $\tilde{\Delta}$ на первых $n - \delta'$ позициях ровно одна единица. Обозначим через q позицию с единицей. Обозначим через $\zeta_{\tilde{\Delta}} : E_2^n \rightarrow E_2^n$ транспозицию элементов $\tilde{\Delta}$ на позициях q и $q + 2^i$. Очевидно, что f и $f_{\zeta_{\tilde{\Delta}}}$ отличимы на двух наборах: $\tilde{\Delta}$ и $\zeta_{\tilde{\Delta}}(\tilde{\Delta})$. Заметим, что $\{\tilde{\Delta}, \zeta_{\tilde{\Delta}}(\tilde{\Delta})\} \cap \{\tilde{\Delta}', \zeta_{\tilde{\Delta}'}(\tilde{\Delta}')\} = \emptyset$ для любого $\tilde{\Delta}' \in N_f : \tilde{\Delta}' \neq \tilde{\Delta}$. Тогда f можно отличить от $f_{\zeta_{\tilde{\Delta}'}}$ только на $\tilde{\Delta}$ и $\zeta_{\tilde{\Delta}}(\tilde{\Delta})$, но $\tilde{\Delta}$ уже есть в T .

Оценим длину T . Сначала проведём оценку для $n = 2^r + r - 1, r \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\log_2 n = \log_2(2^r + r - 1) = r + \log_2\left(1 + \frac{r-1}{2^r}\right) < r + 1$. Тогда $r - 1 > \log_2 n - 2$. Всего множеств K_i ровно $\lfloor \log_2 k \rfloor$. Каждое из них имеет мощность, равную 2^{r-1} . Тогда $|T| = 2^{r-1} \lfloor \log_2 k \rfloor > \frac{n}{4} \lfloor \log_2 k \rfloor$.

Теперь пусть $2^r + r - 1 < n < 2^{r+1} + r, r \in \mathbb{N}$. Последнее по номеру из K_i будет иметь как минимум 2^{r-1} наборов. Также заметим, что $\log_2 n < \log_2(2^{r+1} + r) \leq r + 2$. Тогда получаем, что $r - 1 > \log_2 n - 3$. Отсюда следует, что $|T| \geq 2^{r-1} \lfloor \log_2 k \rfloor > \frac{n}{8} \lfloor \log_2 k \rfloor$.

При $k \neq 2$ и $k \neq 3$

$$|T| \geq \frac{n}{8} \lceil \log_2 k \rceil \geq \frac{n}{8} (\log_2 k - 1) = \frac{n}{8} \log_2 \frac{k}{2} \geq \frac{n}{8} \log_2 \sqrt{k} = \frac{n}{16} \log_2 k.$$

При $k = 2$ и при $k = 3$ положим

$$|T| \geq \frac{n}{8}.$$

Список литературы

- [1] Глазунов Н.И., Горяшко А. П., “Об оценках длин обнаруживающих тестов для классов неконстантных неисправностей входов комбинационных схем”, *Изв. АН СССР. Сер. «Техническая кибернетика»*, 1986, № 3, 197–200.
- [2] Романов Д. С., “О тестах относительно перестановок переменных в булевых функциях”, *Прикладная математика и информатика*, 2012, № 41, М.: МАКС Пресс, 113–121.

On checking tests with respect to local permutations of circuit inputs

Lopunov M. A.

The paper establishes the order of growth of the Shannon function of the length of the checking test relative to the source of faults, which can arbitrarily swap any k of consecutive inputs of the circuit.

Key words: checking test, tests on circuit inputs, Shannon function, permutations.

References

- [1] Glazunov N.I., Goryashko A. P., “Estimates of the lengths of detecting tests for classes of non-constant faults in the inputs of combinational circuits”, *Izv. AN SSSR. Ser. «Technicheskaya kibernetika»*, 1986, № 3, 197–200 (In Russian).
- [2] Romanov, D.S., “Tests with respect to permutations of variables in Boolean functions”, *Computational Mathematics and Modeling*, **24** (2013), 558–565.

Улучшение верхней оценки функции Шеннона длины единичных диагностических тестов относительно инверсных неисправностей

И. Г. Любич¹

Доказано, что в произвольном полном базисе любую булеву функцию можно реализовать избыточной схемой из функциональных элементов, допускающей диагностический тест длины не более 3 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, единичный диагностический тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона, легкотестируемая схема.

1. Введение и основные результаты

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция, формально зависящая от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B , реализующая f . O^{inv} — источник инверсных неисправностей на выходах функциональных элементов, действующий на S , т.е. на выходе любого функционального элемента схемы вместо реализуемой на его выходе функции от его входов может реализовываться отрицание этой функции. Будем использовать обозначения и определения в соответствии со статьей [1].

Обзор оценок функций Шеннона длины теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в СФЭ можно увидеть в работе "О k -диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов".

В данной публикации будет приведен метод улучшения оценки [1]: $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 3$.

Теорема 1. При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \& y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 3$.

Доказательство. Из статьи [2] как следствие параграфа 3 (по принципу двойственности к базису $B' = \{x \vee y, \bar{x}\}$) следует, что любую функцию f можно реализовать в базисе B схемой, для которой набор $\tilde{\sigma}_1 = (1, \dots, 1)$ является единичным проверяющим тестом.

¹Любич Илья Геннадиевич — менеджер в отделе биостатистики в PAREXEL, e-mail: lubi4ig@gmail.com

Liubich Ilya Gennadievich — associate manager, biostatistics at PAREXEL

А это значит, что для этого базиса выполняются условия леммы 1 из [3], и в этом базисе любую функцию f можно реализовать схемой, допускающей единичный диагностический тест длины 3. Заметим, что этот набор состоит из набора $\tilde{\sigma}_1$, набора $\tilde{\alpha}_0$, на котором функция принимает значение 0 и набора $\tilde{\alpha}_1$, на котором функция принимает значение 1 (если функция устроена так, что принимает постоянное значение на всех наборах кроме, быть может, $\tilde{\sigma}_1$, то диагностический тест будет иметь длину 2).

Заметим, что все возможные функции неисправности, которые могут получиться имеют вид

$$(b_1 f \oplus b_0 \bar{f} \oplus I_{T'}) (\tilde{x}^n), \quad (1)$$

в котором $b_1, b_0 \in 0, 1$ и $T' \in \{\emptyset, \tilde{\sigma}_1\}$, где $I_{T'}(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборах из множества T_1 и значение 0 на остальных наборах.

□

Теорема 2. *При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию $x \& y$, имеет место неравенство $L_B^{\text{diagn}}(O_1^{\text{inv}}, n) \leq 4$.*

Доказательство. Дальнейшие построения будем связывать с возможными расширениями заданного базиса B . Расширением базиса B будем считать всякий базис B' , любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из B , либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из B . Каждому элементу из B' , которого нет в B , можно поставить в соответствие эквивалентную схему над B (склеивая в B некоторые входы). Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать ее для произвольного расширения базиса B .

Пусть B' максимальное расширение исходного базиса. Если в нем есть отрицание, строим схему как в теореме 1. Далее будем считать, что в расширении нет элемента отрицания.

Базис B в силу своей полноты содержит функцию, не сохраняющую 0 и функцию, не сохраняющую 1. Так как в расширении нет отрицания, то есть обе константы 0 и 1. Обозначим через E^i элементы, реализующие константы.

Пусть E^* — элемент из B' , реализующий немонотонную булеву функцию. Среди входов элемента выделим главный вход i — такой вход, для которого существуют 2 набора $(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$, отличные только значением на этом входе, на котором при подаче на главный вход переменной x , на выходе будет реализована функция \bar{x} . Из всех возможных таких пар, выберем ту, в которой количество нулей среди множества

$\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\}$ минимально. Назовем такие входы нулевыми, а остальные — единичными. Из такого построения следует, что при подаче на любой нулевой вход константы 1, на выходе будет реализована функция, отличная от \bar{x} — константы 0, 1, или тождественная функция x .

Возьмем схему, построенную в теореме 1, и заменим все элементы отрицания на указанный выше элемент E^* , на нулевые входы которого поданы выход элемента E^0 , а на единичные — выход элемента E^1 . Если при этом последний элемент такой схемы не E^* , добавим в конец два подряд идущих элемента E^* . Выход полученной схемы подадим на левый вход конъюнктора, на правый вход которого подается еще один выход элемента E^1 .

При правильной работе схемы реализуется функция f . При поломке любого элемента конъюнкции или E^* , получившиеся функции неисправности будут иметь вид (1). Осталось рассмотреть, что будет при поломке элементов E^0 и E^1 .

Если сломается элемент E^1 , то на правый вход последнего элемента схемы придет значение 0 и на выходе этого элемента тоже будет реализована константа 0.

Если сломается элемент E^0 , то все элементы E^* сломаются в функции 0, 1 или тождественные функции.

Если E^* сломаются в константы 0 или 1, то так как на левый вход последней конъюнкции подается выход элемента E^* , то и на выходе всей схемы будет константа 0 или константа 1.

Если E^* сломаются в тождественные функции, то в схеме исчезнут все отрицания и, так как функция существенно зависит от всех переменных, на выходе будет реализована функция $x_1 \& \dots \& x_n$.

Полученные функции неисправности не увеличивают множества возможных неисправностей, полученных в теореме 1, а значит 3 наборов по прежнему хватает, чтобы диагностировать любую неисправность. \square

В силу принципа двойственности, также верны утверждения:

Теорема 3. При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе $B = \{x \vee y, \bar{x}\}$ имеет место неравенство $L_B^{\text{diagn}}(O_1^{\text{inv}}, n) \leq 3$.

Теорема 4. При всяком $n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в произвольном базисе, содержащем функцию $x \vee y$, имеет место неравенство $L_B^{\text{diagn}}(O_1^{\text{inv}}, n) \leq 3$.

Далее, доказательство утверждения $L_B^{\text{diagn}}(O_1^{\text{inv}}, n) \leq 3$ повторяет рассуждения из [1] заменой верхней оценки длины теста с 4 на 3.

Список литературы

- [1] Любич И. Г., Романов Д. С., “О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над произвольными базисами”, *Дискрет. матем.*, **33**:1 (2021), 20–30.
- [2] Редькин Н. П., “Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 217–230.
- [3] Попков К. А., “Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, № 81, 29 с.

Improving the Shannon function upper estimate of the length of single diagnostic tests sets for inverse faults of gates

Liubich I.G.

It is proved that, in any complete basis, any Boolean function can be realized by an irredundant circuit that admits a diagnostic test of length no more than 3 in case of inverse faults at the outputs of gates.

Keywords: Boolean circuit, single fault diagnostic test set, inverse fault at output of gate, Shannon function, easily testable circuit.

References

- [1] Liubich I. G., Romanov D. S., “Single fault diagnostic test sets for inverse faults of gates in circuits over arbitrary bases (In Russian)”, *Diskretnaya matematika*, **33**:1 (2021), 20–30.
- [2] Redkin N. P., “Single fault detection tests for circuits in case of inverse faults of elements (In Russian)”, *Matematicheskie voprosi kibernetiki*, **12**, Fizmatlit, Moscow, 2003, 217–230.
- [3] Popkov K. A., “A method for constructing easily diagnosed circuits from functional elements with respect to single faults (In Russian)”, *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2019, № 81, 29 с.

О k -диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов

И. Г. Любич¹, Д. С. Романов²

Доказано, что любую булеву функцию можно реализовать k -неизбыточной схемой из функциональных элементов в некотором конечном полном базисе, допускающей k -диагностический тест длины не более 2 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона.

УДК 519.718.7

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621, а также проекта «Математические модели глобального информационно-энергетического баланса на основе циклов управления природно-антропогенными системами (на примере системы “загрязнение среды — здоровье населения”)» (код FSZZ-2020-0002).

1. Введение и основные результаты

Пусть S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B , реализующая произвольную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, формально зависящую от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть на схему S действует источник неисправностей O^{inv} , вызывающий инверсные неисправности на выходах функциональных элементов, т.е. на выходе любого функционального элемента схемы вместо реализуемой на его выходе функции от его входов может реализовываться отрицание этой функции. Будем использовать обозначения и определения в соответствии со статьей [1]. Если на схему действует источник неисправностей, вызывающий инверсную неисправность на выходе не более чем k функциональных элементов, назовем его O_k^{inv} . Обозначим через $W(S)$ множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована схемой S после поломки элементов, вызванной воздействием на схему

¹Любич Илья Геннадиевич — менеджер в отделе биостатистики в PAREXEL, e-mail: lubi4ig@gmail.com

Liubich Ilya Gennadievich — associate manager, biostatistics at PAREXEL

²Романов Дмитрий Сергеевич — доц. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru

Romanov Dmitrii Sergeevich — associate professor of CMC Faculty, Lomonosov MSU

источником неисправностей O_k^{inv} . Схема S называется k -неизбыточной тогда и только тогда, когда для любой функции $g(\tilde{x}^n) \in W(S)$ справедливо соотношение $f(\tilde{x}^n) \neq g(\tilde{x}^n)$. Назовём проверяющий (диагностический) тест k -проверяющим (k -диагностическим), если в схеме могут быть неисправны не более k элементов. Аналогично [1] определяются функции Шеннона длины k -проверяющего теста $L^{detect}(O_k^{inv}, n)$ и k -диагностического теста $L^{diagn}(O_k^{inv}, n)$. Пусть $B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$, $B' = \{x \& y \& z, x \oplus y, 1\}$, $B_1^\infty = \{x \oplus y, 1\} \cup \bigcup_{i \geq 2} \{x_1 x_2 \dots x_i\}$. Приведем обзор оценок функций Шеннона длины теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в СФЭ (оценки справедливы при всех $n \in \mathbb{N}$). С. В. Коваценок [2] доказано, что $L_{B_1}^{detect}(O_1^{inv}, n) = 1$, $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq n + 1$, $L_{B_1}^{diagn}(O^{inv}, n) \leq 2^{n-2}$. Н. П. Редькиным [3] для произвольного полного конечного базиса B установлено: $L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) \leq 3$. Д. С. Романовым (в [7] – в соавторстве в Е. Ю. Романовой) доказано: существует конечный полный базис \hat{B} , в котором $L_{\hat{B}}^{detect}(O^{inv}, n) \leq 4$ [4], $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$ [5], $L_{B_0}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 2$ [6], в [7] доказано, что для любой булевой функции существует избыточная схема в базисе B_1^∞ , допускающая полный диагностический тест длины 1 относительно O^{inv} . К. А. Попковым [8] доказано, что для любой булевой функции существует избыточная схема в базисе B' , допускающая полный диагностический тест длины 2 относительно O^{inv} . В [9] К. А. Попков установил, что $L_{B_1}^{diagn}(IO_1^{inv}, n) \leq 3$. В предыдущей работе авторов [1] было доказано, что в произвольном полном базисе B имеет место неравенство $L_B^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq 4$.

Выберем произвольный полный базис B и число $k \in \mathbb{N}$. Определим базис $B'_k = B \cup \{\varphi(y_1, \dots, y_{k+4}), \psi(y_1, \dots, y_{2k+3})\}$, где $\varphi(y_1, \dots, y_{k+4}) = y_1 \oplus ((y_1 \vee y_4 \vee \dots \vee y_{k+4})(\bar{y}_1 \vee \bar{y}_4 \vee \dots \vee \bar{y}_{k+4}) \vee (y_2 \oplus y_3))$, $\psi(y_1, \dots, y_{2k+3}) = y_1(\bar{y}_{2k+3} \vee \dots \vee \bar{y}_{2k+3}) \oplus H(y_2, \dots, y_{2k+2})$, а $H(z_1, \dots, z_{2k+1})$ – функция голосования, т.е. дизъюнкция всех монотонных конъюнкций ранга $k + 1$ от $2k + 1$ переменных. Заметим, что $\varphi(x_1, a, a, x_1, \dots, x_1) = x_1$, а если на любое количество входов элемента φ с четвертого по последний подать \bar{x}_1 и/или если на второй и третий вход подать разные значения, то на выходе будет \bar{x}_1 . Аналогично $\psi(x_1, a, \dots, a, x_1, \dots, x_1) = a$ (a подается на входы со второго по $2k + 2$), и если на любое количество входов элемента ψ с $2k + 3$ по последний подать \bar{x}_1 , то на выходе будет $a \oplus x_1$.

Теорема 1. *При всяких $k, n \in \mathbb{N}$ для СФЭ в базисе B'_k имеет место неравенство $L_{B'_k}^{diagn}(O_k^{inv}, n) \leq 2$.*

Доказательство. Если f – тождественная функция, то она может быть реализована без элементов и диагностический тест будет иметь длину 0. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – не тождественная функция. Реализуем функцию f

произвольной схемой в базисе B $2k+1$ раз: $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$. Пусть в каждой такой схеме l элементов. Пронумеруем все элементы каждой схемы одинаково по неубыванию глубины и обозначим через $\sigma_{i,j}$ i -ый элемент j -ой схемы. Построим $2kl$ слоев с $k+1$ элементами φ в каждом слое. В первом слое каждому элементу на все входы, начиная с 4-го, подадим x_1 . В слое $j + 2k(i - 1)$ на 1-й вход каждого элемента φ подадим x_1 , на 2-й и 3-й входы – выходы элементов $\sigma_{i,j}$ и $\sigma_{i,j+1}$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, 2k}$. На остальные $k + 1$ входов каждого элемента φ не первого слоя подадим выходы всех элементов предыдущего слоя. Добавим выходной элемент ψ , на первый вход которого подан x_1 , на входы со второго по $2k + 2$ – выходы схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$, а на входы с $2k + 3$ по $3k + 3$ – выходы всех элементов φ последнего слоя. При отсутствии неисправностей на выходе элемента ψ построенная схема S_f реализует функцию f . Выясним, какие функции могут реализовываться при не более чем k инверсных неисправностях на выходах элементов S_f . Очевидно, что хотя бы $k + 1$ из схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2k+1}$ не будут содержать поломок и реализуют на выходе функцию f . Пусть сломалось какое-то количество k_1 элементов $\sigma_{i,j_1}, \dots, \sigma_{i,j_{k_1}}$ при минимально возможном i ($1 \leq k_1 \leq k$). Тогда существуют два элемента $\sigma_{i,m}$, $\sigma_{i,m+1}$ (выберем m минимально возможным) с разными значениями на выходах на любом входном наборе, так что в слое $m + 2k(i - 1)$ на все элементы φ на 2-й и 3-й входы будут поданы разные значения и на выходе каждого элемента должна реализовываться функция \bar{x}_1 . Заметим, что при поломке элемента φ , на входы которого были поданы неисправные значения (\bar{x}_1 на любой из входов, начиная с четвертого, или различные значения на второй и третий вход), на выходе будет функция x_1 , но так как неисправностей может быть не больше чем k , все элементы φ одного слоя не могут сломаться одновременно, и у хотя бы одного элемента φ из этого слоя на выходе будет реализована функция \bar{x}_1 , а это – сигнал об обнаружении неисправности. Информация об обнаружении неисправности будет надежно передаваться, начиная с некоторого слоя элементов φ , от слоя к слою. При поломке любого элемента, кроме ψ , на вход элемента ψ на входы со второго по $2k + 2$ придет не менее $k + 1$ значения f , а на входы с $2k + 3$ по $3k + 3$ как минимум один \bar{x}_1 , и на выходе S_f будет реализована функция $f \oplus x_1$. В случае поломки элемента ψ на выходе S_f будет реализована функция $f \oplus x_1$ или \bar{f} , если это единственная поломка во всей схеме. Итого, всего, кроме f , есть три возможные функции неисправности: $f \oplus x_1$, $\bar{f} \oplus x_1$, \bar{f} . Любое множество из 2 наборов, один из которых имеет 0, а второй 1 в своей первой компоненте, является k -диагностическим тестом. Теорема доказана. \square

Список литературы

- [1] Любич И. Г., Романов Д. С., “О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над произвольными базисами”, *Дискрет. матем.*, **33**:1 (2021), 20–30.
- [2] Коваценок С. В., “Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2000, № 2, 45–47.
- [3] Редькин Н. П., “Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **12**, Физматлит, Москва, 2003, 217–230.
- [4] Романов Д. С., “О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов”, *Вестн. Моск. ун-та. Серия 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2015, № 1, 30–37.
- [5] Романов Д. С., “Метод синтеза избыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2015, № 4, 8–54.
- [6] Романов Д. С., “Метод синтеза избыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2016, № 3, 56–72.
- [7] Романов Д. С., Романова Е. Ю., “Короткий диагностический тест для одного класса схем”, *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия: Технические науки. Информатика, вычислительная техника и управление*, 2017, № 04(38), 91–93.
- [8] Попков К. А., “Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2017, № 105, 10 с.
- [9] Попков К. А., “Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, № 81, 29 с.

Multiple fault k -diagnostic test sets for inverse faults of gates Liubich I.G., Romanov D.S.

It is proved that any Boolean function can be realized by a k -irredundant Boolean circuit over an special finite complete basis such that the circuit admits a multiple fault k -diagnostic test set of cardinality at most 2 under inverse faults at outputs of gates.

Keywords: Boolean circuit, test set, inverse fault at output of gate, Shannon function.

References

- [1] Liubich I. G., Romanov D. S., “Single fault diagnostic test sets for inverse faults of gates in circuits over arbitrary bases (In Russian)”, *Diskretnaya matematika*, **33**:1 (2021), 20–30.
- [2] Kovatsenko S. V., “Synthesis of easily testable circuits in the Zhegalkin basis for inverse faults (In Russian)”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*, 2000, № 2, 45–47.
- [3] Redkin N. P., “Single fault detection tests for circuits in case of inverse faults of elements (In Russian)”, *Matematicheskie voprosi kibernetiki*, **12**, Fizmatlit, Moscow, 2003, 217–230.
- [4] Romanov D. S., “On the synthesis of circuits that admit complete detection tests of constant length with respect to inverse faults at the outputs of elements (In Russian)”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*, 2015, № 1, 30–37.
- [5] Romanov D. S., “Method for the synthesis of non-redundant circuits in the Zhegalkin basis that admit single diagnostic tests of length one (In Russian)”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskkiye nauki*, 2015, № 4, 8–54.
- [6] Romanov D. S., “Method for the synthesis of non-redundant circuits in a standard basis, allowing single diagnostic tests of length two (In Russian)”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskkiye nauki*, 2016, № 3, 56–72.
- [7] Romanov D. S., Romanova E. U., “Short diagnostic test for one class of circuits (In Russian)”, *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Seriya: Tekhnicheskkiye nauki. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravleniye*, 2017, № 04(38), 91–93.
- [8] Popkov K. A., “Complete diagnostic tests of length two for circuits in case of inverse faults of functional elements (In Russian)”, *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2017, № 105, 10 c.
- [9] Popkov K. A., “A method for constructing easily diagnosed circuits from functional elements with respect to single faults (In Russian)”, *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2019, № 81, 29 c.

Метод сопоставления компонентов двух объектов на основе обучения метрики и универсального описания предметной области

А. И. Майсурадзе¹

В задачах ИИ приходится работать не только с признаковыми, но и метрическими описаниями объектов. Это требует методов построения, преобразования, коррекции и использования метрических описаний. В работе проводится систематизация такого комплекса задач.

Рассматривается новый подход к задаче сопоставления компонентов объектов. Во-первых, мы используем «универсальный граф» для обогащения индивидуальной задачи информацией о предметной области. Это сводит задачу сопоставления компонентов к задаче сопоставления графов. Во-вторых, мы предлагаем быстрый метод сопоставления графов на основе обучения метрики. Эксперименты показывают высокое качество результатов по сравнению с традиционными методами.

Ключевые слова: метрическое описание объектов, представление на основе компонентов, сопоставление компонентов, сопоставление графов, графовая сверточная сеть, обучение расстояния.

1. Введение

В работах по машинному обучению (МО) ведущую роль играют индивидуальные описания объектов. В то же время есть модели и подходы, которые работают с парами объектов. В данном докладе основное внимание уделяется расстоянию между парой объектов, которое мы понимаем как числовую характеристику этой пары с той интерпретацией, что объект до самого себя имеет нулевое расстояние, все остальные расстояния неотрицательны, чем больше расстояние, тем меньше общих свойств мы ожидаем между объектами. Формальные требования к функции расстояния могут различаться от приложения к приложению. В математике распространен термин метрика, соответственно, модели и методы, использующие расстояния, часто называют метрическими.

¹ *Майсурадзе Арчил Ивериевич* — доцент каф. математических методов прогнозирования ф-та ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова, e-mail: maysuradze@cs.msu.ru.

Maysuradze Archil Iverievich — Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Mathematical Methods of Forecasting.

В МО многие метрические методы уже стали классическими, например метод ближайших соседей, но они изучаются только для ситуаций с одной метрикой. При этом в задачах ИИ всё чаще для одних и тех же объектов одновременно используются разные способы измерения сходства. Когда на объектах задано несколько расстояний, в практике МО говорят, что задано метрическое описание.

Для традиционных признаков описаний объектов эволюционно сложились классы задач («инструменты»). По аналогии, в нашей научной группе идет работа над развитием инструментов для метрических описаний. Развиваются как сами методы распознавания [1], так и приемы получения и преобразования метрической информации [2, 3]. При этом реализация опирается на специальные представления [4]. В докладе будут систематизированы инструменты построения, преобразования, коррекции, анализа метрических описаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00664-а) и госбюджетной темы НИР № 5.1.21 МГУ имени М. В. Ломоносова.

2. Обучение метрики для сопоставления компонентов

Как новый результат будет продемонстрировано эффективное решение задачи сопоставления компонентов на основе обучения метрики [5]. В современных задачах ИИ возникают ситуации, когда объекты распознавания воспринимаются как множество компонентов. При этом надо найти соответствия между компонентами разных объектов (part matching). Для обучающего набора пар объектов указано бинарное отношение на их компонентах. Возможны соответствия «один ко многим» или «многие ко многим».

Если дополнительно между компонентами одного объекта есть связи, то естественным формализмом становятся графы. Задача поиска соответствия между вершинами графов называется задачей сопоставления графов (graph matching). В МО такую задачу не ставят как точную задачу об изоморфизме, а рассматривают различные варианты [6]. Традиционные методы сопоставления графов имеют высокую вычислительную сложность, что вынуждает разрабатывать быстрые приближенные процедуры. Дополнительно надо приспособить такие процедуры под распространенные сегодня технологии работы с графами вычислений.

В работе сделано два основных предложения:

1. универсальный граф компонентов как новый способ представления информации о предметной области, что превращает задачу сопоставления компонентов в задачу сопоставления графов;

2. новая модель сопоставления графов, основанная на обучении метрики на вершинах графов, способ ее обучения.

Модель сопоставления графов объектов имеет следующую схему:

1. получение первичного представления компонентов без использования информации о графе;

2. получение вторичного представления компонентов на основе информации о графе;

3. вычисление сходства вторичных представлений.

Наша схема сопоставляет вершины исключительно на основе сходства вторичных представлений. Мы вообще избегаем квадратичной задачи о назначениях, что позволяет достичь вычислительной эффективности.

Экспериментально продемонстрировано, что такая модель даёт лучшие результаты, чем традиционные модели сопоставления графов, и обладает высокой устойчивостью к вариативности в данных.

Список литературы

- [1] Kozlov V.D., Maisuradze A.I., “Metric Learning in Graph Matching Problems”, *Computational Mathematics and Modeling*, **31**:4 (2020), 477–483.
- [2] Maysuradze A.I., Suvorov M.A., “Aggregation of multiple metric descriptions from distances between unlabeled objects”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:2 (2017), 350–361.
- [3] Kozlov V.D., Maysuradze A.I., “Separation of a Mixture of Three-Parameter Lognormal Distributions in the Analysis of Communication Environments”, *Computational Mathematics and Modeling*, **30**:3 (2019), 311–319.
- [4] Maysuradze A.I., “Homogeneous and rank bases in spaces of metric configurations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:2 (2006), 330–344.
- [5] Kozlov V.D., Maysuradze A.I., “A novel approach for part based object matching using distance metric learning with graph convolutional networks”, *The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, **44** (2021), 149–154.
- [6] Conte D., Foggia P., Sansone C., Vento M., “Thirty years of graph matching in pattern recognition”, *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, **18**:03 (2004), 265–298.

A Method for Part Matching of Two Objects Based on Metric Learning and Universal Domain Description
Maysuradze A.I.

In AI applications, one has to work not only with features, but also metric descriptions of objects. This requires the development of a special set of methods for constructing, converting, correcting and using metric descriptions. We provide a systematization of the methods.

In particular, a new approach to the problem of part matching is considered. First, we propose to use the 'universal graph' as a way to enrich an individual matching problem with general information about the domain. This reduces the part matching problem to the graph matching problem. Second, we propose a fast graph matching method based on metric learning. At the same time, we generally avoid the quadratic assignment problem, which allows us to achieve high computational efficiency. Experiments demonstrate good performance compared to conventional methods.

Keywords: metric descriptions of objects, composite objects, part matching, graph matching, graph convolutional networks, distance metric learning.

References

- [1] Kozlov V.D., Maisuradze A.I., "Metric Learning in Graph Matching Problems", *Computational Mathematics and Modeling*, **31**:4 (2020), 477–483.
- [2] Maysuradze A.I., Suvorov M.A., "Aggregation of multiple metric descriptions from distances between unlabeled objects", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:2 (2017), 350–361.
- [3] Kozlov V.D., Maysuradze A.I., "Separation of a Mixture of Three-Parameter Lognormal Distributions in the Analysis of Communication Environments", *Computational Mathematics and Modeling*, **30**:3 (2019), 311–319.
- [4] Maysuradze A.I., "Homogeneous and rank bases in spaces of metric configurations", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:2 (2006), 330–344.
- [5] Kozlov V.D., Maysuradze A.I., "A novel approach for part based object matching using distance metric learning with graph convolutional networks", *The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, **44** (2021), 149–154.
- [6] Conte D., Foggia P., Sansone C., Vento M., "Thirty years of graph matching in pattern recognition", *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, **18**:03 (2004), 265–298.

Программная реализация алгоритмов работы с примитивными элементами в свободных неассоциативных алгебрах

М. В. Майсурадзе¹

Реализованы алгоритмы работы с примитивными элементами в свободных неассоциативных алгебрах в системе компьютерной алгебры SageMath. В ряде случаев подсчитано количество примитивных элементов в свободных неассоциативных алгебрах над конечными полями.

Ключевые слова: свободная неассоциативная алгебра, примитивный элемент, компьютерная алгебра.

1. Примитивные элементы в свободных неассоциативных алгебрах

В своей работе я рассматриваю свободные неассоциативные алгебры над конечными полями. Такие алгебры относятся к шраерову многообразию алгебр. Что означает, что любая подалгебра таких алгебр является свободной [6].

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры A шраерова многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры A , содержащее подмножество M . Сами элементы такой системы называются примитивными элементами.

Критерий примитивности системы и отдельного элемента сформулирован в [2], [3, 12.5.1 Primitive elements in free non-associative algebras] в виде теоремы: Система a_1, a_2, \dots, a_r элементов свободной неассоциативной алгебры A примитивна тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \dots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. В частности, элемент $a \in A$ является примитивным тогда и только тогда, когда $\exists m_1, \dots, m_n \in U(A)$ такие, что $\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$.

Здесь F – поле, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество свободных образующих, $W_0 = \Gamma(X)$ – свободный группоид неассоциативных мономов без единичного элемента с алфавитом X . $A = F(X)$ – линейное пространство над полем F с базисом, состоящим из 1 и элементов $\Gamma(X)$ с

¹Майсурадзе Михаил Владимирович – аспирант каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ.

Maisuradze Mikhail Vladimirovich – graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

правилом умножения: $(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$, $\forall \alpha, \beta \in F$, $a, b \in \Gamma(X)$. $U(A)$ – свободная ассоциативная алгебра с множеством $S_0 = \{r_w, l_w | w \in W_0\}$ свободных образующих.

Дифференцирование определяется, как $\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)r_b + \mathcal{D}(b)l_a$, а частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$ – как элемент из $U(A)$ – коэффициентов при $\mathcal{D}(x_i)$ в производной элемента из A .

2. Алгоритм проверки примитивности элемента

Техника свободного дифференциального исчисления позволяет реализовать алгоритм определения примитивности элемента, заключающийся в последовательной редукции частных производных элемента до получения ненулевого элемента поля.

1. дифференцировать элемент и найти все частные производные;
2. обозначив частные производные u_i и выписав множество $M = \{u_i\}$, и обозначив старшие члены u_i как u_i^0 произвести последовательные редукции до получения $u_k = a \in F$, $a \neq 0$ либо до момента, когда дальнейшие редукции невозможны:

- 2.1. если старший член $u_k^0 = \alpha\omega u_l^0$, где $\alpha \in F$, ω – ассоциативный моном из $U(A)$, то считаем $u_k := u_k - \alpha\omega u_l$;

- 2.2. иначе – дальнейшие редукции невозможны, элемент не является примитивным.

3. Алгоритм поиска и подсчёта примитивных элементов заданной длины

Для выявления всех примитивных элементов определённой длины был разработан алгоритм:

1. записать элемент общего вида необходимой длины с неизвестными коэффициентами;

2. дифференцировать элемент и найти все его частные производные;

3. выписать все получившиеся в $U(A)$ мономы;

4. составить элементы в $U(A)$ содержащие все выписанные мономы с неизвестными коэффициентами;

5. составить уравнение, умножив эти элементы на найденные частные производные и приравняв 1;

6. полученное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все коэффициенты при мономах $U(A)$ кроме 1 равны 0, а свободный член равен 1, что приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений в F относительно неизвестных, введённых на шаге 4;

7. для совместности полученной системы уравнений применим критерий совместности системы – теорему Кронекера-Капелли: *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы равен рангу её расширенной матрицы.*

8. столбец свободных членов полученной системы уравнений содержит единственный ненулевой элемент, тогда получаем необходимые условия совместности системы:

8.1. все максимальные миноры матрицы системы, кроме строки, содержащей ненулевой свободный член, должны быть равны нулю;

8.2. должен существовать минор, содержащий строку с ненулевым свободным членом, отличный от нуля, порядка большего, чем все остальные миноры.

Над конечными полями, алгоритм также позволяет произвести оценку общего количества примитивных элементов. С помощью этого алгоритма была произведена оценка количества примитивных элементов произвольной длины в свободных неассоциативных алгебрах с двумя образующими над конечным полем. Отметим, что в работе [5] подсчитано число примитивных элементов длины 1, 2 и 3 в свободных неассоциативных алгебрах с двумя образующими над конечным полем.

4. Реализация алгоритмов

Применение описанных алгоритмов связано с высокой вычислительной сложностью, что приводит нас к необходимости выбора пакета компьютерной алгебры, позволяющего их реализовать. Современные пакеты компьютерной алгебры реализуют множество популярных математических структур, однако в их число входит далеко не всё необходимое для исследований узкоспециализированных алгебраических структур. В ходе анализа предоставляемых возможностей, наиболее удобным был признан SageMath.

Ключевые преимущества, повлиявшие на выбор SageMath:

1. наличие функциональности абстрактных категорий, позволяющей определять новые алгебраические структуры, реализуя только их ключевые особенности;

2. язык программирования Python, снижающий затраты на реализацию;

3. гибкая модель расширений;

4. поддержка “из коробки” более простых алгебраических структур – полей, колец, матриц, СЛАУ и др.;

5. поддержка стандартных алгоритмов линейной алгебры.

Несмотря на все преимущества SageMath, пришлось столкнуться с достаточно большим количеством необходимых для реализации структур.

Неассоциативные структуры:

1. свободный неассоциативный группоид;
2. элемент неассоциативного группоид (моном);
3. свободная неассоциативная алгебра;
4. элемент свободной неассоциативной алгебры.

Ассоциативные структуры универсальной обёртывающей алгебры:

1. свободный ассоциативный обёртывающий моноид с множеством свободных образующих – операторов левого и правого умножения на мономы свободного неассоциативного группоида;
2. элемент свободного ассоциативного обёртывающего моноида;
3. свободная ассоциативная обёртывающая алгебра;
4. элемент свободной ассоциативной обёртывающей алгебры.

Только после имплементации всех необходимых структур появилась возможность приступить собственно к реализации используемых в моих исследованиях алгоритмов. В рамках описанного выше подхода были реализованы методы дифференциальной алгебры:

1. дифференцирование свободных неассоциативных элементов;
2. тест примитивности свободных неассоциативных элементов.

5. Пример использования

```
> from FNAAlgebra import *
> F.<x,y,z> = FNAAlgebra(QQ, 3)
> h = 5/3*y*x+6/7*y*((y*y)*z)+50/21*(z*x)*x+60/49*(z*x)*((y*y)*z)
+60/49*(z*((y*y)*z)*x)+216/343*(z*((y*y)*z))*((y*y)*z)+6/7*z
```

$$\frac{6}{7}z + \frac{5}{3}yx + \frac{50}{21}(zx)x + \frac{6}{7}y((yy)z) + \frac{60}{49}(z((yy)z))x + \frac{60}{49}(zx)((yy)z) + \frac{216}{343}(z((yy)z))((yy)z)$$

```
> h.derivate()
```

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{5}{3}ly + \frac{60}{49}l_z((yy)z) + \frac{50}{21}l_{zx} + \frac{60}{49}r_{(yy)z}l_z + \frac{50}{21}r_xl_z \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{6}{7}r_{(yy)z} + \frac{5}{3}r_x + \frac{6}{7}lyr_zly + \frac{6}{7}lyr_zr_y + \frac{216}{343}l_z((yy)z)r_zly + \frac{216}{343}l_z((yy)z)r_zr_y + \\ &\frac{60}{49}l_zx r_zly + \frac{60}{49}l_zx r_zr_y + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zr_zly + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zr_zr_y + \frac{60}{49}r_xl_zr_zly + \frac{60}{49}r_xl_zr_zr_y \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7}lylyy + \frac{216}{343}l_z((yy)z)lyy + \frac{60}{49}l_zxlyy + \frac{216}{343}r_{(yy)z}r_{(yy)z} + \frac{60}{49}r_{(yy)z}r_x + \\ &\frac{60}{49}r_xr_{(yy)z} + \frac{50}{21}r_xr_x + \frac{216}{343}r_{(yy)z}l_zlyy + \frac{60}{49}r_xl_zlyy \end{aligned}$$

```
> h.isPrimitive()
```

```
True
```

6. Заключение

Полученные алгоритмы позволяют оперативно анализировать различные элементы высокой сложности и проверять гипотезы. Для дальнейших исследований планируется реализовать методы работы с множествами свободных образующих и ими порождаемыми морфизмами, а также алгоритмы конструктивного построения систем примитивных элементов с помощью автоморфизмов.

Список литературы

- [1] В. А. Артамонов, А. В. Климаков, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, “Примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:2 (2016), 3–35; *J. Math. Sci.*, **237**:2 (2019), 157–179.
- [2] Alexander A. Mikhalev and Ualbai Umirbaev and Jie-Tai Yu, “Automorphic orbits in free non-associative algebras”, *Journal of Algebra*, **243** (2001), 198–223.
- [3] Alexander A. Mikhalev, Vladimir Shpilrain, and Jie-Tai Yu, *Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2004, ISBN: 9780387217246, 327 с.
- [4] А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, К. Шампаньер, “Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:5 (2007), 171–192; *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 320–335.
- [5] А.А.Чеповский., *Примитивные элементы алгебр шрайеровых многообразий*, дис. . . . канд. физ.-мат. наук, Москва, 2011, 65 с.
- [6] А. Г. Курош, “Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр”, *Матем. сб.*, **20(62)**:2 (1947), 239–262.

Software implementation of algorithms for working with primitive elements in free non-associative algebras

Maisuradze M.V.

Algorithms for primitive elements are realised (in the system of computer algebra SageMath). In particular, we have calculated the number of primitive elements of free non-associative algebras over finite fields for some cases.

Keywords: free non-associative algebra, primitive element, computer algebra

References

- [1] V. A. Artamonov, A. V. Klimakov, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, “Primitive and almost primitive elements of Schreier varieties”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **21**:2 (2016), 3–35; *J. Math. Sci.*, **237**:2 (2019), 157–179.

- [2] Alexander A. Mikhalev and Ualbai Umirbaev and Jie-Tai Yu, “Automorphic orbits in free non-associative algebras”, *Journal of Algebra*, **243** (2001), 198–223.
- [3] Alexander A. Mikhalev, Vladimir Shpilrain, and Jie-Tai Yu, *Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2004, ISBN: 9780387217246,, 327 c.
- [4] A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, A. A. Chepovskii, K. Champagnier, “Primitive elements of free nonassociative algebras”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **13**:5 (2007), 171–192; *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 320–335 (In Russian).
- [5] A. A. Chepovskii., *Primitive elements of Schreier varieties. Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences.*, The Dissertation for Scientific Degree of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow, 2011 (In Russian), 65 c.
- [6] A. Kurosh, “Non-associative free algebras and free products of algebras”, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, **20(62)**:2 (1947), 239–262 (In Russian).

Интерполяционно упорядоченные алгебраические системы

А. В. Михалев¹, Е. Е. Ширшова²

Рассматриваются частично упорядоченные алгебраические системы: линейные пространства над частично упорядоченными телами, псевдоупорядоченные кольца и алгебры над частично упорядоченными полями.

Такое упорядочение колец и алгебр аналогично частичному упорядочению алгебр Ли, определенному ранее. Частичный порядок аддитивной группы кольца (алгебры) индуцирует данный порядок на неассоциативных кольцах (алгебрах) (кольцах (алгебрах) Ли, йордановых кольцах, например).

Доказываются вторая и третья теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных упорядоченных систем.

Ключевые слова: частично упорядоченные линейные пространства, кольца и алгебры, интерполяционная группа, порядковые гомоморфизмы.

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ – произвольное кольцо (не обязательно ассоциативное). Если $\langle R, +, \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой, то кольцо R принято называть *частично упорядоченным кольцом*, если выполняется условие: из $a \leq b$ и $0 < c$ следуют неравенства $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $a, b, c \in R$.

(1) Если $\langle R, +, \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой, то кольцо R называется *частично псевдоупорядоченным кольцом* (см. [1]), если выполняется условие: если $0 \leq a$ в $\langle R, +, \leq \rangle$, то $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для любого $b \in R$.

(2) Левое линейное пространство ${}_F V = \langle V, +, \{\alpha \mid \alpha \in F\}, \leq \rangle$ над частично упорядоченным телом F называется *частично упорядоченным*

¹Михалев Александр Васильевич — заведующий кафедрой, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, e-mail: aamikhalev@mail.ru

Mikhalev Aleksander Vasil'evich — M. is the chairmen of the department, professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics

²Ширшова Елена Евгеньевна — профессор кафедры алгебры, доцент, Московский педагогический государственный университет, институт математики и информатики, e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Shirshova Elena Evgen'evna — professor for the chair of algebra, associate professor, Moscow Pedagogical State University, Institute of Mathematics and Informatics.

линейным пространством (см. [2]), если $\langle V, +, \leq \rangle$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из $0 \leq v$ следует $0 \leq \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из тела F .

(3) Алгебра $A = \langle A, +, \{ \alpha \mid \alpha \in F \}, \cdot, \leq \rangle$ над частично упорядоченным полем F называется *частично псевдоупорядоченной алгеброй* (см. [3]), если выполняются условия: 1) $\langle A, +, \{ \alpha \mid \alpha \in F \}, \leq \rangle$ является частично упорядоченным линейным пространством над полем F ; 2) $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично псевдоупорядоченным кольцом.

Данное упорядочение алгебр согласуется с определением частично упорядоченной алгебры Ли, принадлежащим В.М. Копытову (см. [4]).

Речь пойдет о влиянии интерполяционной упорядоченности на структурную теорию перечисленных алгебраических систем.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть алгебраическая система A удовлетворяет одному из определений (1) – (3).

Обозначим символом A^+ множество всех положительных элементов системы A .

Образование f частично упорядоченной системы A в частично упорядоченную систему B называется *о-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом)*, если выполняются условия:

1) f является гомоморфизмом соответствующих алгебраических систем;

2) $f(A^+) \subseteq B^+$.

При этом, f называется *строгим о-гомоморфизмом*, если выполняется условие

4) $f(A^+) = B^+ \cap f(A)$.

Если для о-гомоморфизма f существует о-гомоморфизм f^{-1} , то f называется *о-изоморфизмом*.

Отметим, что если f – о-гомоморфизм алгебраических систем, являющийся изоморфизмом этих систем, то он не обязан быть о-изоморфизмом.

Например, пусть ${}_{\mathbb{R}}V = \langle \mathbb{R}^2, +, \{ a \mid a \in \mathbb{R} \} \rangle$ над \mathbb{R} . Рассмотрим частично упорядоченное пространство $V_1 = {}_{\mathbb{R}}V$, где $(a, b) \in V_1^+$, если $a = b = 0$ или $a > 0$ и $b \geq 0$, и частично упорядоченное пространство $V_2 = {}_{\mathbb{R}}V$, где $(a, b) \in V_2^+$, если $a = b = 0$ или $a > 0$ и $b > 0$. Тожественное отображение $f : V_2 \rightarrow V_1$ является изоморфизмом и о-гомоморфизмом. С другой стороны, пара $(2, 0) \in V_1^+$, но $(2, 0)f^{-1} \parallel (0, 0)$ в пространстве V_2 .

Теорема 1. Если $f : A \rightarrow B$ – строгий o -гомоморфизм частично упорядоченных алгебраических систем, то существует o -изоморфизм $\varphi : A/\ker f \rightarrow f(A)$, где $\varphi(r + \ker f) = f(r)$ для всех $r \in A$.

Идеал (подпространство) I частично упорядоченной системы A называется *выпуклым (направленным)*, если абелева группа $\langle I, +, \leq \rangle$ является выпуклой (направленной) подгруппой (см. [4]) группы $\langle A, +, \leq \rangle$.

Заметим, что для произвольных частично упорядоченных систем справедливы не все аналоги теорем об изоморфизмах для соответствующих систем.

Например, пусть A – ассоциативная алгебра строго верхнетреугольных матриц над линейно упорядоченным полем \mathbb{R} .

Будем обозначать матрицу $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a, b, c)$.

Рассмотрим в частично псевдоупорядоченной алгебре $B = A$ над полем \mathbb{R} , где $(a, b, c) \in B^+$, если $0 \leq a, 0 < b$, или $a = b = 0$ и $0 \leq c$, выпуклые идеалы

$$I = \{(a, 0, c)\}, \quad J = \{0, b, c\}, \quad K = I \cap J.$$

При этом, факторалгебра I/K над полем \mathbb{R} упорядочена тривиально, а B/J – линейно псевдоупорядоченная алгебра над полем \mathbb{R} .

Учитывая вышесказанное, для доказательства некоторых следствий из теоремы 1 (второй и третьей теорем об o -изоморфизмах) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично упорядоченных систем.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой* (см. [5]), если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает класс решеточно упорядоченных групп, сохраняя многие важные свойства этих групп.

Если абелева группа $\langle A, +, \leq \rangle$ частично упорядоченной системы A является интерполяционной группой, то A называется *интерполяционной упорядоченной системой*.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть A – интерполяционная упорядоченная система, I и J – выпуклые направленные идеалы в системе A , $I \subset J$. Тогда существует o -изоморфизм интерполяционной упорядоченной системы A/J на интерполяционную упорядоченную систему $A/I/J/I$.

Теорема 3. Пусть A – интерполяционная упорядоченная система, I и J – выпуклые направленные идеалы в кольце A . Тогда:

1) существует строгий σ -гомоморфизм интерполяционной упорядоченной системы $I(J)$ на интерполяционную упорядоченную систему $I + J/J(I + J/I)$ с ядром $I \cap J$;

2) интерполяционная упорядоченная система $I/I \cap J(J/I \cap J)$ σ -изоморфна интерполяционной упорядоченной системе $I + J/J(I + J/I)$.

Список литературы

- [1] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22:4** (2019), 147–166.
- [2] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II”, *Чебышевский сборник*, **22:1** (2021), 213–224.
- [3] Михалев А.В., Ширшова Е.Е., “Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных алгебр над направленными полями”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23:3** (2020), 213–230.
- [4] Копытов В.М., *Решеточно упорядоченные группы*, «Наука», Москва, 1984, 320 с.
- [5] Ширшова Е.Е., “О выпуклых направленных подгруппах псевдо решеточно упорядоченных групп”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22:4** (2019), 239–252

Interpolation ordered algebraic systems

Mikhalev A.V., Shirshova E.E.

Partially ordered algebraic systems such as linear spaces over partially ordered skew fields, pseudo-ordered rings and algebras over partially ordered fields are considered.

This order of a ring (an algebra) is similar to a partial order of a Lie algebra, which was introduced by Kopytov. Those orders are induced onto nonassociative rings (algebras) (Lie rings, Jordan rings, for example) by partial orders of their additive groups.

Second and third theorems of order isomorphisms for interpolation ordered systems are proved. *Keywords*: partially ordered linear spaces, rings and algebras, interpolation groups, order homomorphisms.

References

- [1] Mikhalev A.V., Shirshova E.E., “Prime radicals of directed pseudo-ordered rings”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **22:4** (2019), 147–166
- [2] Mikhalev A.V., Shirshova E.E., “The projective geometry over partially ordered skew fields, II”, *Chebyshevskii sbornik*, **22:1** (2021), 213–224
- [3] Mikhalev A.V., Shirshova E.E., “Prime radicals of directed pseudo-ordered algebras over directed fields”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **23:3** (2020), 213–230

- [4] Kopytov V.M., *Lattice-ordered groups*, «Nauka», Moscow, 1984, 320 c.
- [5] Shirshova E.E., “On convex directed subgroups of pseudo lattice-ordered groups”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **22**:4 (2019), 239–252

Решение задачи назначения командира клеточными автоматами

М. Ф. Музаффарова¹

Задача назначения командира состоит в следующем. В начальный момент времени, каждая клетка двумерного клеточного автомата может быть белой или чёрной. Черные клетки в совокупности составляют связную фигуру. Необходимо, чтобы в финальной конфигурации ровно одна черная клетка перешла в специальное состояние «командир». Получена верхняя оценка времени решения задачи.

Ключевые слова: Плоский клеточный автомат, связная фигура, назначение командира

Клеточные автоматы впервые предложены одним из основоположников современных компьютерных технологий Джоном фон Нейманом [1] для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. В настоящее время клеточные автоматы широко используются в компьютерных науках, математике, физике, микромеханике и теоретической биологии.

Актуальность исследований в области клеточных автоматов продолжает расти по мере распространения параллельных вычислений. В данный момент ведутся активные исследования в области автоматов и однородных структур [2], [3].

На механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова исследованием однородных структур занимались В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов [4].

В определенных задачах, решаемых с применением клеточных автоматов, в начальный момент времени помимо начальных состояний всех клеток, требуется задать клетку с отличающимся состоянием, чтобы опираться на нее в ходе решения задачи. Эту клетку назовем командиром. Цель данной работы заключается в назначении командира клеточными автоматами среди черных клеток, в совокупности представляющих собой связную фигуру, а также в оценке времени назначения командира в любой связной фигуре клеточными автоматами.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.- м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство, внимание к работе и всестороннюю поддержку.

¹ *Музаффарова Мохидил Фаррух кизи* — студент факультета прикладной математики и информатики филиала МГУ в г. Ташкенте, e-mail: mohidil.muzaffarova@gmail.com

Muzaffarova Mokhidil Farrukh qizi — student, Lomonosov Moscow State University, Tashkent branch, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science

Будем использовать терминологию и обозначения, введенные в [5].

Дан клеточный автомат $\sigma = (\mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi)$, где \mathbb{Z}^2 — множество двумерных векторов с целыми координатами.

Шаблон соседства имеет вид $V = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)\}$.

Далее ячейки клеточного автомата будем называть клетками.

Определение задачи назначения командира.

В начальный момент времени клетки автомата могут находиться в одном из двух состояний: 0 или 1, где 0 - белый цвет, 1 - черный цвет. Необходимо, чтобы в финальной конфигурации ровно одна черная клетка перешла в специальное состояние «командир».

Теорема 1. *Если периметр прямоугольника, охватывающего начальную связную конфигурацию, равен p , то задача назначения командира может быть решена клеточным автоматом за время, не превышающее $3p$.*

Идея доказательства теоремы состоит в следующем.

Для решения задачи назначения командира клеточными автоматами предлагается алгоритм, состоящий из двух этапов. На первом этапе связная фигура заполняется до минимального охватывающего прямоугольника. Сам командир определяется на втором этапе алгоритма внутри полученного прямоугольника.

Получено, что любая связная фигура заполняется до минимального охватывающего прямоугольника не более, чем за $n + m - 3$ шагов, где n, m — стороны прямоугольника.

Поскольку в клеточных автоматах каждая клетка может знать только своё состояние и состояние своих соседей, то для того, чтобы понять, что минимальный охватывающий прямоугольник уже построен и можно приступить к назначению командира, запускается “проверяющий сигнал”. “Проверяющий сигнал”, начиная с левой верхней угловой клетки, по часовой стрелке обходит внешнюю границу фигуры. Когда “проверяющий сигнал” заканчивает обход и понимает, что обошел прямоугольник, считается, что фигура заполнилась до минимального прямоугольника, содержащего начальную конфигурацию.

Поскольку “проверяющий сигнал” может быть запущен из нескольких клеток, то для неправильных “проверяющих сигналов” запускается “затирающий сигнал”, который будет затирать неправильный “проверяющий сигнал”. Оказалось, что при равных скоростях “затирающего” и “проверяющего” сигналов, могут возникать случаи, когда клеточный автомат неправильно определяет момент построения охватывающего прямоугольника. Но если скорость “затирающего сигнала” в два раза больше скорости “проверяющего сигнала”, тогда алгоритм работает корректно.

После заполнения начальной фигуры до минимального охватывающего прямоугольника, на втором этапе алгоритма приступаем к назначению командира. Начиная с левой верхней клетки прямоугольника, слева направо по границе делается обход до тех пор пока не найдется клетка, которая была черной в начальной конфигурации. Как только такая клетка найдена, закрашиваем ее в красный цвет. Эта клетка и будет командиром.

Список литературы

- [1] Дж. фон Нейман, “Теория самовоспроизводящихся автоматов”, *Мир, Москва*, 1971.
- [2] Титова Е. Е., “Конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, 2014.
- [3] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, 2020.
- [4] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., “Основы теории однородных структур”, *Наука*, 1990.
- [5] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А.С., “Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая.”, *Теория автоматов., Издательские решения, Москва*, 2018, ISBN: 978-5-4493-5160-9.

Solving the problem of appointing a commander by cellular automata

Muzaffarova M.F.

The task of appointing a commander is as follows. At the initial moment of time, each cell of a two-dimensional cellular automata can be white or black. The black cells together make up a connected figure. It is necessary that in the final configuration, exactly one black cell passes into the special “commander” state. An upper bound is obtained for the time required to solve the problem.

Keywords: Plane cellular automata, connected figure, appointment of a commander

References

- [1] John von Neumann, “Theory of self-reproducing automata”, *Peace, Moscow*, 1971 (In Russian).
- [2] Titova E.E., “Image construction by cellular automata”, *Intelligent Systems*, 2014 (In Russian).
- [3] Kudryavtsev V.B., Podkolzin A.S., Bolotov A.A., “Fundamentals of the theory of homogeneous structures”, *Science*, 1990 (In Russian).

- [4] Gasanov E.E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and applications.*, 2020 (In Russian).
- [5] Kudryavtsev V.B., Gasanov E.E., Podkolzin A.S., “Intelligent System Theory: book four.”, *Automata theory., Publishing solutions, Moscow*, 2018, ISBN: 978-5-4493-5160-9 (In Russian).

Об асимптотических хороших семействах классических и квантовых LDPC кодов

Пантелеев П. А.², Калачев Г. В.¹

В работе показывается существование асимптотически хорошего семейства квантовых низкоплотностных кодов, что доказывает qLDPC гипотезу. Также показано существование асимптотически хорошего семейства локально тестируемых кодов с константными параметрами локальности и корректности, что также является положительным решением известной гипотезы в области классических локально тестируемых кодов.

Ключевые слова: локально тестируемы коды, квантовые LDPC коды, асимптотически хорошие коды.

1. Введение

Обозначим через \mathbb{F}_q конечное поле из q элементов. *Классическим линейным* $[n, k, d]_q$ кодом над \mathbb{F}_q называют произвольное k -мерное векторное пространство $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ такое, что $d = \min_{c \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} |c|$, где $|c|$ — вес Хемминга вектора $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}_q^n$, т.е. число его ненулевых компонент c_i , $1 \leq i \leq n$. Параметры n , k и d называются соответственно *длиной*, *размерностью* и *минимальным расстоянием* кода \mathcal{C} .

Обычно линейный код задается как множество решений однородной системы уравнений $\mathcal{C}(H) := \{c \in \mathbb{F}_q^n \mid Hc = 0\}$, а соответствующая матрица $H \in \mathbb{F}_q^{r \times n}$ называется его *проверочной матрицей*. Бесконечное семейство $\{\mathcal{C}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ классических линейных кодов над \mathbb{F}_q называется семейством *низкоплотностных кодов* или семейством *LDPC кодов* (англ. Low-Density Parity-Check code) [1], если существует задающее их семейство проверочных матриц $\{H^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, т.е. $\mathcal{C}^{(i)} = \mathcal{C}(H^{(i)})$, такое, что число ненулевых элементов в $H_i \in \mathbb{F}_q^{r_i \times n_i}$ растет как $\Theta(n_i)$ при $i \rightarrow \infty$. Часто последнее требование заменяется более сильным требованием, что существует универсальная константа w такая, что все строки и столбцы

²Пантелеев Павел Анатольевич — к.ф.-м.н., н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: panpavel@yandex.ru.

Panteleev Pavel Anatolyevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

¹Калачев Глеб Вячеславович — к.ф.-м.н., м.н.с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Problems of Theoretical Cybernetics Lab.

матриц из $\{H^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ ограничены сверху числом w . В этом случае семейство LDPC кодов $\{C^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ называется *w-ограниченным*. Везде далее семейство LDPC кодов понимается именно в этом более узком смысле.

Классический код называется (w, s) -*локально тестируемым кодом* если его можно задать проверочной матрицей $H \in \mathbb{F}_q^{r \times n}$, у которой вес всех строк ограничен w , и для любого вектора $x \in \mathbb{F}_q^n$ мы получаем

$$\frac{1}{r}|Hx| \geq \frac{s}{n}d(x, C),$$

где $d(x, C) := \min_{c \in C} |x - c|$ — *расстояние* от x до кода C . Параметры w и s называются соответственно *локальностью* (англ. locality) и *корректностью* (англ. soundness) проверочной матрицы H . Локально тестируемые коды тесно связаны с вероятностно проверяемыми доказательствами и знаменитой РСР-теоремой, и имеют большое значение для современной теории сложности вычислений [3].

Квантовые коды были введены П. Шором [4] с целью создания устойчивых к ошибкам квантовых компьютеров. Одним из наиболее распространенных классов таких кодов являются коды Кальдербанка-Шора-Стина (CSS коды) [5, 6]. Напомним, что квантовый CSS код \mathcal{Q} с параметрами $[[n, k, d]]_q$ определяется парой классических кодов $C_X, C_Z \subseteq \mathbb{F}_q^n$ таких, что $C_Z^\perp \subseteq C_X$ и $k = \dim C_X + \dim C_Z - n$, где C_Z^\perp — двойственный код к C_Z , т.е. его ортогональное дополнение относительно стандартного скалярного произведения $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ в \mathbb{F}_q^n . Параметры n , k и d , как и в случае классических кодов, называются соответственно *длиной*, *размерностью* и *минимальным расстоянием* квантового CSS кода. При этом минимальное расстояние d определено как $d := \min(d_X, d_Z)$, где d_X и d_Z равны минимальному весу Хемминга векторов из $C_X \setminus C_Z^\perp$ и $C_Z \setminus C_X^\perp$ соответственно. Бесконечное семейство квантовых CSS кодов, заданных парами классических кодов $\{(C_X^{(i)}, C_Z^{(i)})\}_{i \in \mathbb{N}}$, называется семейством *квантовых LDPC кодов* если $\{C_X^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{C_Z^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются семействами классических LDPC кодов.

Часто, в особенности когда $n \rightarrow \infty$, бывает полезно также рассматривать величины k/n и d/n называемые *скоростью* и *относительным минимальным расстоянием* кода (классического или квантового). Бесконечное семейство кодов (классических или квантовых) называется *асимптотически хорошим* если существует такая константа $\varepsilon > 0$, что скорость и относительное минимальное расстояние любого кода из этого семейства ограничены снизу величиной ε . Известно [1], что существуют конструкции асимптотически хороших LDPC кодов, причем даже с линейной сложностью декодирования [2]. Однако вопрос о существовании асимптотически хороших семейств классических локально тестируемых

и квантовых LDPC кодов оставался открытым достаточно долгое время. В настоящей работе мы показываем существование данных семейств.

Теорема 1. Для каждого числа $R \in (0, 1/2)$ и конечного поля \mathbb{F}_q можно найти константы s and w такие, что существует семейство (w, s) -локально тестируемых классических линейных кодов с параметрами $[n, k \geq Rn, d = \Theta(n)]_q$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для каждого числа $R \in (0, 1)$ и конечного поля \mathbb{F}_q существует семейство квантовых LDPC кодов с параметрами $[[n, k \geq Rn, d = \Theta(n)]]_q$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание. Полная версия данной работы с доказательствами Теорем 1 и 2 может быть найдена в [7]. Отметим также, что чуть более сильная версия Теоремы 1 для случая поля \mathbb{F}_2 была также недавно независимо показана в [8].

Список литературы

- [1] R. Gallager, “Low-density parity-check codes”, *IRE Transactions on Information Theory*, **8:1** (1962), 21–28.
- [2] M. Sipser, D.A. Spielman, “Expander codes”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **42:6** (1996), 1710–1722.
- [3] Oded Goldreich, *Short Locally Testable Codes and Proofs: A Survey in Two Parts*, Lecture Notes in Computer Science, ed. Oded Goldreich, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, 65–104.
- [4] P. Shor, “Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory”, *Phys. Rev. A*, **52:4** (1995), R2493–R2496.
- [5] A. R. Calderbank, P. Shor, “Good quantum error-correcting codes exist”, *Phys. Rev. A*, **54:2** (1996), 1098–1105.
- [6] A. M. Steane, “Error Correcting Codes in Quantum Theory”, *Phys. Rev. Lett.*, **77:5** (1996), 793–797.
- [7] Pavel Panteleev, Gleb Kalachev, *Asymptotically Good Quantum and Locally Testable Classical LDPC Codes*, arXiv: 2111.03654.
- [8] Irit Dinur, Shai Evra, Ron Livne, Alexander Lubotzky, Shahar Mozes, *Locally Testable Codes with constant rate, distance, and locality*, arXiv: 2111.04808.

On asymptotically good families of classical and quantum LDPC codes

Panteleev P.A., Kalachev G.V.

In this work it is shown that there exists an asymptotically good family of quantum LDPC codes, which proves the qLDPC conjecture. We also show that there exists an asymptotically good family of classical locally testable codes with constant query and soundness

parameters, which also gives a positive solution of a well-known conjecture in the field of classical locally testable codes.

Keywords: locally testable codes, quantum LDPC codes, asymptotically good codes.

References

- [1] R. Gallager, “Low-density parity-check codes”, *IRE Transactions on Information Theory*, **8**:1 (1962), 21–28.
- [2] M. Sipser, D.A. Spielman, “Expander codes”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **42**:6 (1996), 1710–1722.
- [3] Oded Goldreich, *Short Locally Testable Codes and Proofs: A Survey in Two Parts*, Lecture Notes in Computer Science, ed. Oded Goldreich, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, 65–104.
- [4] P. Shor, “Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory”, *Phys. Rev. A*, **52**:4 (1995), R2493–R2496.
- [5] A. R. Calderbank, P. Shor, “Good quantum error-correcting codes exist”, *Phys. Rev. A*, **54**:2 (1996), 1098–1105.
- [6] A. M. Steane, “Error Correcting Codes in Quantum Theory”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:5 (1996), 793–797.
- [7] Pavel Panteleev, Gleb Kalachev, *Asymptotically Good Quantum and Locally Testable Classical LDPC Codes*, arXiv:2111.03654.
- [8] Irit Dinur, Shai Evra, Ron Livne, Alexander Lubotzky, Shahar Mozes, *Locally Testable Codes with constant rate, distance, and locality*, arXiv:2111.04808.

Генерация тестовых матриц с заданным числом обусловленности

Д. В. Парфенов¹, А. М. Чешкова²

Данная работа посвящена описанию простого эвристического метода генерации вещественных тестовых матриц с заданным числом обусловленности для обоснованного практического выбора методов решения задач линейной алгебры.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений, число обусловленности, спектр матрицы, тестовые матрицы.

1. Введение

Арсенал методов решения типовых задач линейной алгебры с очень большими и/или плохо обусловленными системами линейных алгебраических уравнений достаточно обширен и ставит вопрос обоснованного и вычислительно экономного выбора метода в каждой конкретной ситуации. При этом опираются не только на иногда доступные теоретические результаты, но и стараются принимать во внимание особенности задач и погрешности численной арифметики. Анализ влияния последних исключительно сложен [1], что вынуждает на практике выяснять точность работы конкретных реализаций методов на определённых легко вычисляемых классах тестовых матриц (Вандермонда, Коши, случайных). Однако, тестирование на столь узком круге матриц часто не позволяет выяснить тонкости применения методов в силу отсутствия механизмов гибкого задания свойств тестовой матрицы. Синтез матриц с заданным спектром достаточно вычислительно затратен, поэтому возникает потребность в несложных, но гибких методах получения тестовых матриц. Наибольшее внимание в данном вопросе уделяется числу обусловленности. Так, например, У. Чени и Д. Кинкейд утверждают [2], что при равном 10^k числе обусловленности можно потерять не менее k десятичных цифр точности,

¹ *Парфенов Денис Васильевич* — доцент кафедры Высшей математики Института кибернетики, МИРЭА - Российский технологический университет, к.т.н., доцент, e-mail: promasterden@yandex.ru.

Parfenov Denis Vasilevich — associate professor, MIREA – Russian Technological University, Institute of Cybernetics, Chair of Higher Mathematics.

² *Чешкова Анна Михайловна* — студент магистратуры кафедры Высшей математики Института кибернетики, МИРЭА - Российский технологический университет, e-mail: cheshkoann@gmail.com.

Cheshkova Anna Mikhaylovna — master student, MIREA – Russian Technological University, Institute of Cybernetics, Chair of Higher Mathematics.

даже не учитывая эффекты использования приближённой компьютерной арифметики.

2. Эвристический метод генерации матриц с заданным числом обусловленности

Рассмотрим два типа квадратных матриц. Первый – идеально хорошо обусловленная единичная матрица, второй – идеально плохо обусловленная матрица, заполненная единицами. На сопоставлении их конструкции основана идея предлагаемого метода, целью которого является генерация матриц с заданным ”промежуточным” поведением. Диагональ матрицы всегда заполняется единицами, как в обоих рассмотренных типах матриц с ”предельными” свойствами обусловленности. Величина элемента матрицы задаётся как функция удаления этого элемента вдоль строки от главной диагонали.

Входными параметрами метода генерации квадратной тестовой матрицы являются её размер N и вещественный параметр качества матрицы $-N + 2 \leq \delta < \infty$. При $\delta = -N + 2$ получается единичная матрица, а при $\delta \rightarrow \infty$ растёт степень вырождения матрицы. Здесь и далее предполагается, что элементы матрицы нумеруются с нуля.

Сначала строится первая строка a_{00}, \dots, a_{0N-1} генерируемой тестовой квадратной матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=0}^{N-1}$. Значения её элементов вычисляются по следующему правилу:

$$a_{0j} = \begin{cases} 1 - \frac{j}{N-1+\delta}, & \text{если } \frac{j}{N-1+\delta} \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, j = 0, \dots, N-1.$$

Эта функция определена для неотрицательных целых индексов столбцов $j \leq N-1$, неотрицательна и всегда проходит через точку $(0, 1)$. Её общий вид при разных значениях параметра δ представлен на Рис. 1.

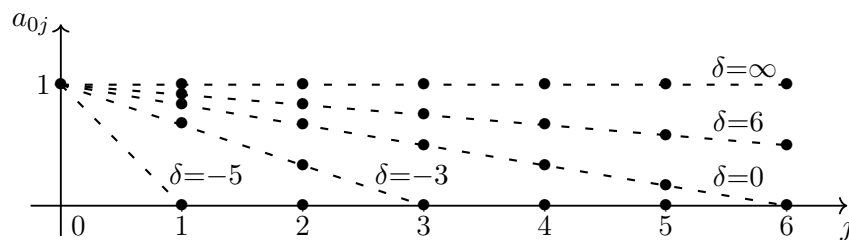


Рисунок 1. Графики зависимостей коэффициентов первой строки матрицы A от индекса при разных δ для $N = 7$.

Последующие строки A получаются циклической перестановкой элементов первой строки: $a_{ij} = a_{(i-1)\bmod N (j-1)\bmod N}$. Например, при $N = 2, 3, 4$ структура тестовых матриц такова:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{01} \\ a_{01} & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \\ a_{02} & 1 & a_{01} \\ a_{01} & a_{02} & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{03} & 1 & a_{01} & a_{02} \\ a_{02} & a_{03} & 1 & a_{01} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Исследование полученных матриц

Авторам пока не удалось исследовать связь числа обусловленности со значениями δ и N аналитически. Представленные на Рис. 2 экспериментальные результаты получены с помощью стандартного программного пакета [3] и наводят на мысль о наличии достаточно простой зависимости. На графиках не изображено значение числа обусловленности при $\delta = \infty$, равное ∞ .

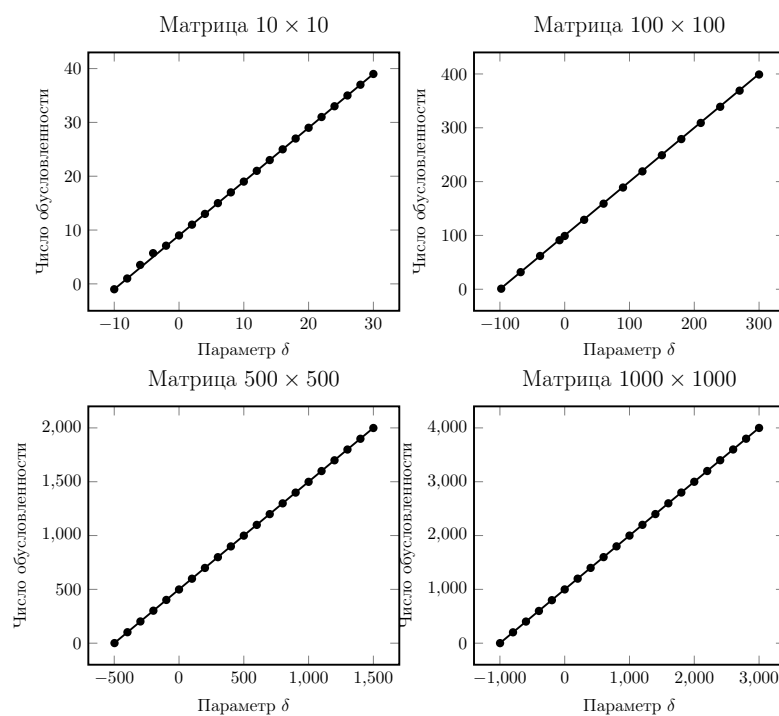


Рисунок 2. Графики зависимостей числа обусловленности матрицы от параметра δ при разных N .

Предложен новый, чрезвычайно простой способ синтеза диагонально доминирующих тёплицевых тестовых матриц с неотрицательными вещественными элементами и желаемым значением числа обусловленности напрямую, а не подбором. Он годится также для построения прямоугольных матриц, соответствующих недоопределённым и переопределённым системам линейных алгебраических уравнений. Исходя из проведённых численных экспериментов, можно сформулировать гипотезу о линейной связи параметра δ с числом обусловленности, но она пока не доказана, и имеет смысл в каждом конкретном случае убеждаться, что это так.

Список литературы

- [1] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, second edition*, SIAM, Philadelphia, United States, 2002, 680 pp.
- [2] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Broks/Cole, Pacific Grove, United States, 2008, 766 pp.
- [3] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, L.S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' guide (third ed.)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center Philadelphia, United States, 1987, 412 pp.

Generation of Test Matrices with Given Condition Numbers Parfenov D. V., Cheshkova A. M.

A new low-complexity heuristic method for generation of real-valued test matrices with required condition number is proposed.

It makes practical selection of methods for solving linear algebra problems easier.

Keywords: systems of linear equations, condition number, matrix spectrum, test matrices.

References

- [1] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, second edition*, SIAM, Philadelphia, United States, 2002, 680 pp.
- [2] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Broks/Cole, Pacific Grove, United States, 2008, 766 pp.
- [3] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, L.S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' guide (third ed.)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center Philadelphia, United States, 1987, 412 pp.

Об алгоритмизации знаний

А. С. Подколзин¹

В работе рассматриваются вопросы компьютерного моделирования процессов решения задач и автоматического создания приемов решателя. Излагается архитектура процесса перехода от теорем к приемам (алгоритмизации знаний), сложившаяся в процессе обработки многочисленных примеров. Создана компьютерная система, позволяющая решать задачи из различных разделов математики и способная пополнять свою базу приемов.

Ключевые слова: компьютерный решатель задач, логическая система, искусственный интеллект.

В компьютерной сети хранятся огромные запасы знаний, накопленных человечеством. Казалось бы, отсюда рукой подать до искусственного интеллекта, способного применять эти знания для решения разнообразных задач и пополнять их запасы. Однако, время идет, а программы по-прежнему пишутся программистами, науки развиваются учеными, технические проекты создаются инженерами. Всплеск энтузиазма, вызванного успехами искусственных нейросетей в распознавании образов, этой картины не изменил. Создается такое впечатление, что центральной проблемой искусственного интеллекта является, все-таки, не проблема распознавания образов, а проблема алгоритмизации знаний. Нужно научить компьютер самостоятельно создавать по хранящимся в нем знаниям алгоритмы/приемы решения задач, и лишь тогда возникнет искусственный интеллект, по-настоящему понимающий эти знания.

С точки зрения математики, проблема алгоритмизации знаний сводится к вопросу: как из теорем извлечь приемы решения задач? Для изучения процесса преобразования теорем в приемы и была создана компьютерная система, описанию которой посвящена монография "Компьютерное моделирование логических процессов". Эту монографию [1], а также программу самой системы можно найти на сайте кафедры MaTIC www.intsys.msu.ru.

Прежде всего, пришлось накопить достаточно большое количество уже "алгоритмизированных" знаний и понять, как они должны быть организованы в компьютерной системе для того, чтобы она могла эффективно решать задачи. Прорабатывались примеры из множества различных предметных областей. Процесс решения разбивался на элемен-

¹Подколзин Александр Сергеевич — д.ф.м.н., профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexander.p@yandex.ru.

Podkolzin Alexander Sergeevich — Dr. of Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

тарные шаги, и для каждого из них предлагалось объяснение в виде небольшой программы — "приема который в аналогичной ситуации выполнял аналогичные действия. Для приема определялось то ключевое понятие, появление которого в текущем контексте должно было инициировать попытку применения приема. За каждым понятием закреплялась ветвь программы решателя, к которой относились соответствующие приемы, и база приемов оказалась организована как энциклопедия приемов. Решение задачи происходило в процессе сканирования ее описания и обращения для текущего понятия к соответствующей ветви данной энциклопедии. Таким образом, система получила что-то вроде внутреннего "логического зрения" и могла принимать решение об очередном действии с учетом всей текущей картины.

Так как каждый прием действовал автономно и независимо от других приемов, а общее количество приемов на текущий момент достигло более чем 50000, возникла проблема организации разумного их взаимодействия, которое закладывалось в решающие правила приемов в процессе обучения на примерах. Всего было рассмотрено более 13000 задач из различных предметных областей: дискретная математика, алгебра множеств, элементарная алгебра, элементарная геометрия, аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, комплексный анализ, теория вероятностей, общая алгебра, элементарная физика, элементарная химия, распознавание рукописных букв, текстовый анализ, шахматы. Система отображает процесс решения задачи "по шагам" и оказалась способна решать многие задачи уровня конкурсных экзаменов по математике. Например, пошаговый показ решения задач по элементарной алгебре, который в последнее время демонстрирует программа С.Вольфрама, данная система умела делать еще 25 лет назад. Неплохо справляется она со стандартными задачами по элементарной геометрии, а также задачами из других перечисленных выше разделов. Таким образом, можно считать, что понимание того, как выглядят алгоритмизированные знания, было до некоторой степени достигнуто.

Чтобы упростить создание приемов, был создан специальный язык программирования ЛОС (Логический Описатель Ситуаций), максимально приближенный к логическому языку. Главной его задачей была формулировка сложных условий на целесообразность применения приема в текущем контексте. В этих условиях разрешалось использовать кванторы и описатели, причем операторы языка работали в режиме перечисления значений выходных переменных, позволившем обходиться без операторов цикла. Хотя язык ЛОС и оказался близок к известному языку логического программирования ПРОЛОГ, в отличие от ПРОЛОГа он ориентирован не на формулировку теоремы предметной области, а на

формулировку условий управления этой теоремой. Для решателей это оказалось более важным, так как часто запись управляющей компоненты приема была во много раз сложнее записи теоретической компоненты. ЛОС существенно ускорил процесс программирования и упростил чтение программ. Для выполнения его программ создан интерпретатор, и вся работа системы, включая интерфейсы, происходит через ЛОС.

Дальше начался процесс постепенного движения вспять — от алгоритмизированных в виде приемов знаний к их источникам. Практика обучения решателя показала, что обычно прием основан на какой-то единственной теореме. В программе ЛОСа фрагменты этой теоремы и управления теоремой перемешаны достаточно хаотичным образом. Естественным первым шагом на пути к истокам программ стал переход к отдельной записи теоремы и управления. Для такого разделения был создан язык логического программирования ГЕНОЛОГ, в котором прием задается теоремой, сопровождаемой некоторой алгоритмизирующей разметкой ("генотипом" приема), понятной компилятору. Этот язык, в отличие от ЛОСа, не является непосредственно исполняемым. Компилятор преобразует описание приема на ГЕНОЛОГе в программу ЛОСа.

Чтобы сформулировать условия целесообразности применения теоремы в текущем контексте, ГЕНОЛОГ использует полномасштабный логический язык. Таким образом, описание приема имеет два логических уровня — уровень предметной области, на котором задается теорема, и уровень структур данных, на котором задается управление теоремой. В этом заключается принципиальное отличие ГЕНОЛОГа от других языков логического программирования. Создание ГЕНОЛОГа происходило постепенно, по мере проработки задач из различных разделов. Фактически, он представляет собой огромную коллекцию способов алгоритмизации теорем. ГЕНОЛОГ настолько упростил и ускорил создание приемов, что позволил в сравнительно короткие сроки накопить их запас, достаточный, например, для решения задач по планиметрии. Проработка перечисленных выше разделов, в которых было создано более 50000 приемов решателя, была осуществлена на ГЕНОЛОГе. Первые шесть томов монографии [1, 2, 3, 4, 5, 6] "Компьютерное моделирование логических процессов" посвящены изложению этих приемов и описанию общей организации компьютерной логической системы.

Однако, ГЕНОЛОГ оказался лишь промежуточным пунктом на пути от приемов к породившим их теоремам. Алгоритмизирующая разметка теоремы была нацелена лишь на то, чтобы подробно объяснить компилятору, как по теореме создавать ЛОС-программу приема. В ней ничего не говорилось о целях применения приема. Чтобы автоматизировать создание таких разметок, была предпринята классификация приемов ГЕНОЛОГа по целевому признаку. Согласно этой классификации, целе-

вая установка приема описывалась типом приема и небольшим набором сопровождающих его данных. Например, направлением тождественной либо эквивалентной замены, выделением каких-то переменных, подтермов, и т.п. Такая целевая установка, получившая название спецификации приема, оказалась фактически альтернативным способом задания приема. Язык задания приемов с помощью сопровождающих теорему спецификаций был назван логическим ассемблером. Аналогия с обычным ассемблером, хотя и весьма отдаленная, заключается в том, что тип приема уподобляется коду операции, а дополнения к нему — операндам.

Число типов приемов приближается к 1500. Наиболее часто встречаются порядка 300 из них. Для перехода от задания приема на логическом ассемблере к заданию его на ГЕНОЛОГе был создан компилятор. Однако, этот процесс компиляции потребовал привлечь принципиально новый элемент — доводку создаваемого приема на задачах с целью оптимизации его параметров и бесконфликтного "вживления" в базу приемов.

Логический ассемблер, хотя и оказался языком пограничного слоя между теоремами и программами, примыкает к этому слою со стороны программ. В первую очередь, из-за того, что теоремы приемов оказалось целесообразно, в целях упрощения компиляции, несколько "деформировать" по отношению к обычным теоремам, отбрасывая избыточные проверки и добавляя некоторые элементы технического характера. Все-таки, теоремы приемов представляют собой лишь фрагмент языка программирования. Чтобы перейти через "пограничный слой" между приемами и теоремами и далее продолжить работу со стороны базы теорем, нужно было прежде всего создать эту самую базу теорем.

Заполнение базы теорем непосредственно из учебников привело бы к существенному разрыву между ними и теоремами приемов. Теоремы приемов обычно содержали множество обобщающих параметров или представляли собой какие-то комбинации теорем "из учебников ориентированные на решение задач и в учебниках обычно отсутствующие. Чтобы проследить источники приемов, нужно было избежать указанного разрыва. Поэтому первоначально база теорем заполнялась теоремами, представляющими собой аккуратные с точки зрения логики переформулировки теорем приемов. Она представляла собой как бы "проекцию" базы приемов. В большинстве случаев теорема из базы теорем попросту совпадала с теоремой приема.

Следующим вопросом было: как по теореме создавать спецификации приемов? Имеющаяся база теорем, привязанная к базе приемов и к уже готовым их спецификациям, позволила провести определенную классификацию теорем и выработать некоторый список стандартных характеристик теорем, подсказывающих возможные типы приемов для них. Большинство этих характеристик легко вычислялись непосредственно

по теореме, и для сопровождения ими теоремы была создана специальная процедура, названная характеризатором. Создание других характеристик требовало понимания предыстории возникновения теоремы. Они должны были появляться лишь в процессе вывода теорем. Так или иначе, в базе теорем каждая теорема сопровождалась списком своих характеристик. Спецификации приемов создавались процедурой, просматривающей характеристики теоремы и предлагающей для текущей характеристики список возможных спецификаций. Эта процедура получила название спецификатора.

Собственно говоря, уже с этого момента появилась возможность автоматического создания приемов по теореме: сначала характеризатор сопровождает теорему списком характеристик, затем спецификатор предлагает по каждой из них возможные спецификации, далее компилятор спецификаций преобразует их в описания приемов ГЕНОЛОГа, и, наконец, компилятор ГЕНОЛОГа получает ЛОС-программы приемов.

Однако, такие приемы, созданные без учета того, какие приемы уже имеются в решателе, обычно оказываются бесполезными или даже вредными. Либо они дублируют то, что делалось другими приемами, либо бесплодные попытки их применения сильно замедляют работу, либо они вообще направляют ход решения по ошибочному руслу. Чтобы преодолеть это явление, понадобились еще два этапа обработки приема.

Прежде всего, предпринимается попытка создать для приема простую тестовую задачу, которая решалась бы данным приемом, но не решалась в его отсутствие. Так как тип приема известен и известна его целевая ориентация, достаточно, чтобы задача была лишь одноходовкой, проверяющей, что решатель способен сделать шаг в направлении нужной цели. Данный этап обеспечивает настолько хорошую фильтрацию, что ее проходят только те приемы, которые действительно расширяют возможности решателя. Фактически, тестовый пример служит как бы доказательством необходимости приема.

Однако, даже необходимый для одной задачи прием бывает способен "поломать" ход решения других задач обучающего материала, сохраняемого в задачнике решателя. Поэтому, после примерки на тестовых задачах, предпринимается прокрутка решателя по одному или нескольким разделам задачника для выявления тех задач, решение которых сильно замедлилось или на которые стал возникать отказ. На этих задачах предпринимается доводка приема: варьируется уровень срабатывания приема, предпринимается переход к подтипу приема, обеспечивающему более высокую степень мотивированности срабатывания, и т.п. При доводке учитывается, что прием по-прежнему должен решать свою тестовую задачу.

Лишь после примерки и доводки автоматически созданные приемы регистрируются в накопителе результатов. Так как система находится лишь на стадии обучения, окончательный отбор приемов из накопителя и перенесение их в основную базу приемов пока выполняется вручную. Обычно отклоняется лишь меньшая их часть, причем причиной служит крайне маловероятное возникновение ситуации, на которую рассчитан прием.

Но вернемся к рассмотрению теорем — до того момента, как для них генерировались спецификации. Как уже говорилось, те теоремы, по которым создаются приемы, редко совпадают с "базисными" теоремами из учебников. Обычно они представляют собой результат определенной переработки базисных теорем, необходимой для решения задач. Такая переработка может заключаться в том, что теорема снабжается множеством обобщающих параметров, ориентированных на применение ее в "неявных" ситуациях, либо в комбинировании нескольких теорем для вывода стандартной "заготовки" для часто встречающейся в задачах ситуации, и т.п. Поэтому, для завершения рассмотрения цикла алгоритмизации теорем, осталось обеспечить указанный переход от базисных теорем к теоремам, по которым будут создаваться приемы. Этот переход будем называть программирующим логическим выводом.

Извлеченные из базы приемов решателя теоремы оказались превосходным обучающим материалом для создания приемов программирующего вывода. Они были распределены по специальным подразделам оглавления базы теорем — своего рода задачам на программирующий вывод. В первом пункте подраздела располагались одна или несколько базисных теорем, в остальных пунктах размещались те теоремы — источники приемов, которые должны были получаться программирующим выводом из базисных теорем. Эти подразделы получили название ячеек логического вывода.

Разумеется, доказательства теорем изложены в учебниках и хорошо известны. Не составляет особого труда и доказательство их следствий, используемых для создания приемов. Но умение доказывать теоремы ничего не дает, если сами теоремы еще отсутствуют. Поэтому проработка программирующего логического вывода означала ни много ни мало анализ процессов "открытия" теорем, начиная хотя бы с их простых следствий.

Чтобы объяснять, как та или иная теорема ячейки могла бы быть открыта при анализе базисных теорем, приходилось находить цепочку достаточно естественных переходов, быть может с привлечением дополнительных теорем, которые тоже заносились в общую базу теорем — для дальнейшего объяснения их "происхождения". Для установления того, какие переходы являются естественными, использовались характери-

ки теорем. Они позволили придать переходам в цепочке вывода вполне определенную целевую направленность. Каждый переход оформлялся в виде небольшой программы, анализирующей теорему в контексте заданной ее характеристики. Такие программы, названные приемами программирующего логического вывода, аккумулировались в своеобразном "теоремном" решателе системы. На текущий момент он насчитывает более 1500 приемов.

Прием программирующего вывода — существенно более развитый объект, чем обычное правило вывода в математической логике. Во-первых, он должен самостоятельно находить в базе теорем дополнительные теоремы, которые в сочетании с текущей анализируемой теоремой будут давать полезные следствия. Здесь используются как оглавление базы теорем, так и специальные процедуры быстрого поиска теорем заданного типа. Во-вторых, прием программирующего вывода может обращаться к решателю для различных вспомогательных задач, подсказанных его целевой установкой. В результате срабатывание одного такого приема часто оказывается равносильным длинной цепочке применений обычных правил вывода, причем устройство ее непредсказуемо из-за подключения мощного аппарата всей базы приемов решателя. В-третьих, прием должен использовать определенные эвристические правила для блокировки вывода мало полезных (например, чрезмерно громоздких) теорем. В частности, для этого используется блокировка определенных сочетаний последовательно применяемых приемов вывода. При обучении такая блокировка позволила устойчиво обеспечивать исчерпание возможностей дальнейшего вывода в ячейке и выдачу окончательного результата за приемлемое время. В особых случаях результаты вывода выносились в новые ячейки, и глубина вывода таким образом увеличивалась. В-четвертых, прием вывода должен сопровождать теорему характеристиками. Обычно для этого используется общая процедура характеристизатора, но иногда прием сам указывает характеристики, объясняющие цель, ради которой он ее получил.

Грань между программирующим логическим выводом и исследовательским выводом является весьма условной. При проработке базы теорем оказалось, что получение многих "классических" теорем может быть объяснено приемами логического вывода того же уровня сложности, что и для их "технических" следствий. Несложные приемы, объясняющие, как одна теорема могла бы быть выведена из других, были созданы, например, для формул корней квадратных и кубических уравнений в элементарной алгебре, теоремы Пифагора и теорем синусов и косинусов в планиметрии, свойств определителей в линейной алгебре, основных формул вычисления первообразных в математическом анализе и т.д. Фактически, теоремы прорабатываются почти подряд, без разделения на

базисные и вторичные. Все это вывело процесс обучения решателей на качественно более высокий уровень. Если раньше анализировались задачи из задачник и нужно было предложить приемы, которые доводили аналогичные задачи до ответа, то теперь анализируются теоремы и предпринимаются попытки создать приемы для "открытия" новых теорем. При этом разрешается использовать весь ранее накопленный системой потенциал решения задач.

Создан прототип генератора приемов, функционирующий по следующей схеме. Выбирается ячейка логического вывода, и в ней запускается процесс вывода теорем. Обычно возникают десятки теорем. В процессе вывода каждая теорема снабжается характеристиками. По этим характеристикам генерируются спецификации приемов (обычно — тоже вплоть до десятка спецификаций на каждую теорему). Компилятор спецификаций преобразует те из спецификаций, для которых пока не созданы приемы, в описания приемов на ГЕНОЛОГе. Для текущего такого приема (пока не откомпилированного на ЛОС) создается тестовый пример. Проверяется, что этот пример не решается системой, после чего новый прием компилируется, и проверяется, что теперь тестовый пример решается. Для отобранных таким образом новых приемов предпринимается расчистка — удаляются приемы, тестовые задачи которых решаются другими новыми приемами. В результате остается лишь малая часть изначально созданных приемов. Для них предпринимается завершающая двухэтапная доводка — сначала происходит прогонка по тому разделу задачника системы, для которого создавались приемы, затем — по всему задачнику. После каждой прогонки отбираются "испортившиеся" задачи, и для восстановления их нормального решения приемы корректируются. В процессе доводки приемы сортируются на пригодные для перенесения в решатель и непригодные. Последние дают информацию для развития генератора приемов. Окончательное перенесение приема в основную базу приемов пока происходит вручную.

Указанный прототип был протестирован на различных разделах базы теорем и позволил создать более 2000 новых приемов, аналогичных ранее созданным вручную и не только им не уступающих, но иногда даже превосходящих, так как при ручном синтезе многие требующие учета особые случаи упускались из виду.

В действительности не все приемы решателя основаны на теоремах. Некоторые из них основаны на тех или иных общих особенностях конкретного раздела, сформулированных в виде так называемых протоколов базы теорем. Эти протоколы уточняют способы алгоритмизации теорем раздела; в частности, порождают приемы, обращающиеся для вывода следствий или преобразований к вспомогательным задачам безотносительно к каким-либо конкретным теоремам. Система, создающая

протоколы при общем рассмотрении раздела базы теорем, названа алгоритмизатором. Технически алгоритмизатор является частью процедуры вывода теорем.

Наконец, упомянем об еще одном классе приемов — общелогических приемах, запрограммированных непосредственно на ЛОСе. Перевод их на ГЕНОЛОГ вряд ли целесообразен, так как ГЕНОЛОГ, по сути дела, является переходником между логическим языком предметной области и языком для описания структур данных, а в указанных приемах языком предметной области как раз и является язык структур данных — ЛОС. Этим приемам немного, они имеют универсальный характер, и автоматизация их создания пока не актуальна. По-видимому, эту автоматизацию можно свести к решению задач, формулируемых в терминах предикатов и операций ЛОСа.

На рисунке 1 приведена диаграмма, на которой представлены основные этапы и основные "действующие лица" изложенного процесса алгоритмизации теорем.

Седьмой [7] и восьмой [8] тома монографии "Компьютерное моделирование логических процессов" посвящены описанию тех блоков диаграммы, которые обеспечивают автоматическое создание приемов. Девятый том, в котором будут представлены алгоритмы программирующего логического вывода, завершит данное описание.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования.

Список литературы

- [1] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач*, Физматлит, Москва, 2008, 1024 с.
- [2] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра*, Деп. в ВИНТИ РАН 09.11.2015, № 184-В2015, Москва, 2015, 1153 с.
- [3] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия*, Деп. в ВИНТИ РАН 09.11.2015, № 185-В2015, Москва, 2015, 1320 с.
- [4] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач: аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы*, Деп. в ВИНТИ РАН 27.02.2017, № 18-В2017, Москва, 2017, 969 с.
- [5] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 5. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Элементарные*

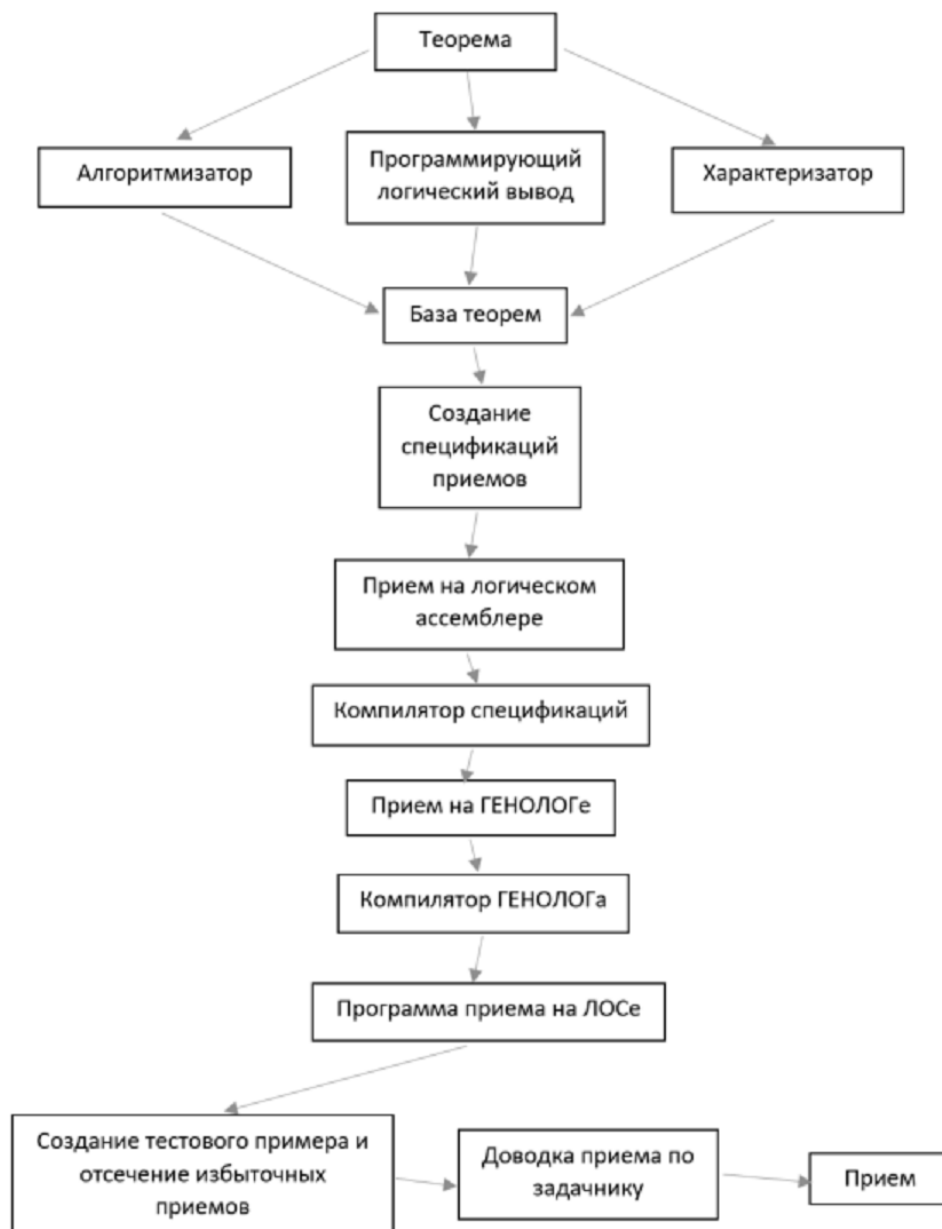


Рис. 1. Процесс алгоритмизации теорем.

физика и химия, шахматы, Деп. в ВИНТИ РАН 12.08.2019, № 66-B2019, Москва, 2019, 939 с.

- [6] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 6. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Понимание естественного языка и анализ рисунков*, Деп. в ВИНТИ РАН 12.08.2019, № 67-B2019, Москва, 2019, 758 с.
- [7] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 7. Автоматическое создание приемов логической системы: классификация приемов решателя; логический ассемблер; компилятор спецификаций; создание тестовых примеров и доводка приемов*, Деп. в ВИНТИ РАН 06.12.2021, № 65-B2021, Москва, 2021, 740 с.
- [8] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 8. Автоматическое создание приемов логической системы: база теорем; характеристика теорем; создание спецификаций приемов*, Деп. в ВИНТИ РАН 06.12.2021, № 66-B2021, Москва, 2021, 516 с.

About algorithmization of knowledge Podkolzin A.S.

This paper discusses the issues of computer modeling of problem solving processes and automatic creation of solver techniques. The architecture of the process of transition from theorems to techniques (algorithmization of knowledge), which has developed in the process of processing numerous examples, is described. A computer system has been created that allows solving problems from various branches of mathematics and is able to update its database of techniques.

Keywords: computer problem solver, logical system, artificial intelligence.

References

- [1] Podkolzin A. S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 1. Problem solver architecture and languages*, Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russian), 1024 pp.
- [2] Podkolzin A. S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 2. Experience in teaching a computer problem solver: logic tricks, set algebra, combinatorics and elementary algebra*, Deposited at VINITI, # 184-B2015, Moscow, 2015 (In Russian), 1153 pp.
- [3] Podkolzin A. S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 3. Experience in teaching a computer problem solver: mathematical analysis, differential equations and elementary geometry*, Deposited at VINITI, # 185-B2015, Moscow, 2015 (In Russian), 1320 pp.
- [4] Podkolzin A. S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 4. Experience in teaching a computer problem solver: analytical geometry, linear algebra, probability theory, complex analysis and other sections*, Deposited at VINITI, # 18-B2017, Moscow, 2017 (In Russian), 969 pp.
- [5] Podkolzin A. S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 5. Experience in teaching a computer problem solver: elementary physics and chemistry, chess*, Deposited at VINITI, # 66-B2019, Moscow, 2019 (In Russian), 939 pp.

- [6] Podkolzin A.S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 6. Experience in teaching a computer problem solver: natural language understanding and pattern analysis*, Deposited at VINITI, # 67-B2019, Moscow, 2019 (In Russian), 758 pp.
- [7] Podkolzin A.S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 7. Automatic creation of logic system techniques: classification of solver techniques; logical assembler; compiler of specifications; creating test cases and fine-tuning techniques*, Deposited at VINITI, # 65-B2021, Moscow, 2021 (In Russian), 740 pp.
- [8] Podkolzin A.S., *Computer modelling of logical processes. Vol. 8. Automated creation of logical system devices: theorem database, theorem characterization, creation of device specifications*, Deposited at VINITI, # 66-B2021, Moscow, 2021 (In Russian), 516 pp.

Классификация регулярных графов трёхточечных множеств

В. В. Промыслов¹

Регулярным графом кольца матриц над полем называется граф, множеством вершин которого являются невырожденные матрицы, а ребра соединяют в точности те вершины, сумма которых является вырожденной матрицей.

В 2009 году на 22-ой Британской конференции по комбинаторике был сформулирован вопрос о конечности хроматического числа этого графа. Этот вопрос остается открытым для полей характеристики 0.

Для исследования этого вопроса в статье [4] было введено определение регулярного графа множества, обобщающее понятие регулярного графа кольца матриц. Между этими понятиями присутствует тесная связь. Например, в случае, если хроматическое число регулярного графа окружности на евклидовой плоскости бесконечно, то таковым будет и хроматическое число регулярного графа кольца матриц порядка выше двух.

В этой работе исследована структура регулярных графов множеств из трех элементов, а сами графы классифицированы с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: регулярный граф кольца матриц, классификация графов с точностью до изоморфизма.

1. Введение и необходимые определения

Пусть \mathbb{F} — некоторое поле, $M_n(\mathbb{F})$ — кольцо матриц размера $n \times n$ над полем \mathbb{F} , $GL_n(\mathbb{F})$ — множество невырожденных матриц.

Определение 1. *Регулярным графом кольца $M_n(\mathbb{F})$ называется граф $\Gamma_n(\mathbb{F})$ с множеством вершин $GL_n(\mathbb{F})$ такой, что различные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ соединены ребром, если и только если $\det(A + B) = 0$.*

В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было доказано, что если характеристика поля \mathbb{F} не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно (см. [1]). В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос (см. [2, задача 525, стр. 1082-1083]) о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. В 2015

¹Промыслов Валентин Валерьевич — аспирант каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: valentin.promyslov@gmail.com.

Promyslov Valentin Valeryevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

году И. Томон дал отрицательный ответ на поставленный вопрос (см. [3, теорема 2.4]) доказав, что при натуральном $n \geq 2$ и простом $p \geq 3$ выполнено $\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}_p})) = \infty$, где $\overline{\mathbb{F}_p}$ — алгебраическое замыкание поля \mathbb{F}_p из p элементов. Однако вопрос остается открытым для полей характеристики 0, в частности, для \mathbb{Q}, \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Для исследования этого вопроса в статье [4] было введено обобщение понятия регулярного графа для произвольного подмножества векторного пространства \mathbb{F}^n .

Определение 2. Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$. Регулярным графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Между регулярными графами кольца матриц и регулярными графами множеств существует тесная связь. Например, в случае, если хроматическое число регулярного графа окружности на евклидовой плоскости бесконечно, то таковым будет и хроматическое число регулярного графа кольца матриц порядка выше двух. Этот результат и некоторые свойства регулярного графа множества описаны в статье [4].

В этой работе мы займемся классификацией регулярных графов конечного множества точек. Для этого введем следующее определение:

Определение 3. Пусть \mathbb{F} — поле характеристики 0, n, m — натуральные числа. Обозначим через $\Gamma^n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

2. Регулярные графы трёхточечных множеств на прямой

В этой секции мы классифицируем графы $\Gamma^1(a, b, c)$ с точностью до изоморфизма. Везде ниже мы полагаем, что поле \mathbb{F} имеет характеристику 0.

Лемма 1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$.

В поле \mathbb{F} нулевой характеристики всегда можно выделить подкольцо целых чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Z} , и подполе рациональных чисел, которое мы отождествим с \mathbb{Q} .

Лемма 2. При $f_1, f_2 \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ графы $\Gamma^1(0, 1, f_1)$ и $\Gamma^1(0, 1, f_2)$ изоморфны.

Доказательство этой леммы опирается на существование базиса Гамеля поля \mathbb{F} над \mathbb{Q} .

Учитывая наличие порядка на множестве рациональных чисел, мы можем считать, что при $q \in \mathbb{Q}$ граф $\Gamma^1(0, 1, q)$ изоморфен графу $\Gamma^1(0, 1, q')$ для некоторого $q' \in \mathbb{Q}$, $q > 1$.

Лемма 3. *Графы $\Gamma^1(0, 1, q)$ не являются изоморфными при различных $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$.*

Леммы 1, 2 и 3 выше позволяют классифицировать графы $\Gamma^1(a, b, c)$ с точностью до изоморфизма.

Теорема 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда граф $\Gamma^1(a, b, c)$ изоморфен одному из следующих графов:*

- 1) $\Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$, причем все графы такого типа изоморфны;
- 2) $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, причем при различных q все графы такого типа попарно неизоморфны.

3. Регулярные графы трёхточечных множеств в \mathbb{F}^n

В этой секции мы переместим фокус на случай произвольной размерности, т. е. граф $\Gamma^n(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{F}^n$. Оказалось, что все компоненты связности этого графа, за исключением содержащих клику и вершины степени два, изоморфны графу Кэли (см., например, [5]) группы $S = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{abc})^2 = e \rangle$ симметрий $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ плоскости относительно точек a, b, c . Поскольку поле характеристики 0 бесконечно, этот факт позволил свести общий случай к регулярному графу на прямой:

Теорема 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}^n$ различны. Тогда граф $\Gamma^n(a, b, c)$ изоморфен графу $\Gamma^1(a', b', c')$ для некоторых $a', b', c' \in \mathbb{F}$.*

Тем самым мы получаем, что классификация графов в общем случае точно такая, как и в одномерном.

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Михалёву и А.М. Макаеву за интерес к задаче и помощь в работе.

Список литературы

- [1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari, “The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite”, *Linear Algebra and its Applications*, **431** (2009), 1715 - 1718.
- [2] P.J. Cameron, “Research problems from the BCC22”, *Discrete Math*, **311** (2011), 1074 - 1083.

- [3] I. Tomon, “On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras”, *Linear Algebra Appl*, **475** (2015), 154 - 162.
- [4] А.М. Максаев, В.В. Промыслов, “О тотальном и регулярном графах многочлена”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23:4** (2021), 113–140.
- [5] U. Knauer, K. Knauer, *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices, 2nd Rev. and Ext. ed.*, de Gruyter, 2015, 349 p pp.
- [6] Бунина Е., Михалев А., Пинус А, *Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр*, Издательство МЦНМО, Москва, 2015

Classification of regular graphs of three-point sets Promyslov V.V.

A regular graph of the ring of matrices over a field is a graph on the set of invertible matrices. Two matrices are connected with an edge if and only if their sum is singular.

One of the questions in this field is whether the chromatic number of this graph is finite or not. This question was first formulated in 2009 at the 22nd British Conference on Combinatorics. It remains open for the fields of the characteristic 0.

To investigate this issue in the article [4] was introduced a definition of a regular graph of a set. The regular graph of a set generalizes the concept of the regular graph of the matrix ring. There is a close connection between these concepts. For example, if the chromatic number of a regular graph of a circle on the Euclidean plane is infinite, then so will be the chromatic number of a regular graph of the matrix ring of order higher than two.

In this paper, we investigate the structure of regular graphs of sets of three elements and classify the graphs up to isomorphism.

Keywords: regular graph of the matrix ring, classification of graphs up to isomorphism.

References

- [1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari., “The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite”, *Linear Algebra and its Applications*, **431** (2009), 1715 - 1718
- [2] P.J. Cameron., “Research problems from the BCC22”, *Discrete Math*, **311** (2011), 1074 - 1083
- [3] I. Tomon, “On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras”, *Linear Algebra Appl*, **475** (2015), 154 - 162
- [4] А.М. Максаев, В.В. Промыслов, “On total and regular graphs of a polynomial”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **23:4** (2021), 113–140
- [5] U. Knauer, K. Knauer, *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices, 2nd Rev. and Ext. ed.*, de Gruyter, 2015, 349 p pp.

Об условиях полноты линейных автоматов над рациональными числами с добавками

Д. В. Ронжин¹

Представлены условия K -полноты и A -полноты автоматных систем с добавками в классе автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел.

Ключевые слова: конечные автоматы, линейные автоматы, рациональные числа, K -полнота, A -полнота.

1. Введение

Одной из классических задач теории автоматов является задача проверки полноты конечных автоматных систем по фиксированному набору операций – как правило, в качестве операций рассматриваются операции суперпозиции (Σ) и композиции (K)[1]. В силу того, что задача проверки полноты на множестве конечных автоматов оказывается алгоритмически неразрешимой[1], возникли различные подходы к дальнейшему исследованию задачи. Ряд исследований был направлен на изучение альтернативных операций замыкания[2] и на вопросы полноты автоматных систем с добавками[3], в то время как другое направление исследований посвящено рассмотрению проблемы проверки полноты в некоторых подклассах конечных автоматов. В частности подробно изучена задача полноты в классе линейных автоматов, функционирующих над произвольными конечными полями[4, 5], причем для всякого конечного поля представлена критериальная система для проверки A -полноты и K -полноты. Более того, в классе линейных автоматов задачи проверки A -полноты и K -полноты конечных систем оказываются алгоритмически разрешимыми.

Настоящая работа касается исследования вопросов полноты по операциям композиции и A -замыкания линейных автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел[6]. Ранее автором исследованы вопросы полноты в классе линейных автоматов, функционирующих над

¹Ронжин Дмитрий Владимирович — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, преподаватель математики в ОАНО "Новая школа e-mail: d.v.ronzhin@gmail.com.

Ronzhin Dmitry Vladimirovich — graduated from Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, math teacher at non-profit organization "New School".

кольцом двоично-рациональных чисел [7, 8], где в терминах предполных классов получены условия полноты для автоматных систем с добавками. В классе автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел доказан ряд утверждений, касающихся задачи полноты, в частности доказано отсутствие конечных K -полных систем, а также наличие нетривиальных бесконечных Σ -полных систем.

2. Постановка задачи

Поле рациональных чисел обозначим через \mathbb{Q} . $\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы [1] с входным алфавитом \mathbb{Q}^l , выходным алфавитом \mathbb{Q} и алфавитом состояний \mathbb{Q}^k , функции переходов и выходов являются линейными [4, 5]. Данное множество будем называть множеством линейных автоматов над полем рациональных чисел, и обозначим $L(\mathbb{Q})$ [6].

Для описания функционирования линейных автоматов удобно использовать аппарат формальных степенных рядов. Определим множество формальных степенных рядов над \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q}^\infty(\xi) = \left\{ \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \mid a_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

Степенным рядам ставятся в соответствие сверхслова на входах и выходе автоматов. Сложение и умножение элементов из $\mathbb{Q}^\infty(\xi)$ определяется естественным образом.

Кольцо многочленов над \mathbb{Q} будем обозначать $\mathbb{Q}[\xi]$, а для обозначения того, что многочлены $P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi]$ взаимно просты будем использовать запись $\gcd(P(\xi), Q(\xi)) = 1$.

Определим множество дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из \mathbb{Q} следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}) = \left\{ \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}[\xi], Q(0) = 1, \gcd(P(\xi), Q(\xi)) = 1 \right\}$$

Для автоматов в классе $L(\mathbb{Q})$ верны следующие леммы о представлении [6]:

Лемма 1. $\forall V(x_1, \dots, x_l) \in L(\mathbb{Q}), \exists R_0, R_1, \dots, R_l \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}),$ такие что:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i.$$

Лемма 2. $\forall V(x_1, \dots, x_l): (\mathbb{Q}^\infty)^l \rightarrow \mathbb{Q}^\infty,$ такого что:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i$$

$$R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}), i \in [0, l]$$

верно, что $V(x_1, \dots, x_l) \in L(\mathbb{Q})$.

Таким образом, линейные автоматы из $L(\mathbb{Q})$ реализуют отображения:

$$\forall V \in L(\mathbb{Q}), \exists l \in \mathbb{N}, V(x_1, \dots, x_l): (\mathbb{Q}^\infty)^l \rightarrow \mathbb{Q}^\infty$$

Множители R_k будем называть коэффициентами отображения, причем через $R_k[\tau]$ будем обозначать коэффициенты при ξ^τ формальных степенных рядов R_k . Будем говорить, что автомат $V(x_1, \dots, x_l) \in L(\mathbb{Q})$ непосредственным образом зависит от $x_i, i \in [1, l]$, если R_i в приведенном виде не кратен ξ . Линейный автомат называется существенным, если он представляет собой отображение с не менее чем двумя непосредственными входами.

Система линейных автоматов $M \subset L(\mathbb{Q})$ будет называться A -полной [2], если $\forall V \in L(\mathbb{Q})$ и $\forall \tau \in \mathbb{N}$, в $K(M)$ существует автомат V' , совпадающий с автоматом V на словах длины τ . A - замыкание системы M будем обозначать через $A(M)$.

3. Результаты

Пусть $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – существенный линейный автомат из $L(\mathbb{Q})$. Справедливы следующие условия полноты систем автоматов в $L(\mathbb{Q})$ с добавками:

Теорема 1. Пусть $V^{(1)}$ – все линейные автоматы из $L(\mathbb{Q})$ арности не более 1. Тогда $K(\{V(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \cup V^{(1)}) = L(\mathbb{Q})$.

Теорема 2. Пусть $V^{(1,1)} = \{R_1 \cdot x, x + R_2 | R_1[0] = c_1, R_2[0] = c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}$. Тогда $A(\{V(x_1, x_2, \dots, x_n), \xi \cdot x\} \cup V^{(1,1)}) = L(\mathbb{Q})$.

Автор выражает признательность своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту кафедры МаТИС Часовских Анатолию Александровичу за помощь в постановке и решении задачи.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.
- [2] Буевич В.А., “О полноте, A -полноте и t -полноте в классе автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, **10:1-4** (2006), 613–638

- [3] Бабин Д.Н., Летуновский А.А., “О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19:3** (2015), 15–22
- [4] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27:2** (2015), 134–151
- [5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26:2** (2016), 89–104
- [6] Ронжин Д.В., “Линейные автоматы над полем рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:4** (2017), 144–155
- [7] Ронжин Д.В., “Об условиях A -полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами”, *Дискретная математика*, **32:2** (2020), 45–62
- [8] Ронжин Д.В., “Распознавание A -полноты конечных систем линейных автоматов с добавками над кольцом двоично-рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:1** (2021), 149–163

Conditions of completeness for linear automata systems over the field of rational numbers with additives

Ronzhin Dmitry Vladimirovich

Conditions for K -completeness and A -completeness for linear automata systems, functioning over the field of rational numbers are described.

Keywords: finite state automata, linear automata, rationals, K -completeness, A -completeness.

References

- [1] Kudryavcev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985, 320 с.
- [2] Buyevich V.A., “About completeness, A -completeness and t -completeness in the class of automata mappings.”, *Intellectual systems.*, **10:1-4** (2006), 613–638
- [3] Babin D.N., Letunovskiy A.A., “About superposition potential, with having boolean functions and delay element as an addition to basis.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **19:3** (2015), 15–22
- [4] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics*, **27:2** (2015), 134–151
- [5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions.”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26:2** (2016), 89–104
- [6] Ronzhin D.V., “Linear automata over the field of rational numbers.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **21:4** (2017), 144–155
- [7] Ronzhin D.V., “About A -completeness conditions for the automata over dyadic rationals.”, *Discrete Mathematics*, **32:2** (2020), 45–62
- [8] Ronzhin D.V., “ A -completeness recognition for finite systems with additives of linear automata over the ring of dyadic rationals.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **25:1** (2021), 149–163

Поиск отклонений от типичных сценариев использования веб-приложений

А. А. Хашаев¹, И. Ю. Терёхина², Д. Ю. Гамаюнов³

В работе исследуется задача поиска отклонений от известных сценариев типичного использования веб-приложений. Рассмотрена модификация существующей формальной постановки задачи, для которой предложена рекуррентная процедура проверки соответствия трассы шаблону. Разработан алгоритм обнаружения аномалий в трассе, эффективный относительно длины трассы и размера шаблона.

Ключевые слова: поиск аномалий, ациклический ориентированный граф, анализ последовательностей событий

1. Введение

Поиск отклонений от типичных сценариев использования веб-приложения является актуальной задачей информационной безопасности, которая может быть решена как с помощью детерминированных алгоритмов, так и с помощью алгоритмов машинного обучения [1, 2, 3, 4, 5]. В данной работе предлагается модификация формальной задачи, предложенной, например, в работе [6], для эффективного обнаружения аномалий в реальном времени.

Сценарии использования некоторого веб-приложения пользователем представляют собой многоступенчатые процессы, каждый из которых состоит из последовательности пользовательских действий, связанных между собой отношением частичного порядка по времени их выполнения. Некоторые действия являются пререквизитами к выполнению других действий, и в корректных сценариях использования веб-приложения ряд пользовательских действий может выполняться лишь в определенном порядке.

¹*Хашаев Артур Акрамович* — директор по разработке, SolidWall.io, e-mail: arthur.khashaev@solidwall.io.

Кhashaev Artur Akramovich — SolidWall.io.

²*Терёхина Ирина Юрьевна* — программист, SolidWall.io, e-mail: irina.terekhina@solidwall.io.

Teryokhina Irina Yurevna — SolidWall.io.

³*Гамаюнов Денис Юрьевич* — к.ф.-м.н., доц. кафедры информационной безопасности ф-та ВМК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, e-mail: gamajun@seclab.cs.msu.ru.

Gamayunov Denis Yurevich — Lomonosov Moscow State University.

Предполагается, что построена (обучена) некоторая модель, позволяющая получить множество сценариев типичного использования веб-приложения. Необходимо на этапе защиты веб-приложения в реальном времени проверять соответствие наблюдаемой последовательности пользовательских действий выявленным ранее наборам закономерностей.

2. Основные понятия и формулировка результата

Пусть известен набор возможных *действий* из некоторого конечного алфавита \mathcal{A} , которые может совершать пользователь при взаимодействии с веб-приложением. Последовательность действий $w \in \mathcal{A}^n$ будем называть *трассой*.

Определение 1. *Шаблон* называется размеченный конечный ациклический ориентированный граф без петель $\alpha = \langle V, \leq, g \rangle$, где V — множество вершин графа, \leq — отношение частичного порядка между вершинами из V , $g: V \rightarrow \mathcal{A}$ — функция разметки вершин графа действиями.

Отношение частичного порядка \leq шаблона α отражает временные отношения между парами выполняемых пользователем действий — упорядоченность пары вершин означает, что соответствующие действия должны быть упорядочены и в трассе.

Необходимо для наблюдаемой трассы $w \in \mathcal{A}^n$ понять, содержит ли данная трасса поведенческие аномалии. Типичные сценарии использования заданы некоторым конечным множеством шаблонов.

Определение 2. *Трасса* $w \in \mathcal{A}^n$ моделирует шаблон $\pi = \langle V, \leq, g \rangle$, $w \models \pi$, если существует функция соответствия $f: V \rightarrow [1; |w|]$ такая, что:

- 1) $\forall v \in V: w_{f(v)} = g(v)$ — каждой из вершин шаблона сопоставлено некоторое действие из трассы;
- 2) $\forall u, v \in V: u \leq v \implies f(u) \leq f(v)$ — свойство монотонности.

Задача, которая ставится в данной работе: пусть задан шаблон π и трасса $w \in \mathcal{A}^n$, необходимо проверить $w \models \pi$.

Решение задачи поиска аномалий, предложенное в работе [6], имеет экспоненциальную временную сложность. Отличием данной задачи от описанной является отсутствие требования инъективности функции f в определении моделирования шаблона трассой. Отказ от требования инъективности функции f может увеличивать количество шаблонов, которые будут моделироваться некоторой трассой. Однако данный факт не является критичным для рассматриваемой предметной области, так как

предполагается, что множество шаблонов, описывающих типичные сценарии пользователя является минимальным, полным и неизбыточным.

Обозначим $cut_\pi(v)$ — сужение исходного шаблона $\pi = \langle V, \leq, g \rangle$ на множество вершин, из которых существует путь в вершину $v \in V$.

Теорема 1. Пусть $w \in \mathcal{A}^n$, $x \in \mathcal{A}$, $\pi = \langle V, \leq, g \rangle$, $v \in V$. Тогда отношение \models допускает следующее индуктивное определение:

$$wx \models cut_\pi(v) \iff \left(w \models cut_\pi(v) \right) \vee \left(g(v) = x \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{u \in V: \\ u < v}} wx \models cut_\pi(u) \right)$$

Доказательство. Структурная индукция по π и w аналогично доказательству теоремы о вычислительной сложности проверки выполнимости LTL-формулы в конечной трассе в работе [7]. \square

Используя теорему 1, можно предложить следующий алгоритм поиска аномалий:

- Построение топологической сортировки $T(\pi) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ шаблона π .
- Если вычислено $w \models cut_\pi(v)$ для всех $v \in V$ и приходит новый запрос $x \in \mathcal{A}$, то вычисление $wx \models cut_\pi(v)$ для $v \in V$ происходит в порядке топологической сортировки T согласно теореме 1.

Данный алгоритм имеет временную сложность $O(|\leq| \cdot |w|)$.

Таким образом, изменение формальной постановки позволяет свести задачу поиска аномалий в конечной трассе к задаче выполнимости LTL-формулы в конечной трассе. Тем самым становится возможным построение алгоритма обнаружения аномалий в трассе, который является полиномиальным относительно длины трассы и размера шаблона.

Список литературы

- [1] Chattopadhyay, P., Wang, L., Tan, Y. P., “Scenario-based insider threat detection from cyber activities”, *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, **5**:3 (2018), 660–675.
- [2] Cauteruccio F. и др., “A framework for anomaly detection and classification in Multiple IoT scenarios”, *Future Generation Computer Systems*, **114** (2021), 322–335.
- [3] Sharma B., Pokharel P., Joshi B., “User Behavior Analytics for Anomaly Detection Using LSTM Autoencoder-Insider Threat Detection”, *Proceedings of the 11th International Conference on Advances in Information Technology*, 2020, 1–9.

- [4] Kamra A., Terzi E., Bertino E, “Detecting anomalous access patterns in relational databases”, *The VLDB Journal*, **17 5** (2008 Springer), 1063–1077.
- [5] Kruegel C., Vigna G., “Anomaly detection of web-based attacks”, Proceedings of the 10th ACM conference on Computer and communications security, 2003, 251–261.
- [6] Leemans M., van der Aalst W. M. P., “Discovery of frequent episodes in event logs”, International symposium on data-driven process discovery and analysis, 2014 Springer, 1–31.
- [7] Fionda V., Greco G., “The complexity of LTL on finite traces: Hard and easy fragments”, Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, **30 1** (2016).

On deviations from typical web application usage
Khashaev A.A., Teryokhina I.Yu., Gamayunov D.Yu.

The paper investigates the problem of finding deviations from the known scenarios of typical use of web applications. The modification of existing formal problem is considered, for which the recursive method for checking trace matching to a pattern is proposed. An algorithm for detecting anomalies in trace is developed, which is effective with respect to the trace length and the pattern size.

Keywords: anomaly detection, DAG, sequence analysis

References

- [1] Chattopadhyay, P., Wang, L., Tan, Y. P., “Scenario-based insider threat detection from cyber activities”, *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, **5:3** (2018), 660–675.
- [2] Cauteruccio F. et al., “A framework for anomaly detection and classification in Multiple IoT scenarios”, *Future Generation Computer Systems*, **114** (2021), 322–335.
- [3] Sharma B., Pokharel P., Joshi B, “User Behavior Analytics for Anomaly Detection Using LSTM Autoencoder-Insider Threat Detection”, Proceedings of the 11th International Conference on Advances in Information Technology, 2020, 1–9.
- [4] Kamra A., Terzi E., Bertino E, “Detecting anomalous access patterns in relational databases”, *The VLDB Journal*, **17 5** (2008 Springer), 1063–1077.
- [5] Kruegel C., Vigna G., “Anomaly detection of web-based attacks”, Proceedings of the 10th ACM conference on Computer and communications security, 2003, 251–261.
- [6] Leemans M., van der Aalst W. M. P., “Discovery of frequent episodes in event logs”, International symposium on data-driven process discovery and analysis, 2014 Springer, 1–31.
- [7] Fionda V., Greco G., “The complexity of LTL on finite traces: Hard and easy fragments”, Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, **30 1** (2016).

Построение 1,2-простых квазигрупп, изотопных заданным

С. С. Чаплыгина¹

В работе приводится алгоритм получения изотопными преобразованиями простой квазигруппы из некоторой заданной квазигруппы. Также доказывается, что алгоритм имеет квадратичную сложность и что полученная в результате квазигруппа не содержит собственных подквазигрупп. Приведен пример реализации алгоритма на языке Python.

Ключевые слова: квазигруппа, простота квазигруппы, подквазигруппа, изотопность квазигрупп, латинский квадрат.

1. Введение

Конечные квазигруппы (или латинские квадраты, если их рассматривать в терминах таблиц Кэли) вызывают интерес у различных исследователей в области криптографии и кодирования (см., например, [1]). Для исследователей зачастую важны квазигруппы, которые обладают некоторыми особыми свойствами. Одним из желательных свойств является полиномиальная полнота [2], обеспечивающая NP-полноту задачи проверки разрешимости уравнений [3]. Известно, что полиномиальная полнота эквивалента одновременной простоте и неаффинности [4]. Еще одним важным свойством является отсутствие собственных подквазигрупп или собственных подквазигрупп порядка не меньшего 2, что отражено в работе [5]. В работе Т. Кепки [6] доказано, что любую конечную квазигруппу порядка > 2 с помощью изотопий можно перевести в квазигруппу, не имеющую собственных подквазигрупп, или в квазигруппу, не имеющую собственных подквазигрупп порядка ≥ 2 и одновременно простую.

В данной работе излагается квадратичный алгоритм преобразования произвольной квазигруппы порядка > 2 в изотопную квазигруппу, не имеющую собственных подквазигрупп, созданный на основе работы Т. Кепки [6]. Кроме того, показывается, что результирующая квазигруппа является простой.

Автор выражает искреннюю благодарность к.ф.-м.н., с.н.с. Галатенко Алексею Владимировичу за постановку задачи и поддержку в работе.

¹ Чаплыгина Светлана Сергеевна — студент 3 курса каф. МаТИС мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: Svetlana.Chaplygina@student.msu.ru.

Chaplygina Svetlana Sergeevna — 3rd year student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of MaTIS.

2. Основные понятия и результаты

В дальнейшем все структуры будут полагаться конечными, поэтому для краткости слово “конечный” будет опускаться.

Определение 1. *Квазигруппой порядка $k \in \mathbb{N}$ называется такое множество $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ с бинарной операцией $\cdot : Q \times Q \rightarrow Q$, что для любых $a, b \in Q$ уравнения $x \cdot a = b$ и $a \cdot y = b$ однозначно разрешимы.*

Таблицы Кэли квазигрупп являются латинскими квадратами, и наоборот, любой латинский квадрат является таблицей Кэли квазигруппы.

Определение 2. *Собственной подквазигруппой квазигруппы (Q, \cdot) называется пара (Q', \cdot') , где Q' — собственное подмножество Q , замкнутое относительно \cdot , а операция \cdot' является сужением \cdot на $Q' \times Q'$.*

В дальнейшем для краткости будем отождествлять собственные подквазигруппы с множеством Q' .

Без ограничения общности можно считать, что $Q = \{0, \dots, k-1\}$, а операция \cdot есть функция k -значной логики от двух переменных.

Определение 3. *Квазигруппа (Q, \cdot) называется полиномиально полной, если $[\{\cdot\} \cup P_k^0] = P_k$, где P_k^0 — множество всех констант.*

Определение 4. *Квазигруппа (Q, \cdot) называется простой (или в терминах работы [6], 1-простой), если операция \cdot не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.*

Определение 5. *Квазигруппа (Q, \cdot) называется аффинной, если существует абелева группа $(Q, +)$, автоморфизмы α и β этой группы и константа $c \in Q$, для которых выполнено тождество $x \cdot y \equiv \alpha(x) + \beta(y) + c$.*

В работе [6] использовались следующие понятия.

Определение 6. *Квазигруппа (Q, \circ) называется 2-простой, если она не содержит собственных подквазигрупп, и 3-простой, если она не содержит собственных подквазигрупп порядка ≥ 2 .*

Определение 7. *Квазигруппа (Q, \circ) называется левой (правой) лупой, если существует такой элемент $j \in Q$, что для любого $x \in Q$ выполнено равенство $j \cdot x = x$, $(x \cdot j = x, \text{ соответственно})$. Если существует $j \in Q$, такой что $j \cdot x = x \cdot j = x$ для любого $x \in Q$, то квазигруппа называется лупой.*

Определение 8. *Квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ будем называть изотопными, если существуют перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на Q , для которых выполнено $\forall x, y \in Q: x \cdot y = \sigma_3^{-1}(\sigma_1(x) \circ \sigma_2(y))$.*

В терминах таблиц Кэли это означает возможность преобразования одной таблицы в другую перестановкой строк, столбцов, а также переименованием элементов.

Рассмотрим следующий алгоритм для квазигруппы $Q(\cdot)$ порядка n .

Перестановкой строк и столбцов добьемся преобразования данной квазигруппы $Q(\cdot)$ в лупу $Q(\star)$. Затем сделаем циклический сдвиг строк $1, 2, \dots, n-1 \rightarrow 2, 3, \dots, n-1, 1$, первая строка (то есть строка 0) остается на месте. Наконец, переставим столбцы 0 и 1.

Данный алгоритм является алгоритмизацией (с сужением на конечный случай) доказательства утверждений из работы [6]. Элементарными операциями считаются чтение из памяти или запись в память элемента из множества $Q = E_k$, а также арифметические операции на \mathbb{Z}_k .

Основным результатом данной работы являются утверждения:

Теорема 1. *Выходом алгоритма является 2-простая квазигруппа, изотопная входной квазигруппе. Временная сложность алгоритма есть $O(k^2)$ при $k \rightarrow \infty$.*

Теорема 2. *Квазигруппа, полученная в результате алгоритма, является простой, то есть не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.*

Так как все квазигруппы порядка 3 аффинны, в случае $k = 3$ на выходе алгоритма могут возникать аффинные квазигруппы, то есть квазигруппы, не являющиеся полиномиально полными.

Алгоритм был реализован на языке программирования Python и протестирован на наборе квазигрупп различного порядка. Время работы программы квадратично зависело от порядка входных квазигрупп.

Код реализации можно найти на github под открытой MIT лицензией (<https://github.com/Rinroli/simple-quasigroups>). Там же находятся небольшая документация и примеры.

3. Заключение

В работе был построен квадратичный алгоритм получения с помощью изотопии одновременно простой и 2-простой квазигруппы из некоторой заданной. Этот алгоритм был программно реализован и протестирован на наборе квазигрупп различного порядка. Проведенные эксперименты показали, что время работы программы квадратично зависит от порядка квазигрупп.

В дальнейшем планируется обобщить результаты на структуры более высоких размерностей.

Список литературы

- [1] Chauhan D., Gupta I., Verma R., “Quasigroups and their applications in cryptography”, *Cryptologia*, **45**:3 (2021), 227-265.
- [2] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S.K., “On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts”, *Quasigroups and Related Systems*, **21**:2 (2013), 117–130.
- [3] G. Horváth, C.L. Nehaniv, Cs. Szabó, “An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness”, *Theoretical Computer Science*, **407** (2008), 591–595.
- [4] Hagemann J. and Herrmann C., “Arithmetical locally equational classes and representation of partial functions”, *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai*, **29** (1982), 345–360.
- [5] Галатенко А.В., Панкратьев А.Е., Староверов В.М., “Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп”, *Чебышевский сборник*, **22**:2 (2021), 76–89.
- [6] Кепка Т., “A note on simple quasigroups”, *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica.*, **19**:2 (1978), 59–60.

Construction of 1,2-simple quasigroups isotopic to the given ones Chaplygina S.S.

The paper provides an algorithm for obtaining a simple quasigroup from a given one in isotopic way, proves that the algorithm has quadratic complexity and that the result doesn't contain proper subquasigroups. Python implementation of the algorithm is given.

Keywords: quasigroup, simplicity of quasigroup, subquasigroup, isotropy of quasigroups, Latin square.

References

- [1] Chauhan D., Gupta I., Verma R., “Quasigroups and their applications in cryptography”, *Cryptologia*, **45**:3 (2021), 227-265.
- [2] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Gangopadhyay S., Pal S.K., “On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts”, *Quasigroups and Related Systems*, **21**:2 (2013), 117–130.
- [3] G. Horváth, C.L. Nehaniv, Cs. Szabó, “An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness”, *Theoretical Computer Science*, **407** (2008), 591–595.
- [4] Hagemann J. and Herrmann C., “Arithmetical locally equational classes and representation of partial functions”, *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai*, 1982, № 29, 245–360.
- [5] Galatenko A.V., Pankratiev A.E., Staroverov V.M., “An algorithm for checking the existence of subquasigroups”, *Chebyshevskii sbornik*, **22**:2 (2021), 76–89 (In Russian).
- [6] Кепка Т., “A note on simple quasigroups”, *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica.*, **19**:2 (1978), 59–60.

Классы линейных автоматов над конечными полями с операциями суперпозиции

А. А. Часовских¹

Для классов линейных автоматов над конечными полями найдены все предполные классы по операциям суперпозиции.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, операции суперпозиции, полнота, предполный класс, конечное поле.

Как известно, конечное поле E_k из k элементов существует, если $k = p^m$ для некоторого простого числа p и натурального числа m [1]. Мы будем использовать понятие линейного автомата над полем E_k из книги [2], и рассматривать только автоматы с одним выходом вместе с операциями суперпозиции [3], которые включают переименование переменных, отождествление переменных и подстановку одного автомата на вход другого автомата. При этом автоматы, отличающиеся только фиктивными входами, мы называем равными, и считаем, что, построив какой-то автомат, мы получаем все равные ему автоматы.

Линейные автоматы над полем E_k получаем замыканием множества, состоящего из сумматора, усилителей и задержек, с использованием операций суперпозиции и обратной связи [4]. Операцию обратной связи в дальнейшем мы не используем. Линейный автомат над полем E_k с n входами является функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, переменные которой принимают значения формальных степенных рядов с коэффициентами из E_k , а значения вычисляются в соответствии с равенством:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \mu_0, \quad (1)$$

где μ_i – формальные ряды переменной ξ , коэффициенты которых образуют периодическую (с предпериодом) последовательность и могут быть заданы отношениями многочленов над тем же полем, знаменатели которых имеют ненулевой свободный член.

Класс линейных автоматов над полем E_k с операциями суперпозиции обозначаем LS_k . Мы используем это обозначение и для множества всех линейных автоматов над полем E_k .

¹ Часовских Анатолий Александрович — доцент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: chasovskikh@mail.ru.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Для простых k в классах LS_k в [5] были найдены все максимальные собственные подклассы (предполные классы). Здесь соответствующая задача решена для классов линейных автоматов над полями, не являющимися простыми.

Множество всех линейных автоматов над E_k , сохраняющих элемент a поля E_k в начальный момент времени, обозначаем T_a . Множество всех автоматов из LS_k , значение которых в начальный момент зависит не более чем от одного входа, обозначаем V_1 . Автоматы f из LS_k , для которых из (1) следует $\sum_{i=1}^n \mu_i(0) = 1$, составляют множество V_k .

Как отмечалось, мы рассматриваем случай $k = p^m$ с $m > 1$. Известно [1], что в этом случае поле E_k содержит максимальные собственные подполя: E_{k_s} , $s = 1, 2, \dots, l$. Через P_s обозначим множество автоматов из LS_k , все коэффициенты при переменных которых в разложении (1) имеют свободный член из E_{k_s} .

Множество M_1 составляют автоматы из LS_k , значение выхода которых в момент времени, следующий за начальным, не зависят от значений входов в начальный момент. Через M_0 обозначим множество автоматов f , для которых в разложении (1) для каждого коэффициента при переменной степень его числителя не превосходит степени знаменателя. Пронумеруем все неприводимые приведенные многочлены из $E_k[\xi]$ натуральными числами: p_1, p_2, \dots так, что $p_1 = \xi$. Через M_i обозначим множество всех автоматов f из LS_k , знаменатели коэффициентов при переменных в разложении (1) которых не делятся на p_i , $i = 2, 3, \dots$

Теорема 1. *Множество*

$$JS_k = \{ T_a, V_k, V_1, P_s, M_i \mid a \in E_k, s \in \{1, \dots, l\}, i \in \mathbb{Z}_+ \}$$

состоит из предполных классов в LS_k , содержит все такие классы и является приведенной S -критериальной системой [3].

Доказательство. Для автомата f с разложением (1) положим: $U(f) = \{\mu_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Для множества M , $M \subseteq LS_k$, через $U(M)$ обозначим множество $\cup_{f \in M} U(f)$.

Замыкание множества M , $M \subseteq LS_k$, по операциям суперпозиции обозначаем $S(M)$, а замыкание множества M отношений многочленов по операциям сложения и умножения обозначаем $S^{(1)}(M)$. Через $E'_k(\xi)$ мы обозначаем множество всех отношений многочленов переменной ξ с коэффициентами из поля E_k , знаменатели которых имеют ненулевой свободный член.

Замкнутость каждого класса из JS_k доказывается индукцией по операциям суперпозиции. То, что ни один класс из JS_k не содержится в другом, несложно доказать, предъявив для каждого класса Θ из JS_k его подмножество, не содержащееся ни в каком другом классе из JS_k .

Пусть $M \subseteq LS_k$ и для любого Θ , $\Theta \in JS_k$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$. Покажем, что выполнено:

$$S(M) = LS_k. \quad (2)$$

Используя доказательство теоремы 3 из [6], нетрудно показать, что $S^{(1)}(U(M)) = E'_k(\xi)$. Отсюда и из доказательства леммы 2 этой же работы получаем:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \in S(M), \quad (3)$$

и для любого μ , $\mu \in E'_k(\xi)$, выполнено:

$$x_0 + \mu x_1 + \mu x_2 + \dots + \mu x_p \in S(M), \quad (4)$$

Из соотношений (3), (4) и $M \setminus V_k \neq \emptyset$ следует, что $S(M)$ содержит автомат с одним входом $g(x) = \mu'x + \mu'_0$, для которого выполнено: $\mu'(0) = 0$. В M входит автомат h , не сохраняющий $\mu'_0(0)$ в начальный момент времени. Тогда для одноместного автомата $g'(x) = h(g(x), \dots, g(x))$ имеем: $g'(x) = \mu''x + \mu''_0$, $\mu''(0) = 0$, $\mu''_0(0) \neq \mu'_0(0)$.

Из сумматора $x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1}$, автоматов $g(x)$ и $g'(x)$, и (при подходящем μ) автомата $x_0 + \mu x_1 + \mu x_2 + \dots + \mu x_p$ с использованием операций суперпозиции строится автомат $\tilde{g}(x) = \tilde{\mu}x + \tilde{\mu}_0$, для которого выполнены равенства: $\tilde{\mu}(0) = 0$, $\tilde{\mu}_0(0) = 0$.

Подставляя вместо всех переменных автомата из M , не сохраняющего 0 в начальный момент времени, автомат $\tilde{g}(x)$, получаем автомат $\tilde{\tilde{g}}(x) = \tilde{\tilde{\mu}}x + \tilde{\tilde{\mu}}_0$, для которого выполнены соотношения: $\tilde{\tilde{\mu}}(0) = 0$, $\tilde{\tilde{\mu}}_0(0) \neq 0$.

Обозначим через r число $\deg(\tilde{\mu}_0) + \deg(\tilde{\tilde{\mu}}_0)$. Используя рассуждения из доказательства леммы 3 работы [7], можно показать, что, из множества автоматов

$$\{x_0 + a_1 \xi x_{1,1} + \dots + a_1 \xi x_{1,p} + \dots + a_r \xi^r x_{r,1} + \dots + a_r \xi^r x_{r,p} | a_i \in E_k\},$$

которое входит в $S(M)$ ввиду (4), и автоматов $\tilde{g}(x)$, $\tilde{\tilde{g}}(x)$, используя операции суперпозиции, для некоторой дроби $\hat{\mu}$ можно построить автомат $\xi \hat{\mu}x$.

Далее, обобщая доказательство леммы 4 из той же работы, получаем: $0 \in S(M)$. Отсюда и из (3), (4), $\tilde{\tilde{g}}(x) \in S(M)$ получаем (2). Тем самым доказана S -критериальность множества замкнутых классов JS_k [3].

Предполнота каждого класса множества JS_k и отсутствие предполных классов, не содержащихся в JS_k доказываются с использованием известных общих рассуждений [4]. \square

Список литературы

- [1] Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, «Мир», Москва, 1988, 425 с.
- [2] Гилл А., *Линейные последовательностные машины*, «Наука», Москва, 1974, 288 с.
- [3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.
- [4] Часовских А.А., “Максимальные подклассы в классах линейных автоматов над конечными полями”, *Дискретная математика*, **31**:4 (2019), 88–101
- [5] Часовских А.А., “Классы линейных р-автоматов с операциями суперпозиций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:2 (2021), 155–156
- [6] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 134–151
- [7] Часовских А.А., “Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиций”, *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2013, №8, 3–13

Linear automata classes over finite fields with superposition operations Chasovskikh A.A.

All precomplete classes are found for classes of linear automata over finite fields with superposition operations.

Keywords: finite automaton, linear automaton, operation of superposition, completeness, maximum subclass, finite field.

References

- [1] Lidl R., Niederreiter H., *Finite fields*, «Mir», Moscow, 1988, 425 с.
- [2] Gill A., *Linear sequential circuits*, «Science», Moscow, 1974, 288 с.
- [3] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, «Science», Moscow, 1985, 320 с.
- [4] Chasovskikh A.A., “Maximum subclasses in classes of linear automata over finite fields”, *Discrete Math*, **31**:4 (2019), 88–101
- [5] Chasovskikh A.A., “Linear p-automata classes with superposition operations”, *Intelligent systems*, **25**:2 (2021), 155–156
- [6] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Math*, **27**:2 (2015), 134–151
- [7] Chasovskikh A.A., “Linear automata functions with superposition operations”, *Neurocomputers: development, application*, 2013, №8, 3–13

Часть 3.
Интеллектуальный анализ
больших данных

Задача распределения полочного пространства с учетом вариантов положения товаров

Н. М. Адрианов¹, Е. С. Черняховская²

Мы формулируем задачу распределения полочного пространства с учетом разных вариантов размещения товаров (возможность боковой ориентации, каппинги и нестинги). Представлен способ линеаризации нелинейных ограничений, возникающих в такой постановке. Данная методика позволяет найти оптимальное решение задачи, в том числе и для больших объемов входных данных.

Распределение полочного пространства (РПП, shelf space allocation, SSA) является одним из важнейших процессов принятия решений в розничной торговой сети. Комплексные подходы к распределению полочного пространства с одной стороны направлены на компетентное использование торговой площади и максимизации продаж, с другой – на привлечение внимания покупателей и увеличение количества незапланированных покупок ([1]). Правильное размещение товаров на полках влияет на продажи ([2]).

Фейсинги, каппинги и нестинги. *Фейсингом* называется видимая для покупателей единица товара на полке. Задача РПП формулируется так: дан набор товаров, которые необходимо разместить на определенном количестве полок торгового оборудования с целью получения максимальной прибыли. Стандартные ограничения задачи: длина полки, количество фейсингов, целочисленность фейсингов, количество полок для расположения товара, запас товара ([3], [4]).

В настоящей работе мы добавляем в модель возможность боковой ориентации некоторых товаров, а также следующие опции размещения: *каппинги* – некоторые товары разрешается класть сверху в горизонтальном положении, *нестинги* – некоторые товары допускается вкладывать в аналогичные, см. рис. 1.

¹Адрианов Николай Михайлович — МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, старший научный сотрудник, e-mail: nadrianov@gmail.com.

Adrianov Nikolai — Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, senior researcher.

²Черняховская Екатерина Сергеевна — Вроцлавский университет экономики и бизнеса, ассистент, e-mail: katernyna.czerniachowska@ue.wroc.pl.

Czerniachowska Katernyna — Wrocław University of Economics and Business, assistant.

Мы используем кальку англоязычных терминов (facings, cappings, nestings), поскольку именно в таком виде они прочно вошли в профессиональную лексику, а их русскоязычные аналоги отсутствуют.

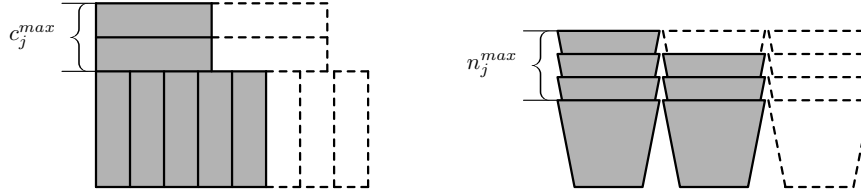


Рис. 1. Каппинги и нестинги

Формулировка задачи. Пусть S – количество полок, и для каждой полки заданы: ширина s_i^w , глубина s_i^d , высота s_i^h . Ориентацию товара будем задавать индексом r : $r = 0$ – прямая, $r = 1$ – боковая. Пусть P – количество товаров, и для каждого товара заданы: p_{jr}^w – ширина в положении r , высота p_j^h , высота нестинга p_j^n , запас товара p_j^s , прибыль (маржа) p_j^u , и p_j^o – признак возможности боковой ориентации (если $p_j^o = 0$, то поворачивать товар запрещено).

Пусть f_j^{min} , f_j^{max} , c_j^{max} , n_j^{max} – минимальное количество фейсингов, максимальное количество фейсингов, каппингов и нестингов для товара j соответственно. Высота полки накладывает дополнительное ограничение, поэтому количество каппинг-слоев товара j в положении r на полке i ограничено величиной

$$c_{ijr}^{max} = \min \left(c_j^{max}, (s_i^h - p_j^h) / p_{jr}^w \right),$$

а количество нестингов товара j – величиной

$$n_{ij}^{max} = \min \left(n_j^{max}, (s_i^h - p_j^h) / p_j^n \right).$$

Переменные: $\alpha_j \in \{0, 1\}$ – положение товара, x_{ijr} , y_{ijr} , $z_{ijr} \in \mathbb{Z}_+$ – количество фейсингов, каппингов и нестингов, а \bar{y}_{ijr} – количество стопок каппингов для товара j на полке i в положении r .

Задачу оптимизации мы формулируем в следующем виде.

$$\sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^S \sum_{r=0}^1 p_j^u (x_{ijr} + y_{ijr} + z_{ijr}) \rightarrow \max$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{j=1}^P \sum_{r=0}^1 p_{jr}^w x_{ijr} \leq s_i^w && \text{(ширина полки)} \\
(2a) \quad & x_{ij0} = 0 \text{ при условии } p_{j1}^w > s_i^d && \text{(глубина полки)} \\
(2b) \quad & x_{ij1} = 0 \text{ при условии } p_{j0}^w > s_i^d && \\
(3) \quad & \sum_{i=1}^S \sum_{r=0}^1 (x_{ijr} + y_{ijr} + z_{ijr}) \leq p_j^s && \text{(количество товара)} \\
(4) \quad & f_j^{min} \leq \sum_{i=1}^S \sum_{r=0}^1 x_{ijr} \leq f_j^{max} && \text{(фейсинги)} \\
(5a) \quad & p_j^h \bar{y}_{ijr} \leq p_{jr}^w x_{ijr} && \text{(кашпинги)} \\
(5b) \quad & y_{ijr} \leq c_{ijr}^{max} \bar{y}_{ijr} && \\
(6) \quad & z_{ijr} \leq n_{ij}^{max} x_{ijr} && \text{(нестинги)} \\
(7) \quad & \alpha_j = 0 \text{ при условии } p_j^o = 0 && \text{(запрет поворота)} \\
(8) \quad & \alpha_j x_{ij0} = 0 && \text{(ориентация)} \\
(9) \quad & (1 - \alpha_j) x_{ij1} = 0 &&
\end{aligned}$$

Ограничения на переменные y_{ijr} , z_{ijr} , аналогичные условиям (8) и (9), выписывать не требуется, поскольку они будут следовать из условий (5a), (5b), (6), (8) и (9).

Линеаризация. Все ограничения в нашей модели линейные, кроме (8) и (9). Для их линеаризации мы используем технику, предложенную Джорджем Данцигом.

Лемма 1 (Данциг, [6]). Пусть α – бинарная переменная, x и y – вещественные или целочисленные переменные с ограничением $|x| \leq M$, где $M > 0$ – известная константа или параметр задачи. Тогда нелинейное условие $y = \alpha x$ эквивалентно следующим линейным условиям:

$$\begin{aligned}
x - (1 - \alpha)M &\leq y \leq x + (1 - \alpha)M \\
-\alpha M &\leq y \leq \alpha M
\end{aligned}$$

Доказательство. Прямолинейная проверка случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. \square

Следствие 1. Пусть α – бинарная переменная, x – вещественная или целочисленная переменная с ограничением $0 \leq x \leq M$, где $M > 0$ – известная константа или параметр задачи. Тогда нелинейное условие $\alpha x = 0$ эквивалентно линейному условию $x \leq (1 - \alpha)M$.

Следствие 2. Ограничения (8) и (9) с учетом (4) можно заменить на

$$(8') \quad x_{ij0} \leq (1 - \alpha_j) f_j^{max}$$

$$(9') \quad x_{ij1} \leq \alpha_j f_j^{max}$$

Заключение. Мы свели задачу к линейной, для которой существуют мощные решатели, как коммерческие (CPLEX, Gurobi), так и бесплатные (Coin-Or). Эксперименты показывают, что CPLEX легко находит оптимальное решение задачи в линейной формулировке и не может справиться с аналогичной нелинейной моделью при тех же параметрах.

Сходство с задачей о рюкзаке подсказывает, что стоит попробовать применить в задаче РПП методы, успешно применяемые в задаче о рюкзаке, в частности branch-and-cut, который показывает эффективность выше, чем методы, основанные на линейном программировании. Это представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

Shelf space allocation problem with product position options

Adrianov N., Czerniachowska K.

We formulate the problem of shelf space allocation with various product position options (side orientation, cappings and nestings). A method for linearizing nonlinear constraints arising in this model is presented. This technique allows finding the optimal solution to the problem, including the large instances of input data.

References

- [1] Bai R., Kendall G., “An investigation of automated planograms using a simulated annealing based hyper-heuristic.”, *in: Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers, Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, **32** (2005), 87–108.
- [2] Eisend M., “Shelf space elasticity: A meta-analysis”, *Journal of Retailing*, **90**:2 (2014), 168–181.
- [3] Yang M. H., “Efficient algorithm to allocate shelf space”, *European Journal of Operational Research*, **131**:1 (2001), 107–118.
- [4] Bai R., van Woensel T., Kendall G., Burke E. K., “A new model and a hyper-heuristic approach for two-dimensional shelf space allocation”, *4OR*, **11**:1, 31–55.
- [5] Bianchi-Aguiar T., Silva E., Guimarães L., Carravilla M. A., Oliveira J. F., “Allocating products on shelves under merchandising rules: Multi-level product families with display directions”, *Omega*, **76** (2018), 47–62.
- [6] Dantzig G.B., “On the significance of solving linear programming problems with some integer variables”, *Econometrica*, **28**:1 (1960), 30–44.

Применение алгоритма "Полоска" в задаче онлайн-обучения

М. М. Липкович¹, Д. В. Миронов²

Рассмотрена задача онлайн-обучения моделей, где данные для обучения становятся доступными не сразу, а поступают в последовательном порядке. Для решения поставленной задачи используется алгоритм «Полоска», предложенный В.А. Якубовичем. Эффективность метода показана в его сравнении со стандартной моделью, обученной стохастическим градиентным спуском.

Ключевые слова: онлайн-обучение, линейные модели, алгоритм "Полоска".

1. Введение

В классической постановке машинного обучения предполагается наличие набора данных, доступного к моменту обучения моделей. В работе рассматривается случай, когда такого предзаданного набора данных нет, и данные для обучения приходят последовательно. Такая постановка задачи называется онлайн-машинным обучением [1]. Потребность в моделях такого рода возникает, например, при работе с большими данными когда вычислительно неосуществимо совершить обучение на всем наборе, и в областях где данные меняются во времени, в следствие чего модели необходимо под них подстраиваться. Одним из наиболее популярных методов такого обучения является стохастический градиентный спуск, где в каждый момент времени модель обучается на пакете из одного семпла [2].

В данной работе предложено использовать алгоритм «Полоска» [3]. Этот алгоритм сводит задачу нахождения оптимальных параметров к решению системы бесконечных неравенств. В работе будет рассмотрен вариант построения бесконечной системы неравенств, которая хорошо ложится в парадигму онлайн-обучения. Применимость

¹Липкович Михаил Маркович — старший научный сотрудник ИПМаш РАН, доцент кафедры теоретической кибернетики мат.-мех. ф.-та СПбГУ, e-mail: lipkovich.mikhail@gmail.com.

Mikhail Lipkovich — senior researcher at IPME RAS, associate professor at Saint Petersburg State University, Department of Theoretical Cybernetics

²Миронов Дмитрий Викторович — студент магистр мат.-мех. ф.-та СПбГУ по программе «Прикладная математика и информатика», e-mail: dmitrvikizz@gmail.com.

Mironov Dmitrii — master's student at Saint Petersburg State University, "Applied mathematics and informatics" program

алгоритма будет показана в его сравнении с логистической регрессией, обученной стохастическим градиентным спуском.

2. Описание алгоритма «Полоска»

Рассмотрим модель, предложенную В. А. Якубовичем [3].

Пусть дан набор данных $\{x_i, y_i = s(x_i)\}$, $i = 1, \dots, m$, где $x_i \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ - векторы признаков, $s(x)$ - неизвестная функция из \mathbb{X} в $\{1, -1\}$. Задана задача бинарной классификации, т.е. требуется восстановить функцию s по имеющемуся набору данных.

Пусть $\{a_j(x)\}$, $j = 1, \dots, N, \dots$ - полный в $L^2(\mathbb{X})$ набор ограниченных функций. В алгоритме «Полоска» строится классификатор вида

$$\sigma(x) = \text{sign} \left(\sum_{j=1}^N \theta_j a_j(x) \right) = \text{sign}(s_N(x, u)), \quad (1)$$

где u - вектор обучаемых параметров с элементами $\theta_1, \dots, \theta_N$.

Строя опознающую систему исходя из условий минимизации функции квадрата ошибки приходят к следующему неравенству:

$$\left| \sum_{k=1}^N \alpha_{hk}^{(m)} \theta_k - \alpha_h^{(m)} \right| < \varepsilon, \quad h = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$\alpha_h^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s(x_j) a_h(x_j), \quad \alpha_{hk}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_k(x_j) a_h(x_j). \quad (3)$$

Для применения алгоритма «Полоска» необходимо циклически продолжить (2) до бесконечной системы неравенств. Один из способов этого достичь - рассмотреть бесконечную по h систему, сделав все функции циклическими по h . В этом случае, весь датасет должен быть доступен сразу. Однако, нас интересует возможность применения данного алгоритма к онлайн-обучению, поэтому вместо этого предлагается рассмотреть систему, бесконечную по m . Тогда на каждое добавление семпла данных будут приходиться N неравенств типа (2).

Обозначим $\delta_h^{(m)} = \sum_{k=1}^N \alpha_{hk}^{(m)} \theta_k - \alpha_h^{(m)}$, где верхний индекс m теперь обозначает номер итерации и рассмотрим следующий алгоритм обновления весов:

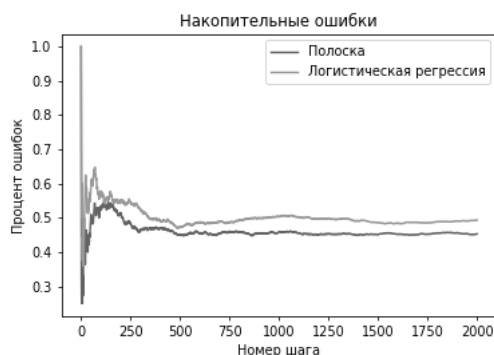
$$\theta_k^{m+1} = \begin{cases} \theta_k^m, & \text{если } |\delta_h^{(m)}| < \varepsilon, \\ \theta_k^m - \delta_h^m \alpha_{hk}^{(m)} \left[\sum_{k=1}^N (\alpha_{hk}^{(m)})^2 \right]^{-1}, & \text{если } |\delta_h^{(m)}| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема. Данный алгоритм является конечно-сходящимся
Доказательство. Основна на общем результате из [3].

3. Результаты моделирования

Для проверки применимости алгоритма «Полоска» к поставленной задаче сравним его с логистической регрессией, обученной методом стохастического градиентного спуска. Сравнения будет происходить на наборе данных "HIGGS Data Set"¹ [4], состоящем из 11000000 семплов по 28 признаков.

Обеим моделям будут последовательно предъявляться семплы из датасета. На каждом семпле будем выполнять прогноз, и запоминать общее число ошибок к данному шагу. Далее, этот семпл будет предъявляться для обучения. Такой подход сравнения онлайн-моделей был предложен в [5]. Графики процентов накопительных ошибок для первых 2000 семплов представлены ниже. Алгоритм «Полоска» с самого начала начинает совершать меньшее количество ошибок. Итоговый процент ошибок для «Полоски» - 38%, а для регрессии - 44%. Таким образом, предложенный алгоритм обладает потенциалом, и стоит заняться его улучшением и распространением на другие задачи.



4. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-00144)

¹<https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/HIGGS>

Список литературы

- [1] S. Hoi, Doyen Sahoo, Jing Lu, P. Zhao, “Online Learning: A Comprehensive Survey”, *Neurocomputing*, **459** (2021), 249–289.
- [2] Guillaume Bouchard and Théo Trouillon and Julien Perez and Adrien Gaidon, “Online Learning to Sample”, *arXiv: Learning*, 2015.
- [3] Якубович В. А., “Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств”, *Доклады Академии наук СССР*, **166:6** (1966), 1308–1312.
- [4] Baldi, P., P. Sadowski, and D. Whiteson, “Searching for exotic particles in high-energy physics with deep learning”, *Nature Communications*, **5** (2014).
- [5] Ma, Justin and Saul, Lawrence K. and Savage, Stefan and Voelker, Geoffrey M., “Identifying Suspicious URLs: An Application of Large-Scale Online Learning”, *ICML '09: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*, 2009, 681–688.

Application of "Stripe" algorithm for online machine learning Lipkovich M., Mironov D.

The present paper considers online learning problem where training data becomes available in a sequential order. "Stripe" algorithm proposed by V.A. Yakubovich is used for online learning. Its applicability for online machine learning is confirmed by comparison with a traditional model trained using stochastic gradient descent.

Keywords: online machine learning, linear models, "Stripe" algorithm

References

- [1] S. Hoi, Doyen Sahoo, Jing Lu, P. Zhao, “Online Learning: A Comprehensive Survey”, *Neurocomputing*, **459** (2021), 249–289.
- [2] Guillaume Bouchard and Théo Trouillon and Julien Perez and Adrien Gaidon, “Online Learning to Sample”, *arXiv: Learning*, 2015.
- [3] Yakubovich V. A., “Recurrent finitely convergent algorithms for solving systems of inequalities (In Russian)”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **166:6** (1966), 1308-1312.
- [4] Baldi, P., P. Sadowski, and D. Whiteson, “Searching for exotic particles in high-energy physics with deep learning”, *Nature Communications*, **5** (2014).
- [5] Ma, Justin and Saul, Lawrence K. and Savage, Stefan and Voelker, Geoffrey M., “Identifying Suspicious URLs: An Application of Large-Scale Online Learning”, *ICML '09: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*, 2009, 681–688.

Построение оптимальных зон транспортной достижимости нескольких объектов

А. В. Каледин¹

В работе рассматривается задача построения оптимальных зон транспортной достижимости для нескольких объектов. Предлагается новый алгоритм, основанный на обходе графов, использующий разбиение карты на гексагоны для ускорения вычислений. Обсуждаются часто используемые алгоритмы решения рассматриваемой задачи: для одного объекта — изохроны, которые обобщаются на случай нескольких объектов; для нескольких объектов — диаграммы Вороного. Далее подходы и их модификации сравниваются с новым алгоритмом.

Ключевые слова: интеллектуальный анализ больших данных, геопространственный анализ, оптимальные зоны транспортной достижимости

1. Введение

Во время пандемии задача по оптимизации процесса доставки как никогда актуальна. Каждому кафе, ресторану, аптеке и магазину приходится адаптироваться к новым условиям и взаимодействовать с покупателем через курьеров.

В работе рассматривается практическая задача о построении зон транспортной достижимости сети объектов. В настоящее время данная задача решается во всех службах доставки, но ее реализация является коммерческой тайной.

Обычно задача решается для одного объекта, и на выходе получается зона доставки — область вокруг объекта, куда можно доставить заказ. Один из способов решения заключается в построении изохроны транспортной доступности [1, 5], зоны достижимости за время T , которая учитывает транспортный граф. При этом изохроны в множественном случае образуют пересекающиеся зоны, могут выдавать некорректный результат с разным типом транспорта и являются неоднозначными в рамках формирования зон (отвечают на вопрос, успеет ли курьер за время t , но

¹Каледин Артем Владимирович — студент магистратуры каф. математической статистики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: avkaledin@mail.ru.

Kaledin Artem Vladimirovich — master student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Statistics.

не указывают, за сколько времени будет доставлен заказ). Также реализация вычисления изохроны в множественном случае является сложной задачей. Другой подход, разбивающий карту на непересекающиеся зоны, — диаграмма Вороного [3], не учитывает транспортный граф и также имеет ряд неоднозначных действий в формировании зон.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, к.ф.-м.н. М.А. Целищеву за помощь в работе.

2. Описание подхода и формулировка результата

Подход предполагает:

- 1) Взятие усеченного транспортного графа города.
- 2) Обход вершин графа и расчёт маршрутизатором времени достижимости от объектов. Присвоение каждой вершине индикатора объекта с наименьшим временем.
- 3) Проход по рёбрам графа и присвоение рёбрам индикаторов объектов.
- 4) Переход к гексагональной сетке [4] методом голосования попавших в гексагон вершин и рёбер графа.
- 5) Обход неразмеченных гексагонов и присвоение индикаторов по ближайшим размеченным гексагонам.

Отметим, что каждый шаг имеет ряд допущений, которые позволяют сделать процесс обчёта параллельным и ускорить алгоритм для перестроения зон с учётом транспортной ситуации. Отметим, что зоны поддерживают динамическое перестроение и могут быть построены с учетом разных типов транспорта курьеров для разных объектов. Также алгоритм применим для выбора расположения нового ресторана и анализа зон «привлекательности» [5].

В завершении приводим иллюстрации работы алгоритма — на рис. 1 представлен случай добавления нового ресторана и формирование новых зон; на рис. 2 представлено визуальное сравнение работы описанного алгоритма (с) с другими алгоритмами — изохронами (а) и полигонами Вороного (b).

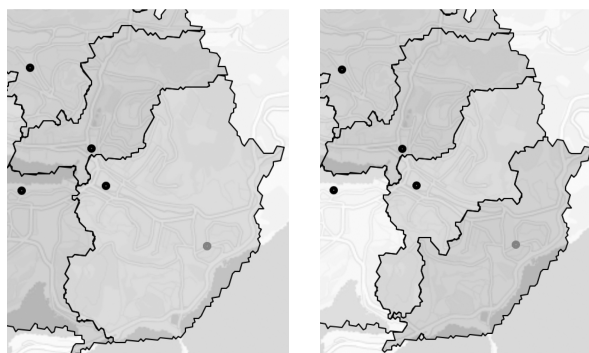


Рис. 1. Добавление нового объекта



а) Изохроны



б) Полигоны Вороного



с) Предлагаемый алгоритм

Рис. 2. Сравнение работы алгоритмов

Список литературы

- [1] Allen J., “Using Network Segments in the Visualization of Urban Isochrones”, *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, **53** (4); (2018), 262–270.
- [2] Desai K., “Isochrones: Analysis of Local Geographic Markets”, *Mayer Brown*, 2008.
- [3] Ф. Препарата, М. Шеймос, *Вычислительная геометрия: Введение*, Мир, Москва, 1989, 295 с.
- [4] Uber Technologies, “H3: Uber’s Hexagonal Hierarchical Spatial Index”, URL: <https://eng.uber.com/h3/>, 2018
- [5] Applebaum W., Cohen S., “The Dynamics of Store Trading Areas and Market Equilibrium”, *Annals of the Association of the American Geographer*, **51**; (1961), 73–101

Establishment of System of Optimal Transport Planning Zones for Several Objects

Kaledin A.V.

The work considers the task of establishing of optimal transport planning zones for several objects. The proposed new algorithm is based on graph traversal, which uses hexagonal grid generation over a map to speed up the computations. Commonly used algorithms for solving the task are also discussed in our work: for one object – isochrones that generalise in case of objects' multiplicity; for several objects – the Voronoi diagram. These approaches and their modifications are compared with the new algorithm.

Keywords: Big Data mining, geospatial analysis, optimal transport planning zones

References

- [1] Allen J., “Using Network Segments in the Visualization of Urban Isochrones”, *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, **53** (4); (2018), 262–270
- [2] Desai K., “Isochrones: Analysis of Local Geographic Markets”, *Mayer Brown*, 2008. Retrieved 2018-05-31
- [3] Preparata F., Sheymos M., *Computational Geometry: An Introduction (In Russian)*, Mir, Moscow, 1989, 295 c.
- [4] Uber Technologies, “H3: Uber’s Hexagonal Hierarchical Spatial Index”, *URL: <https://eng.uber.com/h3/>*, 2018
- [5] Applebaum W., Cohen S., “The Dynamics of Store Trading Areas and Market Equilibrium”, *Annals of the Association of the American Geographer*, **51**; (1961), 73–101

Часть 4.
Обработка естественного языка

Combining methods for term extraction from scientific and technical text

Е. И. Большакова¹ В. В. Семак²

В докладе рассматривается подход к автоматическому извлечению терминов из научно-технического текста, комбинирующий известные методы: лингвистические шаблоны, статистические меры терминологичности, методы графового ранжирования. Описываются комбинируемые методы и этапы для извлечения, отбора и ранжирования терминов, реализованные для обработки документов на русском языке. Приводятся результаты экспериментов по извлечению терминов из учебных текстов по математике и программированию. Полученные оценки эффективности извлечения (74% средней точности) показывают перспективность описанного подхода.

Ключевые слова: обработка текстов на естественном языке, автоматическое извлечение терминов, лингвистические шаблоны, графовые методы ранжирования

1. Введение

Одной из задач автоматической обработки текстов на естественном языке является терминологический анализ специализированных текстов, предполагающий извлечение из текстов терминов, выражающих понятия предметной области. Большинство известных методов извлечения терминов разработано для анализа текстовых коллекций, с целью построения терминологических словарей, тезаурусов, онтологий предметных областей. Однако, как показано в недавней статье [3], при работе с отдельно взятым текстом эти методы, преимущественно статистические, обычно показывают худшие результаты (порядка 23-65% средней точности и 5-38% F-меры). Тем не менее извлечение терминов из заданного текстового документа, особенно узкоспециализированного (научной статьи, книги, учебника, технического руководства и т.д.), необходимо на практике для автоматизации аннотирования и реферирования текстов,

¹*Большакова Елена Игоревна* — доцент, к.ф.-м.н каф. алгоритмических языков ВМК МГУ, e-mail: eibolshakova@gmail.

Bolshakova E. I. — Ph.D, Senior Lecturer, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Algorithmic Language Department.

²*Семак Владислав Викторович* — аспирант каф. алгоритмических языков ВМК МГУ, e-mail: vlad.semakk@gmail.com.

Semak V. V. — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Algorithmic Language Department.

создания глоссариев (перечней терминов с их определениями) и предметных указателей (обратных индексов к основным терминам текста с указанием номеров их страниц).

В данной работе рассматривается задача автоматического извлечения однословных и многословных терминов из отдельного русскоязычного научно-технического текста. Для повышения эффективности ее решения предлагается применить комбинации нескольких известных методов: лингвистические шаблоны терминов и контекстов их употребления в научных текстах, статистические меры для ранжирования извлеченных терминов-кандидатов, их переранжирование на основе графов совместной встречаемости слов. Рассмотренные комбинации методов экспериментально исследованы на учебно-научных текстах среднего объема, получены оценки их эффективности по мере средней точности (average precision), обычно используемой для задач извлечения терминов.

2. Извлечение и ранжирование терминов

Исследуемые в данной работе комбинации методов воплощены в трех-этапной стратегии выявления значимых терминов текста.

На первом этапе выполняется анализ исходного текста и извлечение списка терминов-кандидатов (слов и словосочетаний), удовлетворяющих лексико-синтаксическим шаблонам нескольких видов. Шаблоны описывают грамматические образцы терминов (часть речи и другие грамматические характеристики входящих в них слов), а также формализуют контексты определений терминов и их синонимов, типичные для научных текстов.

На втором этапе происходит фильтрация извлеченных кандидатов в термины с помощью заранее составленных списков стоп-слов (слов, которые не могут быть терминами или их частью), а затем из оставшегося множества производится последовательный отбор терминов на основе нескольких факторов [1]:

- достоверности шаблона, которым был извлечен термин-кандидат (шаблоны имеют разную точность распознавания терминов), и в первую очередь в результирующее множество отбираются кандидаты, выделенные наиболее достоверными шаблонами;
- частоте встречаемости термина-кандидата в тексте: согласно закону Ципфа значимые термины должны принадлежать центральной части распределения кандидатов по частоте встречаемости в тексте (не могут быть как слишком частотными, так и слишком редкими);

- лексической схожести терминов одной тематики: в результирующее множество добавляются кандидаты, имеющие общие слова с уже отобранными терминами (например: *сходимость функционального ряда и функциональный ряд*).

На третьем этапе происходит ранжирование отобранного множества терминов- кандидатов с целью их упорядочивания по релевантности предметной области. Рассматривались три способа ранжирования терминов-кандидатов: широко используемая статистическая мера терминологичности C-value [2], метод графового ранжирования – персонализированный PageRank [4], а также их комбинация. Результатом решения задачи автоматического извлечения терминов считаются первые 90% элементов ранжированного списка, граница отсечения для ранжированного списка подбиралась экспериментально.

3. Результаты экспериментов

Проверка эффективности реализованной стратегии извлечения проводилась на текстах семи русскоязычных учебно-научных текстов среднего размера (12-55 тыс. слов) по темам: формальные грамматики (ФГ), дифференциальные уравнения (ДУ), дискретная математика (ДМ), искусственный интеллект (ИИ), язык программирования Лисп (ЯЛ), системы программирования (СП) и математический анализ (МА). Для каждого обработанного текста был автоматически получен ранжированный список извлеченных терминов, их релевантность оценивалась экспертами.

В Таблице 1 приведены оценки средней точности (average precision) извлечения для трех вариантов ранжирования: персонализированный PageRank, C-value и их комбинация. Лучшего качества на четырех текстах (ФГ, ДУ, ЯЛ, МА) достигает комбинация C-value и PageRank, на трёх остальных текстах качество не уступает или незначительно (менее 1%) уступает средней точности, полученной с использованием C-value. Итоговое ранжирование на основе PageRank не дает преимуществ. Таким образом, ранжирование терминов с использованием комбинации C-value и персонализированного PageRank или одного C-value может использоваться практически равноценно.

Нижняя строка Таблицы 1 (средняя оценка по всем обработанным текстам) показывает, что описанный в работе подход с применением для ранжирования меры C-value или ее комбинации с PageRank, позволяет достичь большей эффективности (в среднем 74% и даже до 88% для текста по ФГ), чем отдельные методы, исследованные в [3].

Таблица 1. Средняя точность извлечения терминов

Текст	PageRank	C-value	C-value+PageRank
ФГ	0.80	0.87	0.88
ДУ	0.61	0.74	0.75
ДМ	0.57	0.67	0.67
ИИ	0.43	0.73	0.72
ЯЛ	0.75	0.79	0.80
СП	0.44	0.64	0.63
МА	0.65	0.71	0.72
Среднее	0.61	0.73	0.74

Список литературы

- [1] Bolshakova E. I., Ivanov K. M., “Automating Hierarchical Subject Index Construction for Scientific Documents”, *The Eighteenth Russian Conference on Artificial Intelligence RCAI-2020, Lecture Notes on Artificial Intelligence, Springer*, **12412** (2020), 201–214.
- [2] Frantzi K., Ananiadou S., Mima H., “Automatic Recognition of Multi-Word Terms: The C-value/NC-value method”, *International Journal on Digital Libraries*, **3:2** (2000), 115–130.
- [3] Šajatović A. et al., “Evaluating automatic term extraction methods on individual documents”, *Proceedings of the Joint Workshop on Multiword Expressions and WordNet (MWE-WN 2019)*, 2019, 149–154.
- [4] Zhang Z., Gao J., Ciravegna F., “SemRe-Rank: Improving Automatic Term Extraction by Incorporating Semantic Relatedness with Personalised PageRank”, *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, **12:5** (2018), 1–41.

E.I. Bolshakova, V.V. Semak

Комбинирование методов для извлечения терминов из научно-технического текста

An approach to automatic extraction of terms from an individual scientific text is reported, which combines known methods: linguistic patterns, statistical terminological measures, methods of graph ranking. The combined methods and stages for extracting, selection and ranking of terms are described, which are implemented for processing documents in Russian. The results of experiments on extracting terms from educational texts in mathematics and programming are presented. The scores of extraction efficiency (74% of average accuracy) show that the described approach is promising.

Keywords: natural language processing, automatic term extraction, linguistic templates, graph ranking methods.

NEREL: Набор данных на русском языке с вложенными именованными сущностями и отношениями

И. В. Денисов¹ И. С. Рожков² Н. В. Лукашевич³

NEREL - русский публично доступный набор данных для решения задачи извлечения именованных сущностей и задачи извлечения отношений. Датасет содержит более 56К размеченных сущностей и более 39К отношений. Важным отличием NEREL от предыдущих датасетов является наличие разметки для вложенных именованных сущностей.

Методы извлечения вложенных именованных сущностей отличаются от методов извлечения ”плоских” именованных сущностей в первую очередь архитектурой решения. Поскольку NEREL предоставляет аннотации для вложенных сущностей, в работе было проведено сравнение различных подходов к решению этой задачи с переносом на тексты русского языка.

Ключевые слова: извлечение именованных сущностей, извлечение вложенных именованных сущностей, датасет, набор данных.

1. Введение

Большинство наборов данных, размеченных именованными сущностями, содержат упрощенную разметку именованных сущностей, в которой не предполагается, что именованная сущность может быть вложена в другую именованную сущность. Однако такое упрощение приводит к потере информации.

NEREL — новый датасет на русском языке с размеченными именованными сущностями и отношениями между ними (Named Entities and

¹*Денисов Илья Вячеславович* — аспирант кафедры алгоритмических языков ф-та вычислительной математики и кибернетики МГУ, e-mail: denilv@mail.ru.

Denisov Ilya Viatcheslavovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Algorithmic Languages.

²*Рожков Игорь Сергеевич* — студент кафедры алгоритмических языков ф-та вычислительной математики и кибернетики МГУ, e-mail: fulstocky@gmail.com.

Rozhkov Igor Sergeevich — student, Lomonosov Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Algorithmic Languages.

³*Лукашевич Наталья Валентиновна* — ведущий научный сотрудник в Лаборатории анализа информационных ресурсов, Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ, e-mail: louk_nat@mail.ru.

Lukashevich Natalia Valentinovna — leading researcher in the Laboratory of Information Resources Analysis, Research Computing Center of Moscow State University.

RELations). Также одна из особенностей NEREL состоит в том, что размечены вложенные именованные сущности и их отношения.

Отношения между сущностями размечаются в рамках связного текста и не ограничиваются уровнем предложения. На Рис. 1 изображен пример вложенных сущностей и отношений между ними, которые связаны с соседними предложениями.

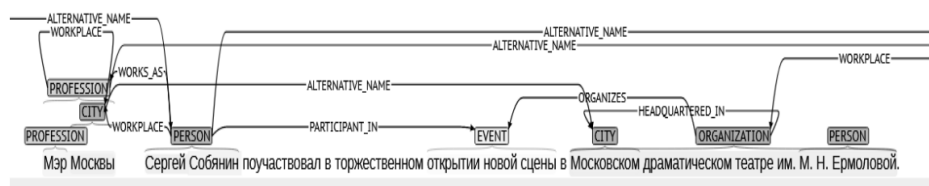


Рис. 1. Предложение имеет вложенные именованные сущности: Мэр Москвы, Москвы, Мэр; Московский драм. театр Ермоловой, Московский, Ермолова.

2. Основные характеристики NEREL

NEREL содержит 29 типов именованных сущностей и 49 типов отношений между сущностями. Размечено более 56К сущностей и 39К отношений в более чем 900 документов Russian Wikinews. Максимальная глубина вложенности сущностей — 6. В Таблице 1 указаны сравнительные характеристики датасетов на русском языке для задачи NER и RE, в некоторых датасетах присутствует информация об отношениях между сущностями.

Датасет	Язык	#NE (Типы)	Макс. глубина	#Rel (Типы)
Gareev [2]	ru	44К (2)	1	—
Collection3 [6]	ru	26.4К(3)	1	—
FactRuEval [10]	ru	12К (3)	2	1К (4)
BSNLP [9]	ru	9К (5)	1	—
RuREBUS [11]	ru	121К (5)	1	14.6К (8)
RURED [3]	ru	22.6К (28)	1	5.3К(34)
NEREL (ours)	ru	56К (29)	6	39К (49)

Таблица 1. Сравнение NEREL и других датасетов на русском языке

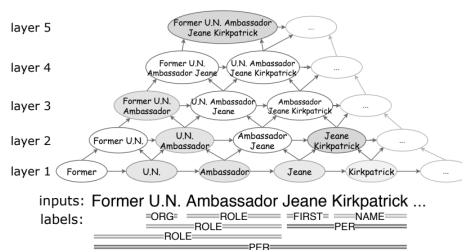
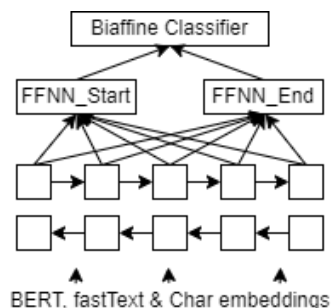


Рис. 2. Архитектура Biaffine NER. Рис. 3. Архитектура Pyramid NER

3. Методы извлечения вложенных именованных сущностей

Методы извлечения вложенных именованных сущностей архитектурно отличаются от моделей, направленных на извлечение именованных сущностей без вложенности. Для задачи распознавания вложенных именованных сущностей мы рассмотрели несколько моделей глубокого обучения, которые сейчас дают state-of-the-art результаты: Biaffine NER [8], Pyramid NER [7], MRC-NER [4].

3.1. Biaffine NER

В модели Biaffine NER предлагается закодировать входной текст путем объединения векторных представлений полученных из моделей BERT, fastText [5] и символьных представлений. Далее двунаправленный LSTM-слой формирует контекстное представление каждого токена. Эти контекстные представления передаются в FFNN_Start и FFNN_End блоки и формируют разные репрезентации токенов как начала и концов интервалов сущностей (h_s/h_e). На финальном этапе Biaffine Classifier формирует тензор r_m размера $l \times l \times c$ из h_s и h_e . l — число токенов во входном тексте, c — число категорий именованных сущностей + 1 (отсутствие сущности). Тензор r_m содержит в себе оценку вероятности нахождения сущности в каждом возможном интервале с ограничением, что индекс начала сущности i всегда меньше индекса конца сущности ($s_i < e_i$).

3.2. Pyramid NER

В модели Pyramid NER выход нейронной сети при анализе именованных сущностей формируется в виде пирамиды.

Вход модели — это текстовая последовательность, состоящая из T токенов. После кодирования при помощи моделей BERT, fastText и

символьного кодировщика представления рекурсивно подаются в NER-декодирующие слои, генерируя при этом L последовательностей тегов в IOB2-формате (Inside, Outside, Beginning) с длиной $T, T - 1, \dots, T - L + 1$, где L - число декодирующих слоёв. Кодированные и декодирующие слои связаны между собой, и размер декодирующей последовательности уменьшается путём использования свёрточного слоя с ядром размера 2. Таким образом, на этапе построения модели необходимо чётко понимать максимальную длину сущностей, чтобы поставить соответствующее число декодирующих слоёв.

3.3. MRC-NER

В модели MRC-NER (Machine Reading Comprehension - Машинное Понимание Прочитанного) задача извлечения именованных сущностей ставится как задача ответа на вопросы. Здесь необходимо определить границы ответа \mathbf{A} на специализированный запрос \mathbf{Q} в контексте \mathbf{C} . Набор входных данных формируется из формата NEREL, где каждому слову присвоена метка в BIO-формате (Begin, In, Out). Формат преобразуется в тройки из запроса (Question), ответа (Answer) и контекста (Context). После дальнейшей обработки образуется множество троек $(q_y, x_{start,end}, X)$.

Запросы — заранее определённое множество запросов к каждой категории сущностей. Примеры запросов:

- PERSON: Человек — мужчина, женщина или ребенок.
- ORGANIZATION: Организация — это компания или другая группа людей, которые работают вместе для определенной цели.

Модель в своей основе использует модель BERT, поэтому тройки приводятся к виду: $\{[CLS], q_1, q_2, \dots, q_m, [SEP], x_1, x_2, \dots, x_n\}$, q_i — токены запроса, x_i — токены контекста. Эта объединённая строка подается на вход BERT-блоку, на выходе получается матрица представления контекст $E \in R^{n \times d}$, где d — размерность последнего слоя BERT, где получено векторное представление запроса.

Для каждого токена вычисляется вероятность того, является ли он началом сущности в запросе. Аналогично проставляется вероятность конца сущности для каждого токена. Возможна ситуация, когда в тексте несколько сущностей, сущности вложены друг в друга или пересекаются, поэтому необходимо определять вероятность того, что конкретная пара start-index и end-index является началом и концом сущности.

4. Эксперименты по извлечению вложенных именованных сущностей

Датасет NEREL был разделен на обучающее, валидационное и тестовое множества — 746/94/93 документов соответственно.

В экспериментах использовалась модель fastText (fT) [5], обученная на текстовых данных Russian Common Crawl¹, и BERT векторные представления текста, полученные на основе модели RuBERT [1].

Метод	P	R	F1
Biaffine, fT	78.84	71.80	75.13
Biaffine, RuBERT	81.92	71.54	76.38
Pyramid, fT	72.70	63.01	67.51
Pyramid, RuBERT	77.73	70.97	74.19
MRC	85.24	84.32	84.78

Таблица 2. Результаты экспериментов по задаче Nested NER

Датасет NEREL позволяет проводить широкий набор экспериментов по задаче Nested NER, т.к. обладает большим количеством типов сущностей и широким набором новостных текстов. На данный момент, наилучшие результаты на тестовой части NEREL показывает модель MRC NER, однако эта модель плохо масштабируется, т.к. к каждому тексту необходимо делать N запросов, где N — число типов сущностей; поэтому второй лучший результат, модель Biaffine NER (RuBert), тоже необходимо рассматривать, если речь идет не только о качестве решения, но и его производительности.

5. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20166).

Список литературы

- [1] Yuri Kuratov and Mikhail Arkhipov, “Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for russian language”, *arXiv preprint arXiv:1905.07213*, 2019.
- [2] Rinat Gareev et al., “Introducing baselines for russian named entity recognition. In International Conference on Intelligent Text”, *Processing and Computational Linguistics*, pages, 2013, 329–342.
- [3] Denis Gordeev et al., “Relation extraction dataset for the russian language.”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”]*., 2020.

¹<https://commoncrawl.org/>

- [4] Xiaoya Li et al., “A unified MRC framework for named entity recognition.”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics.*, 2020, 5849–5859.
- [5] Tomas Mikolov et al., “Advances in pre-training distributed word representations.”, *Proceedings of the Eleventh International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC 2018).*, 2018.
- [6] Valerie Mozharova and Natalia Loukachevitch, “Two-stage approach in russian named entity recognition”, *International FRUCT Conference on Intelligence, Social Media and Web (ISMW FRUCT).*, 2016, 1–6.
- [7] Wang Jue et al., “Pyramid: A layered model for nested named entity recognition”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020, 5918–5928.
- [8] Juntao Yu et al., “Named entity recognition as dependency parsing”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020, 6470–6476.
- [9] Jakub Piskorski et al., “The second crosslingual challenge on recognition, normalization, classification, and linking of named entities across slavic languages”, *Proceedings of the 7th Workshop on Balto-Slavic Natural Language Processing*, 2019, 64–74.
- [10] Anatoly Starostin et al., “Factrueval 2016: Evaluation of named entity recognition and fact extraction systems for russian Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”],”, 2016, 702-720.
- [11] Vitaly Ivanin et al., “Rurebus-2020 shared task: Russian relation extraction for business”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”]*, 2020.

NEREL: A Russian Dataset with Nested Named Entities and Relations

Denisov I.V., Rozhkov I.S., Lukashevich N.V.

NEREL is a Russian publicly available dataset for solving named entity recognition problem and relation extraction problem. The dataset contains more than 56K tagged entities and more than 39K relationships. An important difference between NEREL and previous datasets is the presence of markup for nested named entities.

The methods of extracting nested named entities differ from the methods of extracting “flat” named entities primarily by the architecture of the solution. Since NEREL provides annotations for nested entities, the article compared various approaches to solving this problem with the transfer to Russian language domain.

Keywords: NER, nested NER, named entity recognition, nested named entity recognition, dataset.

References

- [1] Yuri Kuratov and Mikhail Arkhipov, “Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for russian language”, *arXiv preprint arXiv:1905.07213*, 2019.
- [2] Rinat Gareev et al., “Introducing baselines for russian named entity recognition. In International Conference on Intelligent Text”, *Processing and Computational Linguistics, pages*, 2013, 329–342.
- [3] Denis Gordeev et al., “Relation extraction dataset for the russian language.”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”]*., 2020.
- [4] Xiaoya Li et al., “A unified MRC framework for named entity recognition.”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics.*, 2020, 5849–5859.
- [5] Tomas Mikolov et al., “Advances in pre-training distributed word representations.”, *Proceedings of the Eleventh International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC 2018)*., 2018.
- [6] Valerie Mozharova and Natalia Loukachevitch, “Two-stage approach in russian named entity recognition”, *International FRUCT Conference on Intelligence, Social Media and Web (ISMW FRUCT)*., 2016, 1–6.
- [7] Wang Jue et al., “Pyramid: A layered model for nested named entity recognition”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020, 5918–5928.
- [8] Juntao Yu et al., “Named entity recognition as dependency parsing”, *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020, 6470–6476.
- [9] Jakub Piskorski et al., “The second crosslingual challenge on recognition, normalization, classification, and linking of named entities across slavic languages”, *Proceedings of the 7th Workshop on Balto-Slavic Natural Language Processing*, 2019, 64–74.
- [10] Anatoly Starostin et al., “Factrueval 2016: Evaluation of named entity recognition and fact extraction systems for russian Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”],”, 2016, 702-720.
- [11] Vitaly Ivanin et al., “Rurebus-2020 shared task: Russian relation extraction for business”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialog” [Komp’iuternaia Lingvistika i Intellektual’nye Tehnologii: Trudy Mezhdunarodnoj Konferentsii “Dialog”]*, 2020.

Разработка автоматизированной системы пополнения таксономии на текстах конкретной предметной области

М. М. Тихомиров¹

В работе рассматривается вопрос применения разработанного метода на основе использования мета-векторных представлений слов для автоматизированного (с использованием аннотаторов) расширения таксономии на конкретную предметную область. Рассматривается область информационной безопасности, которая используется для обогащения Онтологии Естественных Наук и Технологий (ОЕНТ).

Ключевые слова: тезаурус, пополнение таксономии, метавекторное представление, интерфейс.

1. Введение

Таксономии - это полезный инструмент, который применяется в различных задачах обработки естественного языка. Таксономии обычно состоят из набора сущностей, называемых концептами или понятиями, и связей между сущностями, выражающими отношения класс-подкласс (или гипероним-гипоним) между концептами [1, 2, 3]. Построение подобных ресурсов происходит вручную и требует существенных человеческих затрат.

Для упрощения построения таксономии были предложены различные подходы для извлечения отношений гиперонимии для новых терминов из текстов, использующие шаблоны, информацию о со-встречаемости слов, характеристики распределения слов и другие подходы [4]. В настоящее время важным компонентом извлечения отношений гиперонимии из текстов являются векторные представления слов, которые могут служить дополнительным свидетельством семантического сходства между словами [5, 6, 7].

Векторные модели слов могут быть обучены с использованием различных текстовых коллекций и методов, что ведет к тому, что разные векторные представления захватывают контекст по-разному. Отсюда можно предположить, что некоторые комбинации векторов, так называемые мета-векторные представления [8], могут улучшить векторные

¹Тихомиров Михаил Михайлович — младший научный сотрудник НИВЦ МГУ, e-mail: tikhomirov.mm@gmail.com.

Tikhomirov Mikhail Mikhailovich — junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center.

представления слов, что позволяет добиться лучшего предсказания семантического сходства между словами.

В недавней работе [9] было показано, что комбинации векторных представлений, обученных на общей предметной области, рассчитанные на больших текстовых коллекциях из сети Интернет, оказывают существенное влияние на качество пополнения таксономий, таких как WordNet [3] и RuWordNet [10].

В данной работе рассматривается вопрос применения разработанного метода на основе использования мета-векторных представлений слов для автоматизированного (с использованием аннотаторов) расширения таксономии на конкретную предметную область. Рассматривается область информационной безопасности, которая используется для обогащения Онтологии Естественных Наук и Технологий (ОЕНТ) [11, 12].

2. Описание подхода

В основе подхода лежит использование мета-векторных представлений слов, которые позволяют добиться более высокого качества предсказания гиперонимов за счет комбинирования в векторной модели как предметно ориентированные векторные представления, так и модели обученные на общей предметной области.

Метод состоит из двух основных компонентов: алгоритм подготовки мета-векторных представлений и алгоритм предсказания гиперонимов для целевых слов. Мета-векторные представления строятся с использованием автокодировщиков [13] (AAEME, SAEME) в комбинации с дополнительной функцией потерь, добавляющей информацию о тезаурусе [9] (triplet loss). Предсказание гиперонимов реализовано через алгоритм машинного обучения, где входные признаки формируются на основании метрик близости между сущностями в тезаурусе и целевым словом, используя векторную модель. В качестве алгоритма машинного обучения использовалась логистическая регрессия, которая обучалась на задаче классификации, то есть, предсказания, является ли обрабатываемый концепт гиперонимом целевого слова. Результаты автоматической оценки качества работы подхода представлены в Таблице 1.

3. Описание реализованной системы

В рамках работы была реализована система предсказания гиперонимов и веб-сервис для работы с ней. Работа с системой происходит следующим образом:

Метод	MAP	MRR
concat	0.386	0.434
SVD	0.387	0.433
CAEME	0.385	0.434
CAEME triplet loss	0.408	0.456
AAEME	0.414	0.463
AAEME triplet loss	0.427	0.479

Таблица 1. Оценка качества расширения ОЕНТ-lite

Слово: ЛИСП

ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ	0.98	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ПРОЦЕДУРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ	0.895	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ВЫСОКОУРОВНЕВЫЙ ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ	0.856	Гипероним	Гиперонимы Гипонимы
ИСКУССТВЕННЫЙ ЯЗЫК	0.787	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЯЗЫК	0.763	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК	0.749	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК	0.742	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ НИЗКОГО УРОВНЯ	0.736	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	0.734	Пусто	Гиперонимы Гипонимы
ПРОГРАММА-ТРАНСЛЯТОР	0.713	Пусто	Гиперонимы Гипонимы

Следующий Прошлый Сохранить

Рис. 1. Интерфейс веб-сервиса.

- 1) Администратор системы запускает метод предсказания гиперонимов для интересующего набора слов,
- 2) Результат предсказания загружается в веб-сервис,
- 3) Аннотаторы получают доступ к системе, где для каждого слова есть набор из 10 предсказаний, которые должны разметить.

Каждое предсказание, которое отображается пользователю, также содержит инструменты отображения дополнительной информации о гиперонимах и гипонимах предсказанного концепта. В данный инструмент также входит возможность добавить в текущий список более подходящий концепт. Помимо этого выводится информация о весе предсказания, и сам список упорядочен в соответствии с этим весом. От аннотаторов требуется: просмотреть список, пополнить его при необходимости близкими концептами и разметить, связан ли каждый концепт с целевым словом некоторым отношением.

Список литературы

- [1] Berners-Lee, Tim and Hendler, James and Lassila, Ora, "The semantic web", *Scientific american*, **284**:5 (2001), 34–43.

- [2] Gómez-Pérez, Asunción and Corcho, Oscar, “Ontology languages for the semantic web”, *IEEE Intelligent systems*, **17**:1 (2002), 54–60.
- [3] Miller, George A, *WordNet: An electronic lexical database*, 1998.
- [4] Nikishina, Irina and Logacheva, Varvara and Panchenko, Alexander and Loukachevitch, Natalia, “RUSSE’2020: Findings of the First Taxonomy Enrichment Task for the Russian Language”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2020.
- [5] Fu, Ruiji and Guo, Jiang and Qin, Bing and Che, Wanxiang and Wang, Haifeng and Liu, Ting, “Learning semantic hierarchies via word embeddings”, *Proceedings of the 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*, 2014, 1199–1209.
- [6] Levy, Omer and Remus, Steffen and Biemann, Chris and Dagan, Ido, “Do supervised distributional methods really learn lexical inference relations?”, *Proceedings of the 2015 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, 2015, 970–976.
- [7] Nikishina, Irina and Panchenko, Alexander and Logacheva, Varvara and Loukachevitch, Natalia, “Studying Taxonomy Enrichment on Diachronic WordNet Versions”, *Proceedings of the 28th International Conference on Computational Linguistics*, 2020.
- [8] Coates, Joshua and Bollegala, Danushka, “Frustratingly Easy Meta-Embedding-Computing Meta-Embeddings by Averaging Source Word Embeddings”, *arXiv preprint arXiv:1804.05262*, 2018.
- [9] Tikhomirov, MM and Loukachevitch, NV, “Meta-Embeddings in Taxonomy Enrichment Task”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2021.
- [10] Loukachevitch, Natalia V and Lashevich, German and Gerasimova, Anastasia A and Ivanov, Vladimir V and Dobrov, Boris V, “Creating Russian wordnet by conversion”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2016, 405–415.
- [11] Dobrov, Boris V and Loukachevitch, Natalia V, “Development of Linguistic Ontology on Natural Sciences and Technology”, LREC, 2006, 1077–1082.
- [12] Tikhomirov, Mikhail and Loukachevitch, Natalia and Dobrov, Boris, “Methods for Assessing Theme Adherence in Student Thesis”, *International Conference on Text, Speech, and Dialogue*, 2019, 69–81.
- [13] Bollegala, Danushka and Bao, Cong, “Learning word meta-embeddings by autoencoding”, *Proceedings of the 27th international conference on computational linguistics*, 2018, 1650–1661.

Development of an automated system for taxonomy enrichment based on texts of a specific domain

Tihomirov M.

The paper considers the application of the developed method based on the use of meta-vector representations of words for automated (using annotators) enrichment of a domain taxonomy. The information security domain is considered, which is used to enrich the Ontology of Natural Sciences and Technologies (OENT). *Keywords:* taxonomy, meta-embedding, vector representation, interface.

References

- [1] Berners-Lee, Tim and Hendler, James and Lassila, Ora, “The semantic web”, *Scientific american*, **284**:5 (2001), 34–43.
- [2] Gómez-Pérez, Asunción and Corcho, Oscar, “Ontology languages for the semantic web”, *IEEE Intelligent systems*, **17**:1 (2002), 54–60.
- [3] Miller, George A, *WordNet: An electronic lexical database*, 1998.
- [4] Nikishina, Irina and Logacheva, Varvara and Panchenko, Alexander and Loukachevitch, Natalia, “RUSSE’2020: Findings of the First Taxonomy Enrichment Task for the Russian Language”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2020.
- [5] Fu, Ruiji and Guo, Jiang and Qin, Bing and Che, Wanxiang and Wang, Haifeng and Liu, Ting, “Learning semantic hierarchies via word embeddings”, *Proceedings of the 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*, 2014, 1199–1209.
- [6] Levy, Omer and Remus, Steffen and Biemann, Chris and Dagan, Ido, “Do supervised distributional methods really learn lexical inference relations?”, *Proceedings of the 2015 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, 2015, 970–976.
- [7] Nikishina, Irina and Panchenko, Alexander and Logacheva, Varvara and Loukachevitch, Natalia, “Studying Taxonomy Enrichment on Diachronic WordNet Versions”, *Proceedings of the 28th International Conference on Computational Linguistics*, 2020.
- [8] Coates, Joshua and Bollegala, Danushka, “Frustratingly Easy Meta-Embedding—Computing Meta-Embeddings by Averaging Source Word Embeddings”, *arXiv preprint arXiv:1804.05262*, 2018.
- [9] Tikhomirov, MM and Loukachevitch, NV, “Meta-Embeddings in Taxonomy Enrichment Task”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2021.
- [10] Loukachevitch, Natalia V and Lashevich, German and Gerasimova, Anastasia A and Ivanov, Vladimir V and Dobrov, Boris V, “Creating Russian wordnet by conversion”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: papers from the Annual conference “Dialogue”*, 2016, 405–415.
- [11] Dobrov, Boris V and Loukachevitch, Natalia V, “Development of Linguistic Ontology on Natural Sciences and Technology”, *LREC*, 2006, 1077–1082.
- [12] Tikhomirov, Mikhail and Loukachevitch, Natalia and Dobrov, Boris, “Methods for Assessing Theme Adherence in Student Thesis”, *International Conference on Text, Speech, and Dialogue*, 2019, 69–81.
- [13] Bollegala, Danushka and Bao, Cong, “Learning word meta-embeddings by autoencoding”, *Proceedings of the 27th international conference on computational linguistics*, 2018, 1650–1661.

Часть 5.
**Искусственные нейронные сети и
машинный интеллект**

Simple method to improve quality of sparse models training from scratch

К. В. Беллонин¹ А. В. Шокуров^{2 3}

Существующие алгоритмы прореживания позволяют получать разреженные нейронные сети, обладающие хорошим качеством. Однако, при обучении с нуля полученной разреженной структуры, зачастую не получается достичь качества, полученного в результате прореживания (это особенно заметно для сильно разреженных архитектур).

В данной работе описывается метод, позволяющий улучшать качество при обучении с нуля, восстанавливая некоторые веса в разреженной архитектуре.

Ключевые слова: нейронные сети, прореживание, разреженные архитектуры, гипотеза "лотерейного билета"

1. Введение

Прореживание нейронных сетей - процесс вырезания (зануления) весов в данной нейронной сети. Прореживание, в зависимости от точки зрения, может рассматриваться как алгоритм оптимизации (уменьшения количества операций и памяти для хранения значений весов), регуляризации или поиска "архитектуры" нейронной сети [4].

Во многих алгоритмах прореживания [2] [1] в результате работы алгоритма получается не только разреженная архитектура, но и значения параметров для этой архитектуры. Эти параметры имеют критически

¹*Беллонин Кирилл Владимирович* — аспирант кафедры теоретической информатики механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, e-mail: bellonin_kirill@mail.ru.

Bellonin Kirill Vladimirovich — postgraduate student of Theoretical Informatics Chair of Mechanics and Mathematics Faculty of Lomonosov Moscow State University.

²*Шокуров Антон Вячеславович* — к.ф.-м.н., научный сотрудник лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, e-mail: shokurov.anton.v@yandex.ru.

Shokurov Anton Vyacheslavovich — Ph.D., research associate of Computational Methods Laboratory of Mechanics and Mathematics Faculty of Lomonosov Moscow State University.

³Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект», по научному плану кафедры теоретической информатики.

This research has been supported by the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University «Brain, Cognitive Systems, Artificial Intelligence», according to the scientific plan of Theoretical Informatics Chair.

важное значение, т.к. при тренировке разреженной архитектуры с нуля (т.е. начиная с некоторой произвольной инициализации) зачастую не получается достигнуть качества, полученного во время прореживания.

Эта проблема уже была исследована в некоторых статьях [3] [4] [5], однако даже существование самой проблемы иногда ставилось под вопрос [4]. В этих же статьях проводилось исследование влияния инициализации разреженных архитектур на качество после обучения [3] [5], однако и здесь были получены противоречивые результаты.

2. Основные результаты и описание метода

Для экспериментов был выбран набор данных CIFAR-10 [7] и нейронная сеть типа VGG [6] с 14.7 миллионами параметров (здесь и далее считаются только параметры ядер двумерных сверток и весов полносвязного слоя, т.е. параметры участвующие в операциях умножения).

Для получения разреженных архитектур были реализованы ¹ два алгоритма: магнитудного прореживания [2] и вариационного дропаута [1]. Из всего набора экспериментов была выбрана архитектура полученная с помощью вариационного дропаута: в ней всего лишь 6.7 тысяч параметров при топ-1 качестве (top-1 accuracy) в 85% на тестовой части CIFAR-10. Все дальнейшие эксперименты проводились с этой разреженной архитектурой.

Тренировка разреженной архитектуры подтвердила ее неспособность обучаться со случайной инициализации до качества, полученного в процессе прореживания: при тренировке со случайной инициализации топ-1 качество достигло лишь 75%. Таким образом, можно утверждать, что на каком-то этапе в результате прореживания получают разреженные архитектуры, которые даже с инициализацией из гипотезы "о лотерейном билете" не могут достичь того качества, которое они достигли в результате прореживания.

Приводимый в данной статье метод, восстанавливающий качество обучения с нуля на одном наборе данных, может позволить создавать архитектуры, способные обучаться с нуля и на других наборах данных. Таким образом, метод имеет практическую значимость при поиске разреженных архитектур.

2.1. Метод восстановления качества

Пусть L - функция потерь, с помощью которой тренируется наша нейронная сеть, P_0 - фиксированная случайная инициализация, c_{l_2} - коэффициент l_2 - регуляризации, \mathbb{M} - множество вырезанных из модели весов.

¹https://github.com/SleepingThread/torch_scripts

Тогда метод восстановления качества выглядит следующим образом: 2.1. Процесс выбора множества весов Δ_M :

$$s(w) = \frac{1}{1 + \alpha} \left(\left| \frac{w_{min} + w_{max}}{2} \right| + \alpha(w_{max} - w_{min}) \right), \text{ где } \alpha \geq 0$$

$$\Delta_M(K, N_{max}) = \underset{\Delta' \subset \mathbb{M}_{new}, |\Delta'| = N_{max}}{\operatorname{argmax}} \sum_{w \in \Delta'} s(w) \quad (1)$$

, где N_{max} - максимальное количество параметров для восстановления за шаг алгоритма, w_{min}, w_{max} - минимальное и максимальное значения параметра w за последние K эпох, а α регулирует важность "шума" веса относительно его "среднего" значения в функции важности веса $s(w)$.

Algorithm 2.1 Восстановление качества тренировки

- 1: **procedure** RESTOREQUALITY($L, P_0, c_{l_2}, \mathbb{M}_{old}, K, N_{max}$)
 - 2: Восстановить все вырезанные веса в модели
 - 3: $\mathbb{M}_{new} = \mathbb{M}_{old}$
 - 4:
$$L_{restore} = L + c_{l_2} \sum_{w \in \mathbb{M}_{new}} w^2$$
 - 5: Инициализировать модель значениями P_0
 - 6: Тренировать модель с функцией потерь: $L_{restore}$
 - 7: **while** Текущее качество меньше требуемого **do**
 - 8: Выбрать $\Delta_M(K, N_{max}) \subset \mathbb{M}_{new}$ согласно 1
 - 9: $\mathbb{M}_{new} = \mathbb{M}_{new} \setminus \Delta_M$ ▷ восстановление части параметров
 - 10: Тренировать модель с функцией потерь: $L_{restore}$
 - 11: **end while**
 - 12: **return** \mathbb{M}_{new} ▷ новые вырезанные веса, $\mathbb{M}_{new} \subset \mathbb{M}_{old}$
 - 13: **end procedure**
-

2.2. Результаты применения метода

Алгоритм тестировался для небольшого количества итераций (т.е. 2 восстановления параметров), со следующими параметрами: $K = 10, N_{max} = 3000, c_{l_2} = 0.01$. Каждая тренировка внутри алгоритма проходила 100 эпох с использованием оптимизатора Adam со скоростью обучения $2e-3$, уменьшающейся по косинусу (cosine lr scheduler [8]). Тренировка с нуля проводилась аналогично, но количество эпох было увеличено до 200. Бинарный дропаут в данных экспериментах выключен, т.к. модели крайне малы и не нуждаются в дополнительной регуляризации.

В результате работы алгоритма были получены архитектуры (9.7k, 12.7k), которые при обучении из инициализации P_0 ² дали следующие

результаты (в таблице указано топ-1 качество на тестовой части CIFAR-10, изначальная архитектура обучалась до 75.4%):

α	9.7k (%)	12.7k (%)
0.3	79.5	80.9
0.5	79.3	81
1.0	79	81.2
2.0	79.2	81.1

Видно, что в проведенных экспериментах параметр α не сильно влияет на конечный результат, однако отличия могут проявиться при выборе другого значения для c_{l_2} или другой архитектуры и данных.

Отдельно следует отметить, что случайное восстановление весов не приводит к сопоставимому улучшению качества, поэтому алгоритм, как минимум, лучше случайного:

	9.7k (%)	12.7k (%)	15.7k (%)
random	76.5	76.8	77.0

Список литературы

- [1] Dmitry Molchanov, Arsenii Ashukha, Dmitry Vetrov, “Variational Dropout Sparsifies Deep Neural Networks”, *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, **70** (2017), 2498–2507.
- [2] Song Han, Jeff Pool, Johj Tran, William J. Dally, “Learning both Weights and Connections for Efficient Neural Networks”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **28** (2015).
- [3] Jonathan Frankle, Michael Carbin, “The Lottery Ticket Hypothesis: Finding Sparse, Trainable Neural Networks”, *International Conference on Learning Representations*, 2019.
- [4] Zhuang Liu, Mingjie Sun, Tinghui Zhou, Gao Huang, Trevor Darrell, “Rethinking the Value of Network Pruning”, *International Conference on Learning Representations*, 2019.
- [5] Trevor Gale, Erich Elsen, Sara Hooker, “The State of Sparsity in Deep Neural Networks”, *ArXiv*, **abs/1902.09574** (2019).
- [6] Karen Simonyan, Andrew Zisserman, “Very Deep Convolutional Networks For Large-Scale Image Recognition”, *International Conference on Learning Representations*, 2015.
- [7] Alex Krizhevsky, “Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images”, 2009.
- [8] Цзя Лошчилов, Франк Хуттер, “SGDR: Stochastic Gradient Descent with Warm Restarts”, *International Conference on Learning Representations*, 2017.

²Для исключения влияния инициализации во всех экспериментах (в т.ч. при получении изначальной архитектуры с помощью вариационного дропаута) использовалась одна единственная фиксированная инициализация.

Bellonin K.V., Shokurov A.V.

Простой метод улучшения качества тренировки разреженных моделей с нуля

Existing pruning algorithms can achieve good quality on sparse neural networks. But the received sparse architectures, when training from scratch, often can't achieve the same quality as pruning (especially for very sparse networks).

In this work the weights restoring method to improve training from scratch quality is described.

Keywords: neural networks, pruning, sparse architectures, "the lottery ticket" hypothesis

References

- [1] Dmitry Molchanov, Arsenii Ashukha, Dmitry Vetrov, "Variational Dropout Sparsifies Deep Neural Networks", *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, **70** (2017), 2498–2507.
- [2] Song Han, Jeff Pool, Johj Tran, William J. Dally, "Learning both Weights and Connections for Efficient Neural Networks", *Advances in Neural Information Processing Systems*, **28** (2015).
- [3] Jonathan Frankle, Michael Carbin, "The Lottery Ticket Hypothesis: Finding Sparse, Trainable Neural Networks", *International Conference on Learning Representations*, 2019.
- [4] Zhuang Liu, Mingjie Sun, Tinghui Zhou, Gao Huang, Trevor Darrell, "Rethinking the Value of Network Pruning", *International Conference on Learning Representations*, 2019.
- [5] Trevor Gale, Erich Elsen, Sara Hooker, "The State of Sparsity in Deep Neural Networks", *ArXiv*, **abs/1902.09574** (2019).
- [6] Karen Simonyan, Andrew Zisserman, "Very Deep Convolutional Networks For Large-Scale Image Recognition", *International Conference on Learning Representations*, 2015.
- [7] Alex Krizhevsky, "Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images", 2009.
- [8] Ilya Loshchilov, Frank Hutter, "SGDR: Stochastic Gradient Descent with Warm Restarts", *International Conference on Learning Representations*, 2017.

О детектировании трещин в дорожном покрытии с использованием нейронной сети DAUNet

В. С. Половников¹, Д. В. Алексеев², И. В. Виноградов³

В данной работе решается задача сегментации трещин в дорожном покрытии. Предложена сеть Unet-подобной архитектуры с энкодером, представляющим из себя предобученный ResNet18 (без двух классифицирующих слоёв), и стандартным декодером. Показано, что данная архитектура в совокупности с сильной системой аугментации и удачно выбранной функцией потерь способна превзойти существующие решения по используемым в этой области метрикам оценки качества.

Ключевые слова: машинное обучение, нейронные сети, детектирование трещин

1. Введение

Задача попиксельной сегментации трещин дорожного покрытия на изображениях обращала на себя внимание многих исследователей, например [2], [3], [11] и [12]. В последнее время наиболее значимые результаты в этой области были достигнуты с использованием искусственных нейронных сетей. В данной работе показано, что относительно простая архитектура в совокупности с сильной системой аугментации и удачно выбранной функцией потерь способна превзойти существующие решения по точности сегментации.

¹*Половников Владимир Сергеевич* — научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: polovnikov@intsys.msu.ru

Polovnikov Vladimir Sergeevich — Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems

²*Алексеев Дмитрий Владимирович* — старший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alekseev@intsys.msu.ru

Alekseev Dmitriy Vladimirovich — Senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems

³*Виноградов Иван Владимирович* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ivan.vinogradoff@gmail.com

Vinogradov Ivan Vladimirovich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems

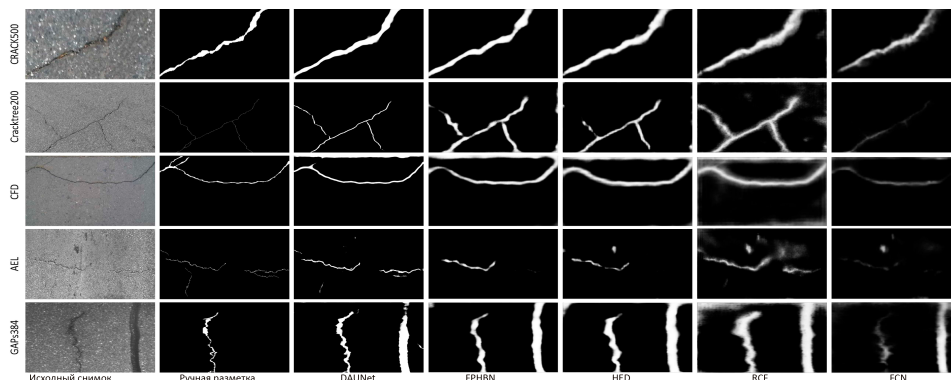


Рис. 1. Сравнение результатов работы различных методов сегментации. Слева направо: исходный снимок, ручная разметка, DAUNet (предложенный), FRHBN([2]), HED([3]), RCF ([11]), FCN([12]).

2. Описание подхода и полученного результата

Была построена сеть Unet-подобной архитектуры с энкодером, представляющим из себя предобученную сеть ResNet18 [1] (без двух классифицирующих слоёв), и стандартным декодером. Обучающим множеством было выбрано CRACK500 [2], состоящее из изображений асфальта и соответствующих бинарных карт трещин.

В качестве функции потерь на первом этапе была взята focal loss [4]. Её значение задаётся формулой

$$FL_{\alpha,\gamma}(Y_{gt}, Y_{pr}) = - \sum (Y_{gt} \cdot \log(Y_{pr})^{\alpha(1-Y_{pr})^\gamma} + (1-Y_{gt}) \cdot \log(1-Y_{pr})^{(1-\alpha)Y_{pr}^\gamma}),$$

где Y_{gt} – карта трещин, Y_{pr} – предсказание модели, α и γ – параметры, равные в нашем случае 0.25 и 2.

Для устранения размытости границ в предсказаниях трещин сеть была дообучена с использованием dice loss [7], формула которой для истинной карты трещин Y_{gt} и предсказанной карты трещин Y_{pr} дана ниже.

$$DL(Y_{gt}, Y_{pr}) = 1 - \frac{(1 + \beta^2) \cdot tp + \epsilon}{(1 + \beta^2) \cdot tp + \beta^2 \cdot fn + fp + \epsilon},$$

где $tp = \sum(Y_{gt} \cdot Y_{pr})$, $fn = \sum(Y_{gt} \cdot (1 - Y_{pr}))$, $fp = \sum((1 - Y_{gt}) \cdot Y_{pr})$, а β и ϵ – параметры, равные в нашем случае 1 и $1e - 5$. Выбор именно таких функций потерь был обусловлен следующими соображениями: focal loss придаёт большее значение тяжёлым для классификации пикселям, а dice loss по сути содержит в себе F1-метрику, увеличение которой приводит к ужесточению границ.

Обучение велось минибатчами, каждый из которых состоял из случайных кропов изображений обучающего множества. Для лучшей аугментации они были подвергнуты растяжениям, поворотам, отражениям и цветовым искажениям.

Оптимизация на первом этапе велась методом Adam [5] с косинусным уменьшением скорости обучения [6], на этапе дообучения – через стохастический градиентный спуск. Для оценки качества полученного результата использовались метрики AIU, ODS, OIS [2], а также предложенные в данной работе sODS и sOIS. Метрика AIU является усреднённым по всем возможным порогам отношением пересечения предсказанных и истинных областей трещин к их объединению, ODS – максимальным значением F-меры для объединения всех изображений, OIS – средним по всем изображениям значением максимальной F-меры, здесь под максимальной понимается максимальность по порогу бинаризации.

Таблица 1. Сравнение методов сегментации на наборе CRACK500

Methods	AIU	ODS	OIS	sODS	sOIS
DAUNet	0.565	0.676	0.706	0.750	0.731
FPHBN[2]	0.489	0.604	0.635	0.647	0.591
HED [3]	0.481	0.575	0.625	N/A	N/A
RCF [11]	0.403	0.490	0.586	N/A	N/A
FCN [12]	0.379	0.513	0.577	N/A	N/A

Таблица 2. Сравнение методов на наборе CrackTree200

Methods	AIU	ODS	OIS	sODS	sOIS
DAUNet	0.128	0.781	0.805	0.234	0.276
FPHBN[2]	0.041	0.517	0.579	0.095	0.125
HED [3]	0.040	0.317	0.449	N/A	N/A
RCF [11]	0.032	0.255	0.487	N/A	N/A
FCN [12]	0.008	0.334	0.333	N/A	N/A

ODS и OIS предполагают расчёт точности и полноты для скелетонизированных трещин, и за ними стоит алгоритм поиска оптимального паросочетания, подробно описанный в [13]. sODS и sOIS являются аналогичными метриками для пикселей трещин, взятых напрямую после бинаризации, их вычисление обходится без поиска паросочетаний.

Было проведено исследование вкладов составляющих получившейся системы в итоговый результат, выяснилось, что наибольшее влияние в смысле АИУ оказывает аугментация. Её наличие играет большую роль, чем выбор функции потерь (для сравнения рассматривались варианты бинарной кроссэнтропии и мера Жаккара), двухэтапность схемы обучения и предобученность используемой сети ResNet18.

В качестве тестовых множеств были взяты CRACK500 (та его часть, что не была задействована в обучении), CrackTree200 [10], CFD [9], AEL [2] и GAPS384 [8]. Поскольку обучение велось на CRACK500, а остальные множества имеют другие распределения толщин, их изображения были растянуты или сжаты, основываясь на одном изображении для каждого множества.

Разработанный метод сравнивался с FPHBN [2], HED [3], RCF [11] и FCN [12]. Для последних трёх использовались данные, предоставленные авторами, среди которых не было значений sODS и sOIS, поэтому по ним сравнение не проводилось. В оставшихся случаях разработанный метод показал лучшее качество. Ниже приводится сравнение с существующими методами на наборах CRACK500 (таб.1) и CrackTree200 (таб.2).

Список литературы

- [1] K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, “Deep Residual Learning for Image Recognition”, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, 2016, 770–778.
- [2] F. Yang, L. Zhang, S. Yu, D. Prokhorov, X. Mei, and H. Ling, “Feature Pyramid and Hierarchical Boosting Network for Pavement Crack Detection”, *IEEE Trans. Intell. Transp.*, **21**:4 (2020), 1525–1535.
- [3] S. Xie and Z. Tu, “Holistically-Nested Edge Detection,” pp. 1395–1403, ICCV, 2015
- [4] T. Lin, P. Goyal, R. Girshick, K. He, and P. Dollár, “Focal Loss for Dense Object Detection”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **42**:2 (2020), 318–327.
- [5] D. Kingma and J. Lei Ba, “Adam: A Method for Stochastic Optimization”, *arXiv:1412.6980v9*, 2014.
- [6] I. Loshchilov and F. Hutter, “SGDR: Stochastic Gradient Descent with Restarts”, *arXiv:1608.03983*, 2016.
- [7] F. Milletari, N. Navab, and S.-A. Ahmadi, “V-Net: Fully Convolutional Neural Networks for Volumetric Medical Image Segmentation”, *arXiv:1606.04797*, 2016.
- [8] M. Eisenbach, R. Stricker, D. Seichter, K. Amende, K. Debes, M. Sesselmann, D. Ebersbach, U. Stoeckert and H.-M. Gross, “How to Get Pavement Distress Detection Ready for Deep Learning? A Systematic Approach”, *International Joint Conference on Neural Networks*, 2017, 2039–2047.
- [9] Y. Shi, L. Cui, Z. Qi, F. Meng, and Z. Chen, “Automatic Road Crack Detection Using Random Structured Forests”, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **17**:12 (2016), 3434–3445.

- [10] Q. Zou, Y. Cao, Q. Li, Q. Mao, and S. Wang, “Cracktree: Automatic Crack Detection from Pavement Images”, *Pattern Recognition Letters*, **33**:3 (2012), 227–238.
- [11] Y. Liu, M.-M. Cheng, X. Hu, K. Wang, and X. Bai, “Richer Convolutional Features for Edge Detection”, *CVPR*, 2017, 5872–5881.
- [12] J. Long, E. Shelhamer, and T. Darrell, “Fully Convolutional Networks for Semantic Segmentation”, *CVPR*, 2015, 3431–3440.
- [13] D. R. Martin, C. C. Fowlkes and J. Malik, “Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **26**:5 (2004), 530–549.

**On pavement crack detection using DAUNet neural network
Polovnikov V.S., Alekseev D.V., Vinogradov I.V.**

This work is devoted to road pavement cracks segmentation problem. Proposed a Unet-like network with a pre-trained ResNet18 as an encoder (without two last classification layers) and a standard decoder is proposed. It is shown that this architecture, together with a strong augmentation system and a well-chosen loss function, is capable of surpassing state-of-the-art solutions in terms of various quality metrics. *Keywords:* machine learning, neural networks, crack detection

References

- [1] K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, “Deep Residual Learning for Image Recognition”, *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, 2016, 770–778.
- [2] F. Yang, L. Zhang, S. Yu, D. Prokhorov, X. Mei, and H. Ling, “Feature Pyramid and Hierarchical Boosting Network for Pavement Crack Detection”, *IEEE Trans. Intell. Transp.*, **21**:4 (2020), 1525–1535.
- [3] S. Xie and Z. Tu, “Holistically-Nested Edge Detection,” pp. 1395–1403, ICCV, 2015
- [4] T. Lin, P. Goyal, R. Girshick, K. He, and P. Dollár, “Focal Loss for Dense Object Detection”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **42**:2 (2020), 318–327.
- [5] D. Kingma and J. Lei Ba, “Adam: A Method for Stochastic Optimization”, *arXiv:1412.6980v9*, 2014.
- [6] I. Loshchilov and F. Hutter, “SGDR: Stochastic Gradient Descent with Restarts”, *arXiv:1608.03983*, 2016.
- [7] F. Milletari, N. Navab, and S.-A. Ahmadi, “V-Net: Fully Convolutional Neural Networks for Volumetric Medical Image Segmentation”, *arXiv:1606.04797*, 2016.
- [8] M. Eisenbach, R. Stricker, D. Seichter, K. Amende, K. Debes, M. Sesselmann, D. Ebersbach, U. Stoeckert and H.-M. Gross, “How to Get Pavement Distress Detection Ready for Deep Learning? A Systematic Approach”, *International Joint Conference on Neural Networks*, 2017, 2039–2047.

- [9] Y. Shi, L. Cui, Z. Qi, F. Meng, and Z. Chen, “Automatic Road Crack Detection Using Random Structured Forests”, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **17**:12 (2016), 3434–3445.
- [10] Q. Zou, Y. Cao, Q. Li, Q. Mao, and S. Wang, “Cracktree: Automatic Crack Detection from Pavement Images”, *Pattern Recognition Letters*, **33**:3 (2012), 227–238.
- [11] Y. Liu, M.-M. Cheng, X. Hu, K. Wang, and X. Bai, “Richer Convolutional Features for Edge Detection”, *CVPR*, 2017, 5872–5881.
- [12] J. Long, E. Shelhamer, and T. Darrell, “Fully Convolutional Networks for Semantic Segmentation”, *CVPR*, 2015, 3431–3440.
- [13] D. R. Martin, C. C. Fowlkes and J. Malik, “Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **26**:5 (2004), 530–549.

Градиентная маска: как механизм латерального торможения улучшает работу искусственных нейронных сетей

Л. Цзян¹

В настоящей работе мы предлагаем *градиентную маску*, которая отфильтровывает градиенты шума в процессе обратного распространения. Такое обучение позволяет увеличивать плотность и амплитуду представления сигналов в сети. В работе мы представляем новую меру качества градиента. Мы демонстрируем аналитическими методами, как латеральное торможение в искусственных нейронных сетях улучшает качество распространяемых градиентов. Наконец, проводим несколько различных экспериментов, чтобы изучить, как *градиентная маска* улучшает количественную и качественную производительность сети.

Ключевые слова: латеральное торможение, градиентная маска, свёрточные нейронные сети.

1. Введение

Во время обратного распространения ошибки градиенты генерируются для всех признаков, а затем участвуют в обновлении соответствующих весов. В работе [1] показано, что не все градиенты важны для обучения.

Наша модель придает величину градиентам признаков каждого сверточного слоя с помощью оператора Лапласа Гаусса (*LoG*), который имеет распределение «Мексиканской шляпы», сходное с модуляцией внимания в биологическом мозге. Во время обратного распространения ошибки *LoG* подавляет часть менее важных градиентов.

Чтобы обосновать использование латерального торможения мы предлагаем новый критерий для измерения важности каждого признака в зависимости от градиента матрицы признаков.

1.1. Градиентная маска

Для сверточного слоя $l \in \mathbb{R}^{u,v}$, мы равномерно делим матрицу признаков на K непересекающихся матриц — *набор признаков*. Для каждого

¹Цзян Лэй — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kiwee@outlook.com

Jiang Lei — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

набора признаков градиенты с одной и той же координатой составляют в вектор, называемый *миниколонкой*, а миниколонку в координатах (i, j) k -го множества мы обозначим как $M_{ij}^l(k)$. Далее вычисляем норму $\|M_{ij}^l(k)\|_2$, чтобы представить величину градиентов в этой миниколонке. Затем для каждого k мы применяем оператор LoG к матрице, составленной из $\|M_{ij}^l(k)\|_2$ для всех $0 \leq i \leq u, 0 \leq j \leq v$. Этот процесс выполняется с помощью свертки с ядром:

$$LoG(i, j) = \frac{\partial^2 G_\sigma(i, j)}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 G_\sigma(i, j)}{\partial j^2} = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left[1 - \frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2} \right] e^{-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

где (i, j) — координаты ядра свертки LoG , а $G_\sigma(i, j)$ — это гауссовская свертка со стандартным отклонением σ . Пусть $\delta_{ij}^l(k)$ обозначает результат свертки LoG на соответствующей части. Установив порог, равный ϵ , мы можем определить *градиентную маску*: $Mask^l(k) = [a_{ij}]_{u \times v}$, где:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & , |\delta_{ij}^l(k)| < \epsilon \\ 1 & , |\delta_{ij}^l(k)| \geq \epsilon \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку маска градиента $Mask^l(k)$ соответствует k -му набору матриц признаков, фильтры, соответствующие этому набору, используют одну и ту же маску $Mask^l(k)$. Во время обратного распространения каждый градиент проходит через градиентную маску. Пусть L обозначает функцию потерь, тогда градиент веса w_{mn}^l на фильтре может быть записан как:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{mn}^l} = \underbrace{\sum_{(i,j), a_{ij}=0} \frac{\partial L}{\partial a_{ij}^l} \frac{\partial a_{ij}^l}{\partial w_{mn}^l}}_{=0} + \underbrace{\sum_{(i',j'), a_{i'j'} \neq 0} \frac{\partial L}{\partial a_{i'j'}^l} \frac{\partial a_{i'j'}^l}{\partial w_{mn}^l}}_{\neq 0} \quad (3)$$

Градиенты несущественных признаков приравниваются к 0, что помогает при обучении снизить шум в весах признаков. Как экспериментально показано далее, это улучшает способность модели к обобщению.

1.2. Чувствительность градиентного потока

Будем рассматривать градиентную маску с аналитической точки зрения. Пусть $g_{mn}^l = \frac{\partial L}{\partial w_{mn}^l}$ обозначает градиент веса на l -м сверточном слое, где L — функция потерь, а (x, y) — координаты в матрице признаков этого слоя. В данном разделе мы будем рассматривать только сети, использующие функцию активации ReLU.

Мы определяем *чувствительность градиентного потока* s_{mn}^l как модуль лапласиана градиента в двумерном пространстве:

$$s_{mn}^l := |\Delta g_{mn}^l| = \left| \frac{\partial^2 g_{mn}^l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{mn}^l}{\partial y^2} \right| \quad (4)$$

Если мы рассматриваем лапласиан g_{mn}^l как дивергенцию векторного поля, то значение s_{mn}^l в определенной точке матрицы признаков указывает, до какой степени эта точка является «источником» градиента g_{mn}^l . Каждая точка может быть как положительным, так и отрицательным источником. Точки с более высокой чувствительностью к градиентному потоку более важны для градиента g_{mn}^l . При обратном распространении лапласиан градиента можно переписать следующим образом:

$$\Delta g_{mn}^l = \sum_{i,j} \Delta \left(\frac{\partial L}{\partial a_{ij}^l} \frac{\partial a_{ij}^l}{\partial w_{mn}^l} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}^l}{\partial w_{mn}^l} \Delta \frac{\partial L}{\partial a_{ij}^l} \quad (5)$$

Здесь $\frac{\partial a_{ij}^l}{\partial w_{mn}^l} \geq 0$ — производная от функции активации, заданная на входе нейрона, которую можно рассматривать как константу. Так как мы рассматриваем сеть с функцией активации ReLU, её производная неотрицательна. Рассматривая заданную точку (i', j') на матрице признаков, мы обозначим чувствительность градиентного потока в этой точке как $s_{mn}^l(i', j')$, а её лапласиан как $\Delta_{(i',j')} g_{mn}^l$, тогда мы имеем

$$\Delta_{(i',j')} g_{mn}^l = \frac{\partial a_{i',j'}^l}{\partial w_{mn}^l} \Delta \frac{\partial L}{\partial a_{i',j'}^l} \quad s_{mn}^l(i', j') = \frac{\partial a_{i',j'}^l}{\partial w_{mn}^l} \left| \Delta \frac{\partial L}{\partial a_{i',j'}^l} \right| \quad (6)$$

Чувствительность градиентного потока в определенной точке на матрице признаков положительно коррелирует с лапласианом градиента признака в этой точке. Так как высокая чувствительность потока указывает на большую значимость для градиента, то и маскирование градиентного потока в точке с более низкими значениями LoG эквивалентно обнулению элементов, которые не важны для обновления веса.

2. Эксперименты

Были проведены эксперименты по классификации на ImageNet (8 Tesla V100 GPUs) и CIFAR-100 (1 Tesla V100 GPU). Подробная информация о гиперпараметрах обучения: learning rate 0.1, epoch 120, optimizer SGD. Эксперименты показали, что использование градиентной маски улучшает точность классификации. В таблице 1 представлены результаты ResNet на двух наборах данных.

Чтобы выяснить, какие факторы наиболее значимы, были поставлены два эксперимента: в первом вместо латерального торможения используется L_2 -норма градиентов внутри миниколонки; во втором латеральное торможение LoG используется для каждой ячейки матрицы без выделения миниколонок. Результаты на CIFAR-100 представлены в таблице 2, где мы видим, что LoG имеет решающее значение для генерации градиентной маски. Использование миниколонок также увеличивает точность.

Модель	CIFAR-100 (ResNet-18)	ImageNet (ResNet-50)
ResNet-18/50	78.2	75.5
ResNet-18/50 с ЛТ	80.26	76.01

Таблица 1. Точность (%) ResNet-18/50 с/без латеральным торможением (ЛТ) на CIFAR-100 и ImageNet

Модель	ЛТ на миниколонках	Без ЛТ	ЛТ без миниколонок
Ассурасу	80.26	75.86	78.97

Таблица 2. Точность (%) ResNet-18 с/без латерального торможения (ЛТ) и миниколонок на CIFAR-100

Список литературы

- [1] Lan Janice, Liu Rosanne, Zhou Hattie, Yosinski Jason, “Lca: Loss change allocation for neural network training”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **32** (2019), 3619–3629.
- [2] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun, *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2016.

Gradient Mask: Lateral Inhibition Mechanism Improves Performance in Artificial Neural Networks

Jiang Lei

In this paper we propose **Gradient Mask**, which helps the network to filtering out noisy or unimportant features while training. We propose a new criterion for gradient quality which can be used as a measure during training of various convolutional neural networks (CNNs). We demonstrate analytically how lateral inhibition in artificial neural networks improves the quality of propagated gradients. Finally, we conduct several different experiments to study how **Gradient Mask** improves the performance of the network both quantitatively and qualitatively.

Keywords: lateral inhibition, gradient masking, convolutional neural networks

References

- [1] Lan Janice, Liu Rosanne, Zhou Hattie, Yosinski Jason, “Lca: Loss change allocation for neural network training”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **32** (2019), 3619–3629.
- [2] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun, *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2016.

Об улучшениях нейросетевой архитектуры для приближения кусочно-линейных функций

В. Г. Шишляков¹

Работа представляет собой продолжение исследований в области оценок архитектур нейронных сетей, достаточных для приближения определенных классов функций. В работе рассматривается вопрос об улучшении оценки сверху архитектуры нейронной сети, которая хорошо приближает зависимости, описываемые кусочно-линейными функциями.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, нейронные сети, аппроксимация функций, кусочно-линейные функции.

1. Введение

С точки зрения схем функциональных элементов [1] нейронные сети были впервые рассмотрены в работе [2]. Также в работе [2] были рассмотрены оценки архитектур нейронных схем, восстанавливающих кусочно-постоянные функции над классическим базисом МакКаллока и Питтса, а также восстанавливающих кусочно-линейные функции над базисом $B = \{c, \gamma \cdot x, \sum_n(x_1, \dots, x_n), \theta(x), F(x, y)\}$, где $F(x, y) = \begin{cases} x, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

В дальнейшем в работе [3] были получены результаты, оценивающие сверху количество нейронов в нейронных сетях над видоизмененным базисом $B_2 = \{c, \gamma \cdot x, \sum_n(x_1, \dots, x_n), \prod_n(x_1, \dots, x_n), \psi(x)\}$, где $\psi(x)$ - некоторая сигмоидная функция. В базисе B_2 рассматривалась задача аппроксимации кусочно-линейных функций, т.к. задача восстановления, вообще говоря, была уже невозможна.

В данной работе предлагается результат, улучшающий оценку сверху, представленную в работе [3] для базиса B_2 , а также существенное улучшение оценки, которое получается при выборе в базисе B_2 функции $\psi(x)$, нечетной относительно уровня $\frac{1}{2}$.

¹Шишляков Владимир Геннадьевич — аспирант каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotmaks@yandex.ru.

Shishlyakov Vladimir Gennad'evich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные понятия, используемые в данной работе.

Базисом нейронной сети называется некоторое множество функциональных элементов, где каждый функциональный элемент представляет из себя пару $(S, f(x_1, \dots, x_n))$, в которой $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, а S - сопоставленный ей графический объект с n входными стрелками и одной выходной (кратко – входы и выход объекта S). Входам объекта приписаны слева направо переменные x_1, \dots, x_n функции f , выходу приписан выход функции f .

Далее в тексте, для краткости, графические обозначения объектов опускаются.

Функцию $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ будем называть сигмоидной, если ψ не убывает на \mathbb{R} и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 1$.

В теоремах 1, 2, сформулированных ниже, рассматривается построение нейронных сетей над следующим базисом:

$$B_1 = \{c, \gamma \cdot x, \sum_n(x_1, \dots, x_n), \prod_n(x_1, \dots, x_n), \psi(x)\} \quad (1)$$

В базисе (1) используются следующие виды функций:

- 1) Сумматор – класс функций вида $\sum_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$
- 2) Продуктор – класс функций вида $\prod_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$
- 3) Константа – класс функций, каждая из которых выдает некоторую константу (все эти функции не имеют существенных переменных)
- 4) Усилитель – функция, умножающая пришедший на вход аргумент x на фиксированную константу γ
- 5) Функция активации – произвольная сигмоидная функция $\psi(x)$

Нейроном в базисе (1) назовем всякую схему, вычисляющую одну из функций $\varphi(\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + c)$ или $\varphi(\prod_{i=1}^n w_i \cdot x_i + c)$, где функция $\varphi(x)$ полагается равной либо $\psi(x)$, либо x .

Все нейроны первого типа будем называть нейронами-сумматорами, а нейроны второго типа – нейронами-продукторами.

Введем понятие слоя нейронной сети.

1) Множество нейронов, все входы которых не подсоединены к выходам каких-либо функциональных элементов, назовем нейронами первого слоя.

2) Пусть определено множество нейронов n -го слоя. Тогда $n + 1$ -ым слоем назовем все нейроны, для которых выполняется, что хотя бы один вход подсоединен к выходу нейрона n -го слоя, а все оставшиеся входы подсоединены либо к выходам нейронов из слоев $\{1, 2, \dots, n\}$, либо не подсоединены ни к каким нейронам.

Таким образом, можно комбинировать не отдельные элементы базиса схемы, а целые схемы, реализующие нейроны. При комбинации нейронов друг с другом, будут получаться различные функции, которые и будут исследоваться в данной работе. Особый интерес для данного исследования представляют так называемые кусочно-линейные функции. Дадим их определение, следуя определениям из [2].

Пусть пространство \mathbb{R}^n разбивается на классы эквивалентности R^1, \dots, R^s гиперплоскостями l_1, \dots, l_k . Будем говорить, что $f(\bar{x})$ является кусочно-линейной, если $f(\bar{x})|_{R^j} = \bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j$.

Также введем ряд определений и обозначений, которые позволяют облегчить формулирование дальнейших теорем.

Пусть даны гиперплоскости l_1, \dots, l_k , разбивающие пространство \mathbb{R}^n на классы R^1, \dots, R^s . Назовем класс R^p плоским, если $\exists l_i : R^p \subset l_i$. Все классы, не являющиеся плоскими, назовем объемными.

Также введем несколько полезных обозначений. Пусть l_1, \dots, l_k - гиперплоскости. Возьмем $\forall \xi > 0$ и рассмотрим множества

$$L_{i,\xi} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |l_i(\bar{x})| < \xi\}, i = 1, \dots, k. \text{ Обозначим } L_\xi = \bigcup_{i=1}^k L_{i,\xi}.$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ является нечетной относительно уровня y , если $f(x) - y = -(f(-x) - y)$.

Основными выводами данной работы являются две теоремы, сформулированные ниже.

Теорема 1. Пусть l_1, \dots, l_k - гиперплоскости, которые разбивают пространство \mathbb{R}^n на s классов эквивалентности R^1, \dots, R^s , из которых s' классов являются объемными, а $f(\bar{x})$ - кусочно-линейная функция, заданная над данными классами эквивалентности.

Тогда $\forall \varepsilon > 0, \forall \xi > 0, \forall R > 0$ существует нейронная сеть $G(\bar{x})$ над базисом (1) такая, что выполняется $\sup_{\bar{x} \in O_R(\bar{0}) \setminus L_\xi} |G(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. При-

чем данная нейронная сеть обладает следующей архитектурой:

1. На первом слое потребуется не более $2k$ нейронов-сумматоров, имеющих функцию активации $\varphi(x) = \psi(x)$;

2. На втором слое потребуется $2s'' \leq 2s'$ нейронов, из которых s'' нейронов имеют функцию активации $\varphi(x) = \psi(x)$, а остальные s'' нейронов - $\varphi(x) = x$;

3. На третьем слое потребуется s' нейронов-продукторов с тождественной функцией активации;

4. На четвертом слое потребуется один нейрон-сумматор с тождественной функцией активации.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 с тем лишь условием, что функция $\psi(x)$ является нечетной относительно уровня $\frac{1}{2}$. Тогда количество нейронов на первом слое в нейронной сети $G(\bar{x})$ из теоремы 1 можно сократить с $2k$ до k , оставив все оставшиеся слои без изменений.

Автор выражает благодарность младшему научному сотруднику Половникову В.С. и доценту Часовских А.А. за постановку задачи.

Список литературы

- [1] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, eds. физ.-мат.лит., «Наука», Москва, 1986.
- [2] Половников В.С., *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, Москва, 2007.
- [3] Шишляков В.Г., *Построение архитектуры нейронной сети, достаточной для приближения всякой кусочно-линейной функции с любой наперед заданной точностью*, Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XIX международной конференции (Казань, 27 сентября – 01 октября 2021 года), eds. Ю.И. Журавлев, МАКС Пресс, Москва, 2021.

Improvements to neural network architecture for approximating particle-linear functions Shishlyakov V.G.

This work continues series of works in neural networks architectures estimatons approximating some classes of functions. The following paper considers the problem of improving upper-bound estimation of neural network closely approximating particle-linear dependences.

Keywords: schema of functional elements, neural networks, functions approximation, particle-linear functions.

References

- [1] YAblonskij S.V., *Introduction to discrete mathematics*, eds. fiz.-mat.lit., «Science», Moscow, 1986 (In Russian).
- [2] Polovnikov V.S., *On optimization of the structural implementation of neural networks*, Ph.D. Thesis, MSU, Moscow, 2007 (In Russian).
- [3] Shishlyakov V.G., *Building a neural network architecture sufficient to approximate any particle-linear function with any predetermined accuracy*, Problems of theoretical cybernetics. Materials of the XIX international conference (Kazan, 27 sep. – 01 oct. 2021), eds. YU.I. ZHuravlev, MAKS Press, Moscow, 2021 (In Russian).

Часть 6.
Интеллектуальное управление,
роботы и биомехатронные системы

Генетические алгоритмы в задаче синтеза распределенных регуляторов

Е. И. Атамась¹ А. С. Герценштейн²

В работе предлагается метод построения распределенного регулятора специального вида для стабилизации системы с запаздыванием, основанный на использовании генетических алгоритмов. Проводится численное моделирование и анализ полученных результатов.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, стабилизация, генетические алгоритмы.

1. Введение

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием, часто возникают при моделировании систем, в которых вещество, информация или энергия физически передаются из одного места в другое, в результате чего возникает задержка, связанная с временем передачи. Наличие запаздываний, особенно длительных, значительно усложняет процесс анализа системы и построения для них регуляторов.

Выделяют два важных класса систем с запаздыванием. В первом случае предполагается, что запаздывания сосредоточены в дискретном (чаще всего, конечном) множестве точек. Такие системы называют системами с сосредоточенными запаздываниями. Более общий случай представляют собой системы с распределенным запаздыванием, величина запаздывания в которых может быть сосредоточена на множестве положительной меры.

Известно, что для решения стандартных задач управления для систем с сосредоточенными запаздываниями иногда приходится привлекать регуляторы, содержащий интегральное слагаемое с распределенной

¹Атамась Евгений Иванович — ассистент каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ, e-mail: eatamas@cs.msu.ru.

Atamas Evgeny Ivanovich — assistant professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

²Герценштейн Александра Сергеевна — студентка каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ.

Gertsenshteyn Alexandra Sergeevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

задержкой [1]. К таким методам относится, в частности метод назначения конечного спектра или Finite Spectrum Assignment (FSA). В простейших случаях известен алгоритм построения стабилизирующего регулятора для систем с запаздыванием с использованием этого метода. Целью данной работы является поиск параметров такого регулятора с использованием интеллектуальных методов, что позволит в дальнейшем применить разработанный подход на более сложные классы систем.

2. Постановка задачи и алгоритм

Рассматривается класс скалярных систем с запаздыванием, описываемых с помощью передаточной функции:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a(s)}{b(s)}e^{-Ls}U(s) \quad (1)$$

где $a(s)$ и $b(s)$ — взаимно простые полиномы степени m и n соответственно, $m \leq n - 1$, $b(s)$ — монический полином, не имеющий кратных корней, $L > 0$ — запаздывание по времени.

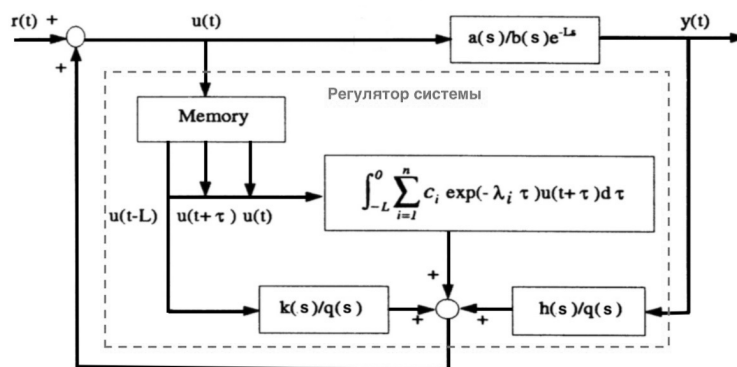


Рис. 1. Схема замкнутой системы, где $r(t)$ — задающее воздействие, $y(t)$ — выходной сигнал, $u(t)$ — управляющий сигнал.

Система, заданная уравнением (1), не содержит обратной связи, поэтому для нее нет возможности изменить спектр. Замкнем систему обратной связью, содержащей регулятор специальной формы, сходной с используемым в методе FSA регулятором. Мы будем рассматривать рас-

пределенный регулятор, содержащий интегральное слагаемое вида:

$$\int_{-L}^0 \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i \tau} u(t + \tau) d\tau. \quad (2)$$

В результате передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$W(s) = \frac{a(s)q(s)e^{-Ls}}{(b(s) - f(s))q(s) - (b(s)k(s) - q(s)f_L(s) + a(s)h(s))e^{-Ls}}. \quad (3)$$

Здесь $a(s)$ — полином степени $m \leq n - 1$, $b(s)$ — монический полином степени n без кратных корней, $a(s)$ и $b(s)$ — взаимно простые, $p(s)$ — монический устойчивый полином степени n , соответствующий желаемому спектру системы, $q(s)$ — монический устойчивый полином степени $n - 1$, соответствующий спектру наблюдателя в системе, $k(s)$ — полином степени не выше $n - 2$, $h(s)$ — полином степени не выше $n - 1$.

С помощью $p(s)$ и $q(s)$ задаются желаемые свойства замкнутой системы, полиномы $h(s)$ и $k(s)$ — доступные для настройки параметры регулятора.

Знаменатель передаточной функции представляет собой квазиполином запаздывающего типа. Известно [3], что для уравнений рассматриваемого вида правее любой вертикальной прямой на комплексной плоскости содержится не более, чем конечное число корней, а, следовательно, не более, чем конечное число неустойчивых корней. Данное свойство дает возможность корректно определить спектральную абсциссу, на которой расположен самый правый корень рассматриваемого квазимногочлена.

Для проверки устойчивости системы достаточно исследовать корни квазиполинома, находящегося в знаменателе передаточной функции. Отсутствие корней справа от мнимой оси гарантирует устойчивость квазиполинома и вследствие этого устойчивость всей системы.

Для синтеза распределенного регулятора с помощью генетического алгоритма необходимо определить целевую функцию. В качестве нее в данной задаче будет браться спектральная абсцисса — значение максимальной действительной части среди всех корней квазимногочлена запаздывающего типа.

В случае отсутствия корней в правой полуплоскости коэффициенты для неизвестных полиномов $h(s)$ и $k(s)$, входящих в искомый распределенный регулятор системы, можно считать найденными. Для поиска корней квазиполинома запаздывающего типа использовалась библиотека [5].

Полученный алгоритм был протестирован на различных системах рассматриваемого типа и проверен на корректность работы с помощью численного моделирования в системе MATLAB/Simulink.

3. Выводы

Численное моделирование предложенного алгоритма показало его эффективность. В процессе тестирования и моделирования были выявлены общие тенденции зависимости скорости поиска решения от параметров генетического алгоритма и вида исходной системы. Под временем поиска решения в данном случае понимается номер итерации, на котором решение было найдено.

- При увеличении размера популяции время поиска сокращалось.
- Изменение количества мутаций не всегда приводило к уменьшению времени поиска. Но за счет увеличения числа мутаций сохранялось разнообразие в популяции, что не давало возможности популяции сойтись к единственному вектору, не являющемуся решением.
- При увеличении величины запаздывания или степеней числителя и знаменателя в случае систем с запаздыванием увеличивалось количество итераций, требуемых для поиска решения.
- Изменение способа инициализации начальной популяции, то есть выбор диапазона значений, из которого генерируются вектора начальной популяции, в какой-то степени зависит от значений коэффициентов исходной системы. Удачная инициализация давала достаточное разнообразие особей в популяции для дальнейшего поиска решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых - кандидатов наук МК-4905.2021.1.1.

Список литературы

- [1] Wang Q., Lee T.H., Tan K.K., *Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems*, Springer, London, 1999, 124 с.
- [2] Zhong Q., *Robust Control of Time Delay Systems*, Springer, London, 2006, 231 с.
- [3] Bellman, R., Cooke, K., *Differential-Difference Equation*, RAND Corporation, Santa Monica, 1963, 482 с.
- [4] Whitley, Darrell, "A genetic algorithm tutorial", *Statistics and Computing*, **4:2** (1994), 65–85
- [5] Tomas Vyhlidal, Pavel Zitek, "Quasipolynomial mapping based rootfinder for analysis of time delay systems", *IFAC Proceedings Volumes*, **36:9** (2003), 227-232

Genetic Algorithms in Distributed Regulator Synthesis problem
Atamas E.I., Gertsenshteyn A.S.

The paper proposes a method for constructing a distributed controller of a special type for the stabilization of a system with a delay, based on the use of genetic algorithms. Numerical modeling and analysis of the obtained results are carried out.

Keywords: time-delay systems, stabilization, genetic algorithms.

References

- [1] Wang Q., Lee T.H., Tan K.K., *Finite Spectrum Assignment for Time-Delay Systems*, Springer, London, 1999, 124 c.
- [2] Zhong Q., *Robust Control of Time Delay Systems*, Springer, London, 2006, 231 c.
- [3] Bellman, R., Cooke, K., *Differential-Difference Equation*, RAND Corporation, Santa Monica, 1963, 482 c.
- [4] Whitley, Darrell, "A genetic algorithm tutorial", *Statistics and Computing*, **4:2** (1994), 65–85
- [5] Tomas Vyhlidal, Pavel Zitek, "Quasipolynomial mapping based rootfinder for analysis of time delay systems", *IFAC Proceedings Volumes*, **36:9** (2003), 227-232

Образовательный проект по созданию прототипа мобильного робота для раздельного сбора мусора на базе Университетской гимназии МГУ

О. И. Гончаров¹ Д. В. Злобин¹ И. С. Мокроусов¹

Рассматривается опыт учебного робототехнического проекта реализуемого сотрудниками факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова на базе Университетской гимназии (школа-интернат) МГУ имени М. В. Ломоносова. В работе приводится описание проекта и его текущие результаты. Представляются промежуточные итоги педагогической деятельности, рассматриваются вопросы о сложности ведения проектов по робототехнике и их соответствии уровню образования учащихся старших классов.

Ключевые слова: Научно-исследовательский образовательный проект, робототехника, образовательная модель.

1. Введение

Данный доклад посвящен образовательному проекту по созданию прототипа мобильного робота для сборки мусора, выполняемому на базе Университетской гимназии МГУ.

В рамках данного проекта предполагается создать прототип мобильного робота, способного собирать отдельные типы мусора. Такая постановка задачи позволяет затронуть большой спектр областей (конструирование, математическое моделирование, программирование, машинное

¹Гончаров Олег Игоревич — доцент каф. нелинейных динамических систем и процессов управления, ф-та ВМК МГУ, e-mail: goncharovoi@yandex.ru.

Goncharov Oleg Igorevich — assistant professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamic Systems and Control processes.

¹Злобин Дмитрий Васильевич — аспирант каф. нелинейных динамических систем и процессов управления, ф-та ВМК МГУ, e-mail: dimz94@mail.ru.

Zlobin Dmitry Vasilievich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamic Systems and Control processes.

¹Мокроусов Илья Сергеевич — ассистент каф. общей математики, ф-та ВМК МГУ, e-mail: mokrousov.ilya@cs.msu.ru.

Mokrousov Ilya Sergeevich — assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.

обучение), которые являются весьма сложными для освоения даже студентами высших учебных заведений.

2. Описание проекта

Прототип мобильного робота представляет собой простую колесную платформу, оснащенную схватом, адаптированным для захвата мусора. Система управления робота основана на ROS (Robot Operation System) [1]. Робот оснащен 2D лидаром и навигационной подсистемой, дающей ему возможность автономно передвигаться в пространстве, решая задачи поиска мусора, доставки его к месту сбора, обхождения препятствий. Также на роботе установлена камера, видеопоток с которой используется подсистемой распознавания изображений для идентификации мусора.

План реализации проекта предполагал следующее:

- 1) Учащиеся знакомятся с ROS на базовом уровне, достаточном для запуска симуляции робота TurtleBot [2].
- 2) По мере дальнейшего освоения ROS начинается постепенная эволюционная модификация этой модели:
 - модель робота заменяется на собственную;
 - добавляются программные компоненты, реализующие “базовые навыки”;
 - осваивается навигационный стек ROS, реализующий навыки движения;
- 3) Полученные компоненты объединяются в общую систему, активирующую тот или иной навык в зависимости от текущей ситуации.
- 4) После того, как получены удовлетворительные результаты на модели, начинается поэтапный переход на реальное оборудование. При этом планируется использовать любую ROS-совместимую мобильную платформу и оснастить ее схватом собственной конструкции.

Такой план позволяет сохранить интерес учащегося, путем быстрого перехода от изучения ROS к работе с симуляцией и дает достаточное время на освоение системы, позволяя при этом разделить подзадачи между школьниками в зависимости от профиля их обучения.

3. Основные образовательные результаты

За первый год обучения гимназисты:

- освоили работу с ROS, научились создавать собственные пакеты ПО для ROS;

- определили общий облик прототипа с учетом возможностей технической базы гимназии;
- разработали проект системы управления, реализовали ее основные модули;
- провели испытания системы в физическом симуляторе Gazebo [3];
- выбрали робот TurtleBro [4] в качестве мобильной платформы для перехода на реальное оборудование.

Значительную сложность при реализации проекта вызвало отсутствие у гимназистов навыков практического программирования. Несмотря на базу в виде знакомства с языком C/C++ и хорошую алгоритмическую подготовку (умение решать олимпиадные задачи) возникли сложности с освоением совместной работы (репозитории git), использованием сторонних библиотек, в том числе с умением читать документацию, с оформлением собственного кода в виде программного пакета, снабженного средствами сборки (make) и документацией.

В процессе работы пришлось пойти на ряд компромиссов, чтобы обеспечить реализуемость проекта:

- Используется простейший подход к реализации верхнего уровня системы управления: конечный автомат, написанным на C++.
- Множество распознаваемых типов мусора ограничено алюминиевыми банками и пол-литровыми пластиковыми бутылками. Их размеры и масса хорошо соответствуют возможностями платформы, но при этом они являются сложным объектом для выделения на изображении.

4. Дальнейшие планы

На текущий момент основной целью проекта является освоение работы с реальным оборудованием и совершенствование системы машинного зрения. Предпринимаются усилия по следующим направлениям:

- 1) Запуск навигационного стека на роботе TurtleBro.
- 2) Совершенствование алгоритма патрулирование местности.
- 3) Обучение нейронной сети YOLOv4-tiny [5] для детектирования алюминиевых банок и пластиковых бутылок.
- 4) Создание схвата.

5. Выводы

Реализация подобных проектов гимназистами вполне возможна, но следует предпринять дополнительные усилия по сокращению материала, требующего изучения. Высокий уровень сложности проекта связан с разнообразием задач. В дальнейшем имеет смысл использовать больше готовых решений и сконцентрироваться на реализации только ключевых частей проекта.

Список литературы

- [1] Open Robotics, “ROS - Robot Operating System”, <https://www.ros.org/>.
- [2] Open Source Robotics Foundation, “TurtleBot”, <https://www.turtlebot.com/>.
- [3] Open Source Robotics Foundation, “Gazebo”, <https://www.gazebo.org/>.
- [4] ООО «ИРН-Ресёрч», “TurtleBro”, <http://turtlebro.ru/>.
- [5] Alexey Bochkovskiy, “Yolo v4, v3 and v2 for Windows and Linux”, <https://github.com/AlexeyAB/darknet>.

Educational project of creating a prototype of a mobile robot for separate waste collection based on the University Gymnasium of MSU

Goncharov O.I. Zlobin D.V. Mokrousov I.S.

Considered the experience of the educational robotic project implemented by the staff of Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of the Lomonosov State University of Moscow on the basis of the University Gymnasium (boarding school) of MSU. The paper provides a description of the project and its current state. Presented the interim results of pedagogical activity. Considered questions about the complexity of running projects in robotics and their compliance with the level of education of senior students.

Keywords: research educational project, robotics, educational model.

References

- [1] Open Robotics, “ROS - Robot Operating System”, <https://www.ros.org/>.
- [2] Open Source Robotics Foundation, “TurtleBot”, <https://www.turtlebot.com/>.
- [3] Open Source Robotics Foundation, “Gazebo”, <https://www.gazebo.org/>.
- [4] ООО «ИРН-Ресёрч», “TurtleBro”, <http://turtlebro.ru/>.
- [5] Alexey Bochkovskiy, “Yolo v4, v3 and v2 for Windows and Linux”, <https://github.com/AlexeyAB/darknet>.

Использование разреженной структуры матриц Якоби и Гессе для ускорения численного решения задач оптимального планирования траекторий

Д. В. Злобин¹

В данной работе рассматриваются задачи нелинейного программирования, в которых целевой функционал и функции ограничений заданы относительно небольшими выражениями, содержащими переменные с индексами.

За счет анализа зависимости выражений задачи от индексов может быть получена структура разреженных матрицы Якоби ограничений и матрицы Гессе лагранжиана задачи. Это позволяет выписать общие формулы для расчета их ненулевых элементов, использование которых приводит к эффективному применению численного метода для решения задачи нелинейного программирования.

Ключевые слова: планирование траекторий, нелинейное программирование, разреженные матрицы Якоби и Гессе, IpOpt, SymPy

Один из способов планирования траекторий движения шагающих роботов — это сведение задачи оптимального управления к гладкой задаче нелинейного программирования (НЛП) большой размерности [1]. Матрица Якоби для ограничений и матрица Гессе для лагранжиана этой задачи являются сильно разреженными.

Локальные решения такого рода задач могут быть найдены численно. Один из распространенных методов для этого — метод внутренней точки [2]. В нем используются следующие специфичные для конкретной задачи функции:

- целевой функционал задачи и его градиент,
- функции ограничений и матрица Якоби для них,
- матрица Гессе для лагранжиана задачи.

¹Злобин Дмитрий Васильевич — аспирант каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: dimz94@mail.ru.

Zlobin Dmitry Vasilevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes.

Так как матрицы Якоби и Гессе сильно разреженные, то достаточно вычисления их ненулевых элементов. Сходимость численного метода и скорость поиска решения зависят от точности и эффективности реализации этих функций. Выигрыш в скорости можно получить за счет:

- быстрого вычисления производных,
- уменьшения количества нулевых элементов матриц Якоби и Гессе, которые явно рассчитываются при вычислении этих матриц.

Общий подход для расчета элементов матриц Якоби и Гессе состоит в использовании метода автоматического (алгоритмического) дифференцирования [3]. Однако он не позволяет полностью исключить вычисление тех элементов, которые заведомо равны нулю.

Другой подход — это детальный анализ структуры матриц Якоби и Гессе для конкретной задачи или класса задач, что позволяет добиться выигрыша в скорости [4, 5, 6]. В основном исследуется структура матрицы Якоби, анализ матрицы Гессе для лагранжиана проводится реже в виду большей сложности.

В данной работе анализируется структура матриц Якоби и Гессе для задач НЛП, возникающих при планировании траекторий движения шагающих роботов. Их особенностью является использование относительно небольших выражений, в которые входят переменные с индексами. Именно индексы обуславливают большую размерность этих задач и их разреженную структуру. Переменные с индексами появляются при дискретизации функций времени исходной задачи оптимального управления.

Анализ зависимости выражений задачи от индексов позволяет разбить матрицы Якоби и Гессе на блоки прямоугольной и диагональной формы, содержащие только ненулевые элементы. Значения этих элементов могут быть вычислены по общей для блока формуле, зависящей от индексов.

Эта идея была реализована в программном пакете `symru2ipropt`. Он написан на языке Python с использованием библиотеки для символьных вычислений `SymPy` [7]. Пакет `symru2ipropt` позволяет:

- описать задачу НЛП при помощи символьных выражений `SymPy`,
- получить выражения для элементов градиента целевого функционала методом символьного дифференцирования,
- разбить матрицы Якоби и Гессе на блоки из ненулевых элементов и получить для каждого блока общие формулы расчета элементов методом символьного дифференцирования,

- сгенерировать интерфейсные функции на языке C++ для решателя IpOpt (реализация метода внутренней точки). Генерируется эффективный код относительно небольшой длины, использующий только циклы, условия и математические функции.

Исходный код пакета `sympy2ipopt` доступен в репозитории по адресу <https://github.com/zlobin-d/sympy2ipopt>.

Работа поддержана проектом РФФИ № 19-07-01226 А

Список литературы

- [1] Alexander W. Winkler, Dario C. Bellicoso, Marco Hutter, Jonas Buchli, “Gait and Trajectory Optimization for Legged Systems through Phase-based End-Effector Parameterization”, *IEEE Robotics and Automation Letters (RA-L)*, **3** (July 2018), 1560-1567.
- [2] A. Wächter, L. T. Biegler, “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *Mathematical Programming*, **106**:1 (2006), 25–57.
- [3] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, Moritz Diehl, “CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control”, *Mathematical Programming Computation*, **11**:1 (2019), 1–36.
- [4] M. Sagliano, S. Theil, “Hybrid Jacobian Computation for Fast Optimal Trajectories Generation”, AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference (August 19–22, 2013, Boston, MA).
- [5] Ayonga Hereid, Christian Hubicki, Eric Cousineau, Aaron Ames, “Dynamic Humanoid Locomotion: A Scalable Formulation for HZD Gait Optimization”, *IEEE Transactions on Robotics*, **34**:2 (2018), 370–387.
- [6] Daniel Cardona-Ortiz, Alvaro Paz, Gustavo Arechavaleta, “Exploiting sparsity in robot trajectory optimization with direct collocation and geometric algorithms”, IEEE International Conference on Robotics and Automation (31 May – 31 August, 2020, Paris, France), 469–475.
- [7] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, “SymPy: symbolic computing in Python”, *PeerJ Computer Science*, **3**:e103 (January 2017).

Exploiting Jacobian and Hessian of the Lagrangian Sparse Structure for Optimal Trajectory Planning Speed Up Zlobin D.V.

This paper deals with nonlinear programming problems, in which the cost function and constraints are relatively small expressions containing variables with indices.

Analysis of problem expressions dependence on indices gives sparsity structure of Jacobian and Hessian of the Lagrangian. This allows to get general formulas for calculating their non-zero elements and leads to effective numerical solving the nonlinear programming problem.

Keywords: trajectory planning, nonlinear programming, sparse Jacobian and Hessian of the Lagrangian, IpOpt, SymPy

References

- [1] Alexander W. Winkler, Dario C. Bellicoso, Marco Hutter, Jonas Buchli, “Gait and Trajectory Optimization for Legged Systems through Phase-based End-Effector Parameterization”, *IEEE Robotics and Automation Letters (RA-L)*, **3** (July 2018), 1560-1567.
- [2] A. Wächter, L. T. Biegler, “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *Mathematical Programming*, **106**:1 (2006), 25–57.
- [3] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, Moritz Diehl, “CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control”, *Mathematical Programming Computation*, **11**:1 (2019), 1–36.
- [4] M. Sagliano, S. Theil, “Hybrid Jacobian Computation for Fast Optimal Trajectories Generation”, AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference (August 19–22, 2013, Boston, MA).
- [5] Ayonga Hereid, Christian Hubicki, Eric Cousineau, Aaron Ames, “Dynamic Humanoid Locomotion: A Scalable Formulation for HZD Gait Optimization”, *IEEE Transactions on Robotics*, **34**:2 (2018), 370–387.
- [6] Daniel Cardona-Ortiz, Alvaro Paz, Gustavo Arechavaleta, “Exploiting sparsity in robot trajectory optimization with direct collocation and geometric algorithms”, IEEE International Conference on Robotics and Automation (31 May – 31 August, 2020, Paris, France), 469–475.
- [7] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, “SymPy: symbolic computing in Python”, *PeerJ Computer Science*, **3**:e103 (January 2017).

Использование алгоритма имитации отжига для оптимизации параметров идентификатора динамики платформы на основе дифференциальных нейронных сетей

А. М. Мухамедов¹

На точность идентификации дифференциальными нейронными сетями значительное влияние оказывают параметры функций активации. Предложен способ оптимизировать эти параметры с помощью алгоритма имитации отжига, результаты оптимизации продемонстрированы на примере задачи идентификации динамики платформы.

Ключевые слова: дифференциальные нейронные сети, глобальная оптимизация, алгоритм имитации отжига.

Одним из подходов к анализу нелинейных систем с неопределенностями являются дифференциальные нейронные сети. Они позволяют аппроксимировать динамику нелинейной части системы с помощью произведений матриц из функций активации и весовых коэффициентов. Пример подобной системы представлен в [2]. В отличие от статических нейронных сетей, весовые коэффициенты изменяются в процессе работы дифференциальных сетей, причем правила, задающие их динамику, определяют сходимость всей системы. При этом, точность работы и скорость сходимости определяются и выбором конкретных функций активации и их параметров. Таким образом, возникает задача поиска значений параметров, обеспечивающих лучшую сходимость для рассматриваемых систем и архитектуры сети.

Алгоритмы имитации отжига позволяют решать подобные задачи многомерной оптимизации, производя стохастический поиск по пространству допустимых значений. При этом переход в новую точку с некоторой вероятностью возможен и при ухудшении значения целевой функции. Это позволяет алгоритму выходить из локальных экстремумов.

¹ *Мухамедов Артур Мансурович* — аспирант каф. фундаментальной и прикладной математики ф-та космических исследований МГУ им М.В. Ломоносова; младший научный сотрудник НЦМУ "Сверхзвук" МГУ им М.В. Ломоносова, e-mail: a.mukhamedov@vrmsu.ru

Mukhamedov Arthur Mansurovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Space Research, Chair of Fundamental and Applied Mathematics; junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Center "Supersonic".

мов. Вероятность перехода в точку с худшими показателями регулируется параметром температуры, уменьшающимся в процессе работы алгоритма. При высоких значениях температуры поведение алгоритма похоже на случайный поиск, а при низких — на градиентный спуск. Такое поведение может быть полезно при оптимизации параметров функции активации.

В качестве примера рассмотрена задача идентификации динамики подвижной платформы с тремя степенями свободы (высота, углы крена и тангажа). Высота была зафиксирована таким образом, чтобы максимизировать область достижимости по двум другим осям. Во время работы платформы углы крена и тангажа, составляющие вектор управления платформы, менялись по узлам сетки с постоянным шагом. Выходные значения рассматриваемой системы задавались позицией и ориентацией платформы, которые были получены с помощью гибридной позиционно-инерциальной системы отслеживания. Идентификация производилась сетью следующего вида:

$$x_{i+1} = Ax_i + 0.5(W_{1_{i+1}} + W_{1_i}) * \sigma(x_i) + 0.5(W_{2_{i+1}} + W_{2_i}) * \varphi(x_i)U_i$$

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{1 + \exp(xC_m^\sigma + b_m^\sigma)} + d_m^\sigma - e_m^\sigma$$

$$\varphi_{m,n}(x) = \frac{1}{1 + \exp(xC_{m,n}^\varphi + b_{m,n}^\varphi)} + d_{m,n}^\varphi - e_{m,n}^\varphi,$$

где $d_m^\sigma, e_m^\sigma, d_{m,n}^\varphi, e_{m,n}^\varphi > 0$, $C^\sigma \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $b^\sigma, d^\sigma, e^\sigma \in \mathbb{R}^6$, $C^\varphi \in \mathbb{R}^{6 \times 6 \times 6}$, $b^\varphi, d^\varphi, e^\varphi \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ — параметры функций активации, которые нужно оптимизировать.

Традиционный алгоритм имитации отжига предназначен для оптимизации по дискретному пространству значений. Поэтому в данной работе используется описанная в [1] модификация для работы в непрерывных пространствах. Выбор следующей точки происходит смещением по одной координате i на значение, не превышающее элемент i шагового вектора. После смещения и проверки полученных точек по всем координатам N_s раз происходит изменение шагового вектора так, чтобы выбранные новые точки принимались в половине случаев. После изменения шагового вектора N_T раз, происходит снижение температуры с постоянным множителем. Критерием останова служит неухудшение значения целевой функции после N_{eps} уменьшений температуры. Заданы следующие значения параметров: $N_T = 2$, $N_s = 3$, $N_{eps} = 2$. Значения всех прочих параметров были взяты из [1]. При оптимизации использовались три целевые функции:

$$E_A = \sum_i \sqrt{\sum_{m,n} \Delta_{imn}^2},$$

$$E_D = \sum_i \Delta_i^T \Delta_i,$$

$$E_I = \sum_i (tr(dW_{1_i}^T dW_{1_i}) + tr(dW_{2_i}^T dW_{2_i}) + \Delta_i^T \Delta_i),$$

где $\Delta_i = \hat{x}_i - x_i$ — ошибка идентификации, $dW_{l_i} = W_{l_i} - \bar{W}_l$, $l \in \{1, 2\}$, \bar{W}_l — среднее значение W_{l_i} , x_i — вектор состояния системы в момент i , W_{l_i} — матрица весовых коэффициентов дифференциальной нейронной сети в момент i . Первые две функции зависят только от ошибки идентификации Δ_i , третья (E_I) также зависит от отклонения матрицы весов от среднего значения, то есть помимо снижения общей ошибки, при оптимизации с такой целевой функцией должны снижаться колебания матрицы весов.

Алгоритм был запущен независимо для каждой целевой функции с одинаковыми начальными условиями. Все три запуска завершили свою работу по выполнению терминального условия. Результаты работы представлены в таблице 1.

Целевая функция	Значение E_A	Значение E_D	Значение E_I
Начальное условие	20.3345	0.3393	0.8144
E_A	16.4802	0.3054	0.7057
E_D	17.1420	0.2802	0.6615
E_I	16.9865	0.2817	0.6633

Таблица 1. Результаты работы алгоритма имитации отжига с различными целевыми функциями

Можно заметить, что результаты оптимизации по функциям E_D и E_I приводит к похожим результатам по двум метрикам, но по E_A более высокий результат показывает оптимизация по E_I . Оптимизация по E_A привела к лучшему результату по своей функции, по двум другим полученный результат хуже результатов оптимизации по соответствующим функциям. Таким образом, учет в целевой функции не только ошибки идентификации, но и других компонентов, например динамики весовых коэффициентов, позволяет достичь более высокой точности по одним метрикам, не ухудшая другие. Влияние этих компонентов является целью дальнейших исследований.

Список литературы

- [1] Corana A., Marchesi M., Martini C., Ridella S., “Minimizing multimodal functions of continuous variables with the “simulated annealing” algorithm”, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **13**:3 (1987), 262–280.

- [2] Poznyak A., Chairez I., Poznyak T., “A survey on artificial neural networks application for identification and control in environmental engineering: Biological and chemical systems with uncertain models”, *Annual Reviews in Control*, **48** (2019), 250–272.

Application of simulated annealing algorithm to optimize parameters of differential neural network-based identifier of platform dynamics
Mukhamedov A.M.

Parameters of activation functions contribute a lot to the performance of differential neural network-based identifiers. An approach to optimize these parameters is proposed and demonstrated for the problem of identification of platform dynamics.

Keywords: differential neural networks, global optimization, simulated annealing algorithm.

References

- [1] Corana A., Marchesi M., Martini C., Ridella S., “Minimizing multimodal functions of continuous variables with the “simulated annealing” algorithm”, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **13:3** (1987), 262–280.
- [2] Poznyak A., Chairez I., Poznyak T., “A survey on artificial neural networks application for identification and control in environmental engineering: Biological and chemical systems with uncertain models”, *Annual Reviews in Control*, **48** (2019), 250–272.

Приведение гипервыходных систем к форме с относительным порядком

В. В. Фомичев¹, А. И. Роговский²

Рассматривается понятие относительного порядка для гипервыходных систем (то есть систем, у которых размерность выхода больше чем размерность входа). Его условия, как и в случае квадратных систем (для которых размерности входа и выхода совпадают), являются ограничительными, и не являются инвариантными по отношению к невырожденной замене выходов.

Ставится задача приведения гипервыходной системы к форме, в которой условия относительного порядка выполняются. Для этого, по аналогии со случаем квадратных систем, вводятся обобщения относительного порядка с менее ограничительными условиями. С их помощью удается решить поставленную задачу.

Ключевые слова: относительный порядок, гипервыходные системы.

1. Введение

Рассматривается линейная стационарная гипервыходная система:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ обозначает фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — ее вход, а $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход; A, B, C — постоянные матрицы подходящих размеров; $t > 0$. Поскольку система однозначно определяется своими матрицами, далее будем обозначать ее $\{A, B, C\}$. Если не сказано иное, далее мы будем предполагать, что $l > m$, то есть система является *гипервыходной*.

Важным понятием для динамических систем с входом и выходом является понятие относительного порядка. Оно используется при решении многих задач теории управления, таких как задача наблюдения [1], обращения [2], стабилизации [3] и других [4].

¹Фомичев Василий Владимирович — профессор каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru.

Fomichev Vasily Vladimirovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

²Роговский Александр Игоревич — ассистент каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ, e-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com.

Rogovskiy Alexander Igorevich — assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes.

Относительный порядок изначально вводился для *скалярных* систем (то есть систем, для которых $m = l = 1$), в этом случае он может быть определен, например, как минимальный порядок производной выхода, явно зависящей от управления. Затем это определение было распространено на случай векторных квадратных систем (то есть систем, для которых $m = l > 1$) [2, 220]. Однако, в этом случае условия относительного порядка уже являются ограничительными и не всегда выполняются. Более того, для линейных систем эти условия не являются инвариантными по отношению к замене выходов. Это позволяет в некоторых случаях добиться за счет замены выходов выполнения условия относительного порядка [5]. Наконец, в работе [6] определение относительного порядка было распространено на случай гипервыходных линейных систем. Условия этого определения еще более ограничительны, однако, как и ранее, не являются инвариантными по отношению к замене выходов. В настоящей работе мы рассмотрим задачу приведения гипервыходной системы к форме с относительным порядком, то есть задачу поиска такой замены выходов, что для системы $\{A, B, C\}$ условия относительного порядка (в смысле [6]) выполняются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 22-21-00288).

2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные определения.

Определение 1. Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором относительного порядка гипервыходной системы $\{A, B, C\}$, если выполняются следующие условия:

- 1) $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$, и, если $r_i > 1$, то $C_i A^{j-1} B = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$;
- 2) строки $\{C_i A^{r_i-1} B\}_{i=1}^m$ линейно независимы;
- 3) справедливы неравенства $r_i \leq r_{i+1}$, $i = \overline{1, l-1}$.

В [6] показано, что при выполнении условий Определения 1 система приводится к канонической форме — аналогу нормальной формы для квадратных систем — удобной для решения задач наблюдения и обращения.

Наша задача — выяснить, при каких условиях для гипервыходной системы $\{A, B, C\}$, не имеющей относительного порядка, найдется такая невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что для системы $\{A, B, TC\}$ условия относительного порядка выполняются (умножение матрицы C на матрицу T соответствует замене выходов). Поскольку условия относительного порядка являются ограничительными, ослабим их:

Определение 2. Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором неполного относительного порядка (НОП) гипервыходной системы $\{A, B, C\}$, если выполняется первое требование определения 1.

Определение 3. Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором главного неполного относительного порядка (ГНОП) гипервыходной системы $\{A, B, C\}$, если r — вектор НОП, и для любых различных индексов $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_p$, таких что $r_{i_1} = \dots = r_{i_p}$, строки $\{C_{i_j} A^{r_{i_j}-1} B\}_{j=1}^p$ линейно независимы.

Введем класс систем, для которых целесообразно рассматривать замены выходов:

Определение 4. Система $\{A, B, C\}$ называется слабо приводимой, если при любой невырожденной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определен вектор НОП.

Основные результаты работы сформулированы ниже:

Лемма 1. Для любой слабо приводимой системы $\{A, B, C\}$ найдется такая невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что для системы $\{A, B, TC\}$ определен вектор ГНОП.

Теорема 1. Пусть для системы $\{A, B, C\}$ определен вектор ГНОП. Пусть далее при любой матрице перестановок \tilde{T} для системы $\{A, B, \tilde{T}C\}$ не выполняются условия относительного порядка. Тогда при любой невырожденной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ также не выполняются условия относительного порядка.

Мы получили следующий алгоритм решения поставленной задачи:

- 1) привести систему к форме с ГНОП (при доказательстве леммы 1 указан конструктивный алгоритм для построения такого преобразования);
- 2) проверить, выполняются ли для преобразованной системы условия определения 1 (возможно, после перестановки выходов); если да, система приведена к требуемому виду, если нет, задача не имеет решения.

Список литературы

- [1] Trinh H., Fernando T., *Functional Observers for Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 2012, 220 pp.
- [2] Isidori A., *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995, 549 pp.

- [3] Wang L., Isidori A., Su H., “Global Stabilization of a Class of Invertible MIMO Nonlinear Systems сверхслов”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60:3** (2015), 616–631
- [4] Isidori A., “The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story сверхслов”, *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, 2011, 18–25
- [5] Kraev A.V., Rogovskii A.I., Fomichev V.V., “On a Generalization of Relative Degree”, *Differential Equations*, **50:8** (2014), 1122–1127
- [6] Fomichev V.V., Kraev A.V., Tevdoradze S.Z., “Synthesizing Asymptotic Observers for Hyperoutput Systems with Uncertainty upon Transfer Matrix Degeneracy”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44:1** (2020), 44–52

Reduction of hyperoutput systems to a form with relative degree Fomichev V. V., Rogovskiy A. I.

We consider a notion of relative degree for hyperoutput systems (i.e. the systems that has more outputs than inputs). Relative degree conditions are restrictive (the same is true for a square systems — the systems that have the same number of inputs and outputs), furthermore, these conditions are not invariant under output change.

We consider a problem of reducing a hyperoutput system to a form with relative degree. To solve the problem we introduce generalizations of relative degree, similar to the square-system’s case. Using these generalization we solve the problem.

Keywords: relative degree, hyperoutput systems.

References

- [1] Trinh H., Fernando T., *Functional Observers for Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 2012, 220 pp.
- [2] Isidori A., *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995, 549 pp.
- [3] Wang L., Isidori A., Su H., “Global Stabilization of a Class of Invertible MIMO Nonlinear Systems сверхслов”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60:3** (2015), 616–631
- [4] Isidori A., “The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story сверхслов”, *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, 2011, 18–25
- [5] Kraev A.V., Rogovskii A.I., Fomichev V.V., “On a Generalization of Relative Degree”, *Differential Equations*, **50:8** (2014), 1122–1127
- [6] Fomichev V.V., Kraev A.V., Tevdoradze S.Z., “Synthesizing Asymptotic Observers for Hyperoutput Systems with Uncertainty upon Transfer Matrix Degeneracy”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44:1** (2020), 44–52

Некоторые подходы к стабилизации переключаемых интервальных систем

А. С. Фурсов,¹ Ю. М. Мосолова²

Целью исследования является разработка алгоритмов построения цифровых стабилизаторов для переключаемых систем, функционирующих в условиях параметрической неопределённости. Для решения поставленной задачи предлагается использовать методы: точной дискретизации непрерывных управляемых систем, теории сверхстабилизации, теории линейных матричных неравенств и интеллектуальных вычислений.

Ключевые слова: переключаемые системы, интервальная неопределенность, стабилизация, робастная устойчивость, цифровые системы управления, интеллектуальные вычисления.

1. Введение

Многие прикладные задачи сводятся к управлению системами, демонстрирующими неконтролируемые скачкообразные изменения своей динамики в дискретные моменты времени. Такие системы называют переключаемыми. В предлагаемой работе рассматривается проблема стабилизации таких систем, при этом еще и функционирующих в условиях параметрической неопределенности. В связи с бурным развитием вычислительной техники в подавляющем большинстве современных автоматических системах управления используются в качестве регуляторов микроконтроллеры. В связи с этим актуальной является задача разработки конструктивных алгоритмов построения именно цифровых регуляторов для управляемых систем. Учитывая этот факт, в данной работе рассматривается задача построения цифровых стабилизаторов для переключаемых систем. При решении указанной задачи возникают две основные проблемы. Первая проблема связана с процедурой дискретизации непрерывной модели, которая является необходимым звеном расчёта

¹ *Фурсов Андрей Серафимович* — профессор каф. нелинейных динамических систем и процессов управления вкв ф-та МГУ, e-mail: fursov@cs.msu.ru

Fursov Andrei Serafimovich — Professor, Department of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, e-mail: fursov@cs.msu.ru

² *Мосолова Юлия Михайловна* — аспирант каф. нелинейных динамических систем и процессов управления вкв ф-та МГУ, e-mail: july2412@mail.ru

Mosolova Yuliya Mikhailovna — Post-graduate student of the Department of Nonlinear Dynamical Systems and Control Processes, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, e-mail: july2412@mail.ru

дискретного регулятора. Вторая же проблема связана с необходимостью обеспечить работоспособность регулятора в условиях достаточно быстрой смены режимов переключаемых систем. Для решения поставленной задачи были использованы следующие методы: метод точной дискретизации непрерывных систем, методы теории линейных матричных неравенств, метод сверхстабилизации и методы интеллектуальных вычислений.

2. Основные понятия и формулировка результата

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in P \subseteq S_0, \quad (1)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_0 — множество всех переключающих сигналов σ ; P — множество допустимых переключающих сигналов; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$; $[b_\sigma] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$, $[c_\sigma] : I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ ($i = \overline{1, m}$) — интервальные матрицы соответствующих размеров.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет интервальный активный режим ($[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$) ($i = \overline{1, m}$) переключаемой системы (1), описываемый линейной интервальной системой $\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u$, $y = [c_i]x$.

Систему (1) можно рассматривать как интервальное семейство переключаемых линейных систем. При этом, под элементом интервального семейства (1) будем понимать переключаемую систему $\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u$, $y = c_\sigma x$, задаваемую конечным множеством режимов (c_i, A_i, b_i) : $\dot{x} = A_i x + b_i u$, $y = c_i x$, где $c_i \in [c_i]$, $b_i \in [b_i]$, $A_i \in [A_i]$ ($i = \overline{1, m}$).

Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных режимах (A_i, b_i, c_i) ($i = \overline{1, m}$), заданном алгоритме управления $u = u_0$, переключающем сигнале $\sigma \in P$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть вектор-функцию $x(t)$, являющуюся непрерывным кусочно-дифференцируемым решением линейной нестационарной системы $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u$, $x(0) = x_0$.

Будем говорить, что переключаемая линейная система (1) с фиксированным управлением $u = u_0$ робастно P -устойчива в нуле, если существует такая KL -функция $\gamma(r, s)$, что для любого начального условия

$x(0) = x_0$, переключающего сигнала $\sigma \in P$ ($P \subseteq S$) и для любой переключаемой системы $(A_i, b_i, c_i) \in ([A_i], [b_i], [c_i])$ семейства (1) соответствующее решение уравнения $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u_0$, $x(0) = x_0$, удовлетворяет соотношению $\|x(t)\| \leq \gamma(\|x(0)\|, t)$, $t \geq 0$.

Для системы (1) рассматриваются следующие задачи.

1. Для объекта (1) необходимо построить цифровой регулятор по выходу:

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qu[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad (2)$$

который обеспечивает робастную P -устойчивость в нуле соответствующей замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_{\sigma}]x(t) + [b_{\sigma}] \sum_{j=0}^l (Hv[jT] + h[c_{\sigma}]x(jT)) S(t-jT), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_{\sigma}]x(lT), \quad \sigma(t) \in P \subseteq S_0, \end{cases} \quad (3)$$

где T — период дискретизации непрерывной системы (1),

$$S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (4)$$

2. Для объекта (1) с заданным множеством ($P \subseteq S_0$) и не наблюдаемым переключающим сигналом $\sigma \in P$ необходимо построить цифровой регулятор по состоянию:

$$u[lT] = -kx[lT], \quad (5)$$

обеспечивающий робастную P -устойчивость в нуле соответствующей замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\dot{x}(t) = [A_{\sigma}]x(t) + [b_{\sigma}] \sum_{j=0}^{\infty} (-kx(jT)) S(t-jT), \quad \sigma(t) \in P \subseteq S_0. \quad (6)$$

Полученные результаты.

1. На основе метода функций Ляпунова и теории линейных матричных неравенств [1] сформулировано и доказано достаточное условие устойчивости в нуле непрерывно-дискретной системы (3) замкнутой цифровым регулятором (2) [3]. Указанное условие даёт возможность разрабатывать численные процедуры поиска цифрового стабилизатора (2) с использованием алгоритмов интеллектуальных вычислений.

2. На основе метода сверхстабилизации [2] предложено конструктивное достаточное условие существования вектора параметров k обратной

связи (5) [4], обеспечивающей устойчивость непрерывно-дискретной системы (6). Данное условие позволяет находить стабилизирующую обратную связь (5) в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00162).

Список литературы

- [1] Баландин Д.В., Коган М.М., “Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств”, — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- [2] Поляк Б.Т., Щербаков П.С., “Робастная устойчивость и управление”, М.: Наука, 2002.
- [3] Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М., “Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **55**:11 (2019), 1545-1559.
- [4] Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И., “Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы”, *Дифференц. уравнения*, **56**:11 (2020), 1516-1527.

Some approaches to stabilizing switchable interval systems

Fursov A.S., Mosolova Y.M.

The aim of the research is to develop algorithms for constructing digital stabilizers for switchable systems operating under parametric uncertainty. To solve this problem, it is proposed to use the following methods: exact discretization of continuous controlled systems, the theory of superstabilization, the theory of linear matrix inequalities and intelligent computing.

Keywords: switchable systems, interval uncertainty, stabilization, robust stability, digital control systems, intelligent computing.

References

- [1] Balandin D.V., Kogan M.M., “Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities”, - M.: FIZMATLIT, 2007.
- [2] Polyak B.T., Shcherbakov P.S., “Robust stability and control”, M.: Nauka, 2002.
- [3] Fursov A.S., Minyaev S.I., Mosolova Yu.M., “Synthesis of a digital output stabilizer for a switchable interval linear system”, *Differ. equations*, **55**:11 (2019), 1545-1559.
- [4] Fursov A.S., Mosolova Yu.M., Minyaev S.I., “Digital over-stabilization of a switchable interval linear system”, *Differ. equations*, **56**:11 (2020), 1516-1527.

Часть 7.
Нейроморфный искусственный
интеллект и когнитивные системы

Механизмы внутреннего проговаривания и восприятия при разных типах внешней инициации

А. В. Вартанов¹ А. Р. Суюнчева² А. О. Шевченко³

Электрическая активность мозга выявлялась в задачах на восприятие и проговаривание отдельных фонем и слогов русского языка при различных условиях инициации процесса проговаривания. В качестве условий инициации было зрительное предъявление (демонстрировалась буква), аудиальное предъявление, а также аудиальное предъявление условных стимулов (слов на незнакомом испытуемым языке, ассоциированных предварительно с соответствующими фонемами). Получены ВП по группе из 25 испытуемых для восприятия и внутреннего проговаривания 7 фонем и 10 слогов для каждого из условий инициации. В результате показано, что усредненный вызванный потенциал на сигнал проговаривания фонемы и слогов зависит от способа инициализации. Это важно учитывать при разработке методов декодирования внутренней речи и автоматических классификаторов.

Ключевые слова: ЭЭГ, ВП, внутреннее проговаривание, слогов, фонемы, слова, условные стимулы, несуществующие слова, японский язык

Задача исследования. Сопоставить ВП при внутреннем проговаривании и восприятии фонем и слогов в зависимости от условий инициации.

Метод. Электрофизиологический эксперимент с регистрацией 19-канального ЭЭГ (по международной системе 10-20% на электроэнцефалографе фирмы Нейро КМ) состоял из 3-х серий (визуальная, аудиальная, а также инициация с использованием условных стимулов). В исследовании принимали участие 25 испытуемых: пятнадцать девушек и

¹ *Вартанов Александр Валентинович* — старший научный сотрудник каф. психофизиологии ф-та психологии МГУ, e-mail: a_v_vartanov@mail.ru

Vartanov Alexander Valentinovich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Psychology, Chair of Psychophysiology

² *Суюнчева Алиса Руслановна* — студент ф-та психологии МГУ, e-mail: suyuncheva.a.r@gmail.com

Suyuncheva Alisa Ruslanovna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Psychology

³ *Шевченко Андрей Олегович* — аспирант ф-та психологии МГУ, e-mail: andreyshevchenkomsu@gmail.com

Shevchenko Andrey Olegovich — post-graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Psychology

десять юношей в возрасте от 17 до 28 лет. Предварительно испытуемый заучивал ассоциации японского слова (японским языком никто не владел) с определенной фонемой. Необходимо также построить звуковой образ, но в условиях интерференции со звуковым образом условного сигнала. Испытуемый проговаривает с закрытыми глазами.

В качестве предъявляемых стимулов были выбраны семь фонем русского языка: А, Б, Ф, Г, М, Р, У. И десять слогов, составленных из этих фонем: БА, ФА, ГА, МА, РА, БУ, РУ, МУ, ФУ, ГУ. В течение 700 мс испытуемому демонстрируется визуальный либо звуковой стимул. После предъявления стимула следовала пауза — длительностью 500 мс. После паузы на экране появляется фиксационный крест и звуковой сигнал, который является стартовой командой внутреннего проговаривания (которое должно завершиться в течение 1500 мс).

Результаты. В результате были получены ВП на все стимулы во всех экспериментальных сериях по всем испытуемым. Анализ полученных данных проводился с помощью языка статистического программирования R (версия 3.6.3) (R Core Team, 2019) в рамках интегрированной среды разработки Rstudio. По этой причине функциональный дисперсионный анализ прекрасно подходит для вызванных потенциалов (любой ВП является кривой) и был адаптирован с целью обнаружения значимых различий в пакете ERP (Causeur, 2019). Наконец, между проговариваниями в зависимости от подачи стимула также есть значимое различие вне зависимости от типа стимула ($p < 0.001$), но изменения по каналам значимы только для фонем ($p = 0.03$). Здесь ситуация обратная тому, что наблюдалось до этого — относительно аудиальной подачи у визуальной наблюдается сначала негативная, а потом позитивная волна, но в среднем значимой является только позитивная волна на канале СЗ (Рисунок 1). В случае сравнения всех проговариваний с проговариванием на условный стимул в виде японских слов значимые различия опять нашлись во всех четырёх случаях ($p < 0.001$ для всего аудиального, $p = 0.01$ для визуальных фонем, $p = 0.009$ для визуальных слогов), но значимое взаимодействие канала с этапом нашлось только для аудиальных слогов ($p < 0.001$) (Рисунок 2, 3).

На основании полученных результатов, согласно функциональному дисперсионному анализу, все экспериментальные этапы имеют значимые различия, но при этом пространственное распределение ВП значимо различается только для аудиальных стимулов.

Также, было проведено сравнение всех вариантов инициализации с проговариванием на условный стимул в виде японских слов, значимые различия опять нашлись во всех четырёх случаях, но значимое взаимодействие канала с этапом нашлось только для аудиальных слогов.

С3, Визуально - Аудиально

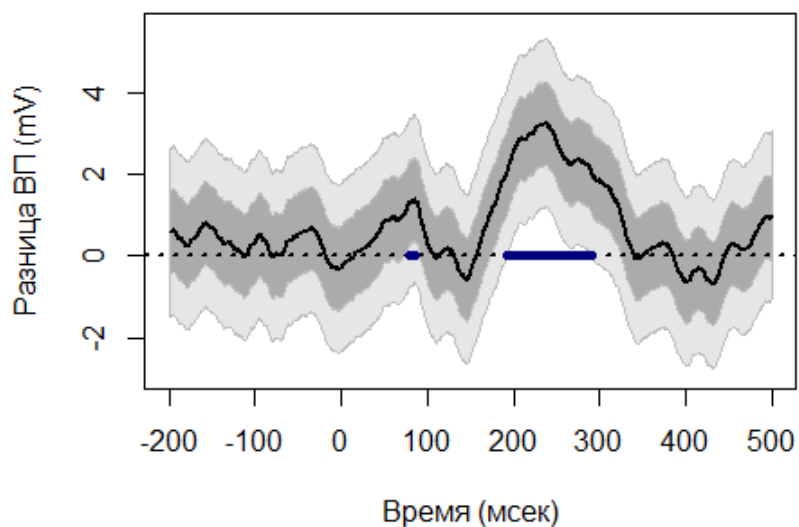


Рис. 1. Различия между вызванными потенциалами на проговаривании фонем (визуальная подача стимула минус аудиальная); регионы значимых различий помечены тёмносиним цветом.

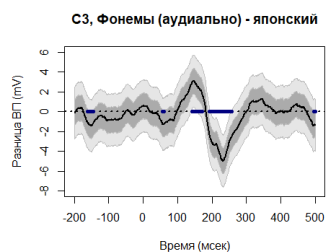


Рис. 2. Различия между вызванными потенциалами (аудиальные фонемы минус инициация условным японским стимулом); регионы значимых различий помечены тёмносиним цветом.

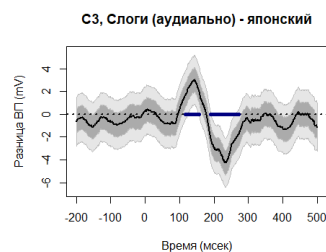


Рис. 3. Различия между вызванными потенциалами (аудиальные слоги минус инициация условным японским стимулом); регионы значимых различий помечены тёмносиним цветом.

При восприятии и проговаривании стимулов, эффекты по каналам отведения ЭЭГ зависят от того, воспринимает испытуемый стимул или проговаривает. Зависимости от того визуальной или аудиальной была подача — не выявлено. Эксперимент был построен так, что после предъявления команды стимула существовала пауза на 400 мс для того чтобы сравнить восприятие с внутренним проговариванием. Внутреннее проговаривание и восприятие было различным в каждой серии эксперимента.

При анализе результатов проговаривания слогов во всех трех случаях выраженные различия наблюдаются по каналам СЗ и FЗ, левая височная зона, что связано с расположением зон, которые отвечают за речь, что соответствует уже проделанным экспериментам по классификации и изучению процессов внутреннего проговаривания ([1, 2]). Эти различия выражаются в зависимости от того визуальным или аудиальным был стимул. При рассмотрении фонем также было выявлено отличие в зависимости от способа подачи стимула. Между проговариваниями в зависимости от подачи стимула также есть значимое различие вне зависимости от типа стимула ($p < 0.001$), но изменения по каналам значимы только для фонем ($p = 0.03$). В целом, эти данные поддерживают и расширяют предыдущие исследования, указывающие на влияние визуальных и аудиальных сигналов на обработку и проговаривание.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-18-00067.

Список литературы

- [1] Mesgarani N., David V., Fritz J. B., Shamma S. A., “Influence of Context and Behavior on Stimulus Reconstruction From Neural Activity in Primary Auditory Cortex”, *Journal of Neurophysiology*, **102**:6 (2009), 3329–3339.
- [2] Martin S., Brunner P., Holdgraf C., Heinze H. G., Crone N. E., Rieger J., Schalk G., Knight R. T., Pasley B. N., “Decoding spectrotemporal features of overtand covert speech from the human cortex”, *Frontiers in Neuroengineering*, **7** (2014).

Mechanisms of internal pronunciation and perception in different types of external initiation

Vartanov A.V., Suyuncheva A.R., Shevchevko A.O.

The electrical activity of the brain was detected in tasks on the perception and pronunciation of individual phonemes and syllables of the Russian language under various conditions of initiation of the pronunciation process. The conditions for initiation were visual presentation (a letter was shown), auditory presentation, and also auditory presentation of conditioned stimuli (words in an unfamiliar language to the subject, previously associated with the corresponding

phonemes). EPs were obtained for a group of 25 subjects for perception and internal pronunciation of 7 phonemes and 10 syllables for each of the initiation conditions. As a result, it was shown that the averaged evoked potential for the signal of pronouncing phonemes and syllables depends on the initialization method. This is important to consider when developing methods for decoding internal speech and automatic classifiers.

Keywords: EEG, EP, internal pronunciation, syllables, phonemes, words, conditioned stimuli, non-existent words, Japanese

References

- [1] Mesgarani N., David V., Fritz J. B., Shamma S. A., “Influence of Context and Behavior on Stimulus Reconstruction From Neural Activity in Primary Auditory Cortex”, *Journal of Neurophysiology*, **102**:6 (2009), 3329–3339.
- [2] Martin S., Brunner P., Holdgraf C., Heinze H. G., Crone N. E., Rieger J., Schalk G., Knight R. T., Pasley B. N., “Decoding spectrotemporal features of overtand covert speech from the human cortex”, *Frontiers in Neuroengineering*, **7** (2014).

Динамика формирования когнитивных карт в гиппокампе мышей в новой обстановке

В. П. Сотсков¹ В. В. Плюснин² Н. А. Поспелов³ К. В. Анохин⁴

Работа посвящена изучению динамики формирования когнитивных карт новой обстановки в гиппокампе бодрствующих мышей в свободном поведении. Было измерено среднее время, требующееся для формирования стабильных нейронных репрезентаций пространства, а также охарактеризована пространственная селективность когнитивных карт. Было исследовано изменение этих параметров в последующие дни эксперимента, а также был проведён популяционный анализ нейронной активности с целью верификации полученных результатов.

Ключевые слова: клетки места, поля места, когнитивные карты, гиппокамп

Процесс специализации нейронов живых организмов относительно внешних стимулов представляет собой один из ключевых вопросов нейрофизиологии. Важным примером такой специализации являются когнитивные карты — совокупность рецептивных полей (полей места) клеток места в гиппокампе млекопитающих [1]. Такие карты могут быть относительно стабильными в течение долгого времени [2], однако кратковременная динамика формирования таких карт в первые моменты после помещения животного в новую среду остаётся не до конца исследованной.

¹ *Сотсков Владимир Павлович* — лаборант-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ, e-mail: vsotskov@list.ru

Sotskov Vladimir Pavlovich — research laboratory assistant, Lomonosov Moscow State University, Institute for Advanced Brain Studies

² *Плуснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, НИЦ «Курчатовский Институт», Институт перспективных исследований мозга МГУ, e-mail: witkax@gmail.com

Plusnin Viktor Vladimirovich — research laboratory assistant, National Research Center «Kurchatov Institute», Lomonosov Moscow State University, Institute for Advanced Brain Studies

³ *Поспелов Никита Александрович* — инженер-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ, e-mail: nik-pos@yandex.ru

Pospelov Nikita Alexandrovich — research engineer, Lomonosov Moscow State University, Institute for Advanced Brain Studies

⁴ *Анохин Константин Владимирович* — директор, Институт перспективных исследований мозга МГУ, e-mail: k.anokhin@gmail.com
Anokhin Konstantin Vladimirovich — director, Lomonosov Moscow State University, Institute for Advanced Brain Studies

Для характеристики такой динамики нами была проведена съёмка активности нейронов места, расположенных в поле СА1 гиппокампа бодрствующих мышей, при помощи монтируемых на голову миниатюрных флуоресцентных микроскопов (минископов) в ходе свободного исследования животными новой обстановки в виде кольцевого трека, а также в ходе двух повторных сессий в той же обстановке через 24 ч и 48 ч.

В ходе эксперимента было зарегистрировано 819 пространственно селективных клеток в 12 животных. На второй день эксперимента у части животных (44%) наблюдалось сохранение когнитивной карты, в то время как у другой части наблюдалось перестроение когнитивной карты, что согласуется с ранее полученными данными [4]. Было показано, что в условиях новой обстановки среднее время, требуемое на формирование отдельных полей места составило 231 с, что в среднем соответствовало 7 посещениям поля места. Однако, существенная часть (26%) полей места была сформирована в самый первый момент их посещения животным. В последующих сессиях съёмки наблюдалось устойчивое сокращение среднего времени формирования полей места, вне зависимости от перестроения или сохранения когнитивной карты у животных в этих сессиях съёмки. При этом пространственная селективность когнитивных карт росла в течение каждой из сессий, однако её накопления между сессиями не наблюдалось. Кроме того, нами был проведён популяционный анализ активности всех зарегистрированных нейронов, не только клеток места, и было показано, что данные нейронной активности позволяют восстановить траекторию животных в кольцевом треке. Также было показано, что ошибка реконструкции траектории соответствует средней пространственной селективности когнитивной карты.

Эти факты могут служить основанием для поиска событий, обуславливающих специализацию клеток места, таких как отдельные акты поведения или определённые состояния активности популяции нейронов.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект», а также гранта РФФИ № 20-15-00283.

Список литературы

- [1] O'Keefe J., Dostrovsky J., "The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat", *Brain Research*, **34**:1 (1971), 171–175.
- [2] Ziv Y., Burns L. D., Cocker E. D., Hamel E. O., Ghosh K. K., Kitch L. J., El Gamal A., Schnitzer M. J., "Long-term dynamics of CA1 hippocampal place codes", *Nature Neuroscience*, **16**:3 (2013), 264–266.

- [3] Ghosh K. K., Burns L. D., Cocker E. D., Nimmerjahn A., Ziv Y., Gamal A. E., Schnitzer M. J., “Miniaturized integration of a fluorescence microscope”, *Nature Methods*, **8**:16 (2011), 871–878.
- [4] Sheintuch L., Geva N., Baumer H., Rechavi Y., Rubin A., Ziv Y., “Multiple maps of the same spatial context can stably coexist in the mouse hippocampus”, *Current Biology*, **30**:8 (2020), 1467–1476.

Dynamics of the formation of cognitive maps in the hippocampus of mice in a new environment

Sotskov V.P., Plusnin V.V., Pospelov N.A., Anokhin K.V.

This study is devoted to short-term dynamics of establishing of cognitive maps of a novel environment in the hippocampus of freely behaving mice. The average time required for stable spatial neuronal representations to establish was evaluated and spatial selectivity of these cognitive maps was characterized. It was shown how these parameters evolved on further days of the experiment and a population analysis of neuronal activity was performed to verify these results.

Keywords: place cells, place fields, cognitive map, hippocampus

References

- [1] O’Keefe J., Dostrovsky J., “The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat”, *Brain Research*, **34**:1 (1971), 171–175.
- [2] Ziv Y., Burns L. D., Cocker E. D., Hamel E. O., Ghosh K. K., Kitch L. J., El Gamal A., Schnitzer M. J., “Long-term dynamics of CA1 hippocampal place codes”, *Nature Neuroscience*, **16**:3 (2013), 264–266.
- [3] Ghosh K. K., Burns L. D., Cocker E. D., Nimmerjahn A., Ziv Y., Gamal A. E., Schnitzer M. J., “Miniaturized integration of a fluorescence microscope”, *Nature Methods*, **8**:16 (2011), 871–878.
- [4] Sheintuch L., Geva N., Baumer H., Rechavi Y., Rubin A., Ziv Y., “Multiple maps of the same spatial context can stably coexist in the mouse hippocampus”, *Current Biology*, **30**:8 (2020), 1467–1476.

Особенности построения функциональных коннектомов по данным фМРТ

В. Л. Ушаков¹ А. А. Пойда² С. О. Козлов³ В. А. Орлов⁴
М. Г. Шараев⁵

Функционирование головного мозга основано на параллельной синхронной работе формирующих его нейросетей, архитектура которых определяет свойства протекающих когнитивных процессов. Для построения функциональных коннектомов головного мозга человека обычно используются данные неинвазивных методов: электроэнцефалографии (ЭЭГ), магнитной энцефалографии (МЭГ) и функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ), полученных в стимульных когнитивных задачах или в состоянии покоя. Для каждой комбинации из приведенных экспериментальных методов и исследуемого когнитивного процесса есть ряд особенностей в методах построения функциональных коннектомов. Особый интерес представляет фМРТ исследование нейросетевого взаимодействия в состоянии покоя головного мозга, как модели базового уровня работы процессов сознания. При посредственной величине пространственного разрешения (порядка 2 мм) и временного разрешения (0,5 Гц) сигнала, фМРТ является единственным из современных методов одновременной регистрации физиологических сигналов от коры и глубинных структур головного мозга. В данной работе на примере полученных фМРТ данных состояния покоя головного мозга приводится описание характерных особенностей построения функциональных коннектомов.

¹ Ушаков Вадим Леонидович — ведущий научный сотрудник, Институт перспективных исследований мозга МГУ, e-mail: tiuq@yandex.ru

Ushakov Vadim Leonidovich — leading researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute for Advanced Brain Studies

² Пойда Алексей Анатольевич — начальник отдела, НИЦ «Курчатовский Институт»

Poyda Alexey Anatolievich — department head, National Research Center «Kurchatov Institute»

³ Козлов Станислав Олегович — аспирант, НИЦ «Курчатовский Институт»

Kozlov Stanislav Olegovich — post-graduate student, National Research Center «Kurchatov Institute»

⁴ Орлов Вячеслав Андреевич — научный сотрудник, НИЦ «Курчатовский Институт»

Orlov Vyacheslav Andeevich — researcher, National Research Center «Kurchatov Institute»

⁵ Шараев Максим Геннадьевич — начальник отдела, Сколковский институт науки и технологий

Sharaev Maxim Gennadievich — department head, Skolkovo Institute of Science and Technology

Ключевые слова: нейросети, фМРТ, функциональный коннектом, глобальный сигнал, функционально-однородные регионы, стационарность, автокорреляция, функциональный атлас, состояние покоя

Изучение функциональных нейросетевых архитектур головного мозга, обеспечивающих высокую эффективность в потреблении энергии и обработке информации, представляет важное направление для разработки технологий искусственного интеллекта. Среди информационных процессов мозга наиболее интересна реализация функции сознательного контроля, имеющей базовый уровень в состоянии покоя (resting state) головного мозга, на основе которого уже строятся процессы целенаправленного решения тех или иных когнитивных задач ([1]). Современные нейроисследования позволяют утверждать, что в каждом когнитивном процессе, тем более таких сложных, как процессы сознания, участвует не один, а несколько пространственно распределенных функциональных регионов, объединенных в единую динамичную нейросетевую архитектуру. Для изучения таких сетей необходимо создание комплекса методов и подходов с целью выявления:

- 1) отдельных функциональных зон;
- 2) связей между функциональными зонами и определения их количественного выражения;
- 3) причинно-следственных зависимостей между связанными зонами.

В данной работе предложены некоторые из заявленных подходов, применительно к фМРТ данным состояния покоя головного мозга.

фМРТ является одним из перспективных методов изучения нейросетей головного мозга, позволяющим одновременно регистрировать физиологические сигналы от коры и глубинных структур головного мозга. Использование ультрабыстрых последовательностей МРТ (multiband последовательности разработаны в MRR-центре департамента радиологии университета Миннесоты, [2]) позволяет увеличить частоту дискретизации сигнала до 1-1,5 Гц и соотношение сигнал — шум, но требует специальных, нестандартных режимов предобработки данных. В разных программных пакетах (FSL, AFNI и SPM) реализуются различные алгоритмы расчетов и поправок артефактов. Однако реализованные в них стандартные процедуры могут давать ложные оценки при анализе ультрабыстрых фМРТ последовательностей. В нашем исследовании ([3]) предложен собственный алгоритм работы с ультрабыстрыми последовательностями, включающий в себя подавление как временных, так и пространственных артефактов: коррекция артефактов движения алгоритмом «ближайших соседей», коррекция данных на неоднородность

магнитного поля в области сканирования, коррекция временного смещения сигнала, сегментация структур головного мозга в атласном MNI-пространстве с последующим подавлением физиологического шума на основе метода независимых компонент.

Для построения на основе фМРТ данных иерархической модели взаимодействия крупномасштабных нейросетей необходима верифицированная привязка функциональных зон к анатомии. К настоящему времени существует ряд работ, посвященных атласному разбиению коры головного мозга человека на функционально-структурные зоны, например, работа [4]). Структура создаваемых функциональных атласов предполагает, что все воксели, входящие в одну функциональную зону, выполняют схожую функцию и имеют схожую динамику. Это предположение используется во многих исследованиях, в которых для уменьшения размерности данных, все динамики вокселей, входящих в одну функциональную зону, заменяют одной, полученной, например, их усреднением. Однако, наши исследования показали, что в одну атласную зону зачастую попадают воксели, динамики которых не демонстрирует высокой корреляции (например, по Пирсону или Канделу). Так, воксели, формально входящие в один регион согласно анатомическим атласам (например, AAL), но расположенные на противоположных границах, могут иметь корреляцию близкую к нулю и даже отрицательную. Объяснение данного факта — либо разбиение на зоны не вполне корректно, либо корреляция не может выступать в качестве метрики близости динамики вокселей, входящих в одну зону, либо имеет место оба предположения. Тем не менее, если регионы не являются функционально-однородными, то построенный на них коннектом не будет корректным. Нами предложены совершенно новые два алгоритма расчета функционально-однородных регионов (ФОР) головного мозга ([5]) для построения функционального коннектома. Один метод — метод кластерной сегментации (МКС) — позволяет выделить функционально-однородные регионы, стабильные во времени, второй — метод функциональной сегментации (МФС) — позволяет выделить регионы вокселей с высоким уровнем корреляции. Полученные в наших исследованиях ФОР не совпадают ни с одним из ранее предложенных функциональных атласов и могут входить составной частью в атласные разбиения или содержать отдельные части атласных разбиений, находясь на их границе. Каждая ФОР характеризуется временной динамикой, получаемой усреднением динамик или выделением общей динамики методом принципиальных компонент (наши исследования показали, что корреляция Пирсона между общими динамиками, полученными двумя этими методами, равна 0,99). Одной из наиболее спорных процедур при анализе фМРТ данных в состоянии покоя является удаление автокорреляции из сигнала и глобальная регрессия сигнала (GSR). Уда-

ление глобального сигнала с одной стороны повышает анатомическую специфичность паттернов функциональной связи за счет удаления артефактов, связанных с движением, дыханием, режимом работы сканера, с другой стороны, такая процедура изменяет распределение региональных корреляций сигналов в головном мозге и может модифицировать реальный нейронный сигнал. В нашей работе мы предлагаем использовать немного модифицированный альтернативный метод диффузной кластерной оценки и регрессии (DiCER — (D)(i)ffuse (C)luster (E)stimation and (R)egression), который выделяет сигналы, связанные с большими кластерами когерентных вокселей ([6]). Это позволило для каждого отдельного большого кластера (не менее 2000 вокселей в каждом кластере) итеративно удалять из всех образующих его вокселей локальный общий только для них сигнал.

В задаче построения функциональных коннектомов должна быть выбрана мера оценки связности работы нейросетей, необходимым условием применения которой в большинстве случаев является наличие стационарности временных рядов ФОР. Наши исследования показали, что для принятия гипотезы о стационарности рядов необходимо учитывать результаты не одного конкретного метода ее расчета, а целого комплекса методов ([7]). Вопрос о выборе самой меры оценки связности работы нейросетей крайне важен и, как было уже отмечено в работе [8], доверие к получаемым результатам ограничено, поскольку:

- 1) использование разных мер оценки нейросетевой связности дает разные результаты;
- 2) выбор параметров расчетов меры влияют на конечный результат.

В работе [8] была разработана программная система MULAN (MULtiple method ANalysis), реализующая комплексный подход построения мер связности на основе ансамбля, сочетающего 42 метода анализа, определение оптимальных параметров на основе симулированных данных, межметодическое сравнение получаемых результатов и применение нечеткой логики для извлечения графов с наиболее вероятной структурой. В нашей работе мы расширили предлагаемый комплекс мер оценки связности, добавив два метода расчета причинно-следственных связей в коннектоме — трансферную энтропию и метод динамического каузального моделирования, а также метод расчета ко-активационных паттернов (CAP). Таким образом, функциональная связность между ФОР верифицирована, если ее наличие показано при разных метриках. На текущий момент проведенные экспериментальные исследования фМРТ данных состояния покоя трех испытуемых показали, что ФОР, выделенные методом МФС, демонстрируют большую устойчивость связей во времени,

чем регионы, взятые на основе атласа. Сравнение двух предложенных нами подходов к выделению ФОР также показало, что результаты, полученные методом МКС, дают более стабильный во времени уровень функциональных связей между регионами. На данном этапе оба разработанных нами подхода выделения ФОР с последующим построением функциональных коннектомов проходят апробацию на выборке из 25 испытуемых и в дальнейшем предполагается его использование в стимульных когнитивных задачах. Корреляционно-кластерные методы выделения функционально-однородных регионов головного мозга представлены на github: <https://github.com/KozlovStanislav/CCM-FOR>

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23020 мк. Разработка дополнительных подходов к созданию современного алгоритма построения функциональных коннектомов была выполнена при поддержке гранта Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект». Дополнительная апробация разработанных методов была проведена на ультрабыстрых последовательностях фМРТ, полученных в рамках гранта Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075-015-2020-801).

Список литературы

- [1] Ushakov V.L., Sharaev M.G., Kartashov S.I., Zavyalova V.V., Verkhlyutov V.M., Velichkovsky B.M., “Dynamic causal modeling of hippocampal links within the human default mode network: Lateralization and computational stability of effective connections”, *Frontiers in Human Neuroscience*, **10** (2016).
- [2] Xu J., Moeller S., Auerbach E., Strupp J., Smith S.M., Feinberg D.A., Yacoub E., Ugurbil K., “Evaluation of slice accelerations using multiband echo planar imaging at 3T”, *NeuroImage*, **83** (2013), 991–1001.
- [3] Орлов В.А., *Построение модели когнитивного пространства человека по данным функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ)*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2021.
- [4] Glasser M.F., Coalson T.S., Robinson E.C., Hacker C.D., Harwell J., Yacoub E., Ugurbil K., Andersson J., Beckmann C.F., Jenkinson M., Smith S.M., Van Essen D.C. multi-modal parcellation of human cerebral cortex, *Nature*, **536** (2016), 171–178.
- [5] Kozlov S., Poyda A., Orlov V., Sharaev M., Ushakov V., “Selection of functionally homogeneous human brain regions for functional connectomes building based on fMRI data”, *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence, and Neuroinformatics. Postproceedings of the 9th International Conference on Cognitive Studies (Intrercognsci-2020)*, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, **1358** (2021), 709–719.

- [6] Aquino K. M., Fulcher B. D., Parkes L., Sabaroedin K., Fornito A. identifying and removing widespread signal deflections from fMRI data: Rethinking the global signal regression problem, *NeuroImage*, **212** (2020).
- [7] Hyndman R. J., Athanasopoulos G., *Forecasting: principles and practice*, 2nd edition, OTexts, Melbourne, Australia, 2018.
- [8] Wang H. E., Friston K. J., Bénar C. G., Woodman M. M., Chauvel P., Jirsa V., Bernard C., “MULAN: Evaluation and ensemble statistical inference for functional connectivity”, *Neuroimage*, **166** (2018), 166–184.

Features of the functional connectomes design according to fMRI data

Ushakov V.L., Poyda A.A., Kozlov S.O., Orlov V.A., Sharaev M.G.

The brain functioning is based on the parallel synchronous work of the neural networks, the architecture of which determines the properties of the cognitive processes. To construct functional connectomes of the human brain, data from non-invasive methods are usually used: electroencephalography (EEG), magnetic encephalography (MEG), and functional magnetic resonance imaging (fMRI), obtained in stimulus cognitive tasks or at resting state. For each combination of the above experimental methods and the studied cognitive process, there are features in the methods of constructing functional connectomes. Of particular interest is the study of neural network interaction at resting state, as a basic level of consciousness, based on the use of data from the fMRI method. With a bad spatial resolution (about 2 mm) and temporal signal resolution (0.5 Hz), fMRI is the only modern method for the simultaneous registration of physiological signals from the cortex and deep structures of the brain. In this work, using the fMRI data of the brain resting state as an example, we describe the characteristic features of the construction of functional connectomes.

Keywords: neural networks, fMRI, functional connectome, global signal, functionally homogeneous regions, stationarity, autocorrelation, functional atlas, resting state

References

- [1] Ushakov V.L., Sharaev M.G., Kartashov S.I., Zavyalova V.V., Verkhlyutov V.M., Velichkovsky B.M., “Dynamic causal modeling of hippocampal links within the human default mode network: Lateralization and computational stability of effective connections”, *Frontiers in Human Neuroscience*, **10** (2016).
- [2] Xu J., Moeller S., Auerbach E., Strupp J., Smith S.M., Feinberg D.A., Yacoub E., Ugurbil K., “Evaluation of slice accelerations using multiband echo planar imaging at 3T”, *NeuroImage*, **83** (2013), 991–1001.

- [3] Orlov V. A., *Building a model of human cognitive space according to functional magnetic resonance imaging (fMRI)*, PhD Thesis, 2021 (In Russian).
- [4] Glasser M.F., Coalson T.S., Robinson E.C., Hacker C.D., Harwell J., Yacoub E., Ugurbil K., Andersson J., Beckmann C.F., Jenkinson M., Smith S.M., Van Essen D.C. multi-modal parcellation of human cerebral cortex, *Nature*, **536** (2016), 171–178.
- [5] Kozlov S., Poyda A., Orlov V., Sharaev M., Ushakov V., “Selection of functionally homogeneous human brain regions for functional connectomes building based on fMRI data”, Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence, and Neuroinformatics. Postproceedings of the 9th International Conference on Cognitive Studies (Intrercognsci-2020), *Advances in Intelligent Systems and Computing*, **1358** (2021), 709–719.
- [6] Aquino K.M., Fulcher B.D., Parkes L., Sabaroedin K., Fornito A. identifying and removing widespread signal deflections from fMRI data: Rethinking the global signal regression problem, *NeuroImage*, **212** (2020).
- [7] Hyndman R. J., Athanasopoulos G., *Forecasting: principles and practice*, 2nd edition, OTexts, Melbourne, Australia, 2018.
- [8] Wang H. E., Friston K. J., Bénar C. G., Woodman M. M., Chauvel P., Jirsa V., Bernard C., “MULAN: Evaluation and ensemble statistical inference for functional connectivity”, *Neuroimage*, **166** (2018), 166–184.

Часть 8.
Человеко-ориентированный
искусственный интеллект и
нейроинтерфейсные технологии

Нейросетевой классификатор ЭЭГ людей, перенесших и не перенесших COVID-19

А. Зубов¹
М. Исаева²
А. Бернадотт³

Бинарный классификатор, основанный на свёрточной и рекуррентной нейронной сети, показал точность, равную в среднем 60%, с максимальным значением 78,9% при классификации данных ЭЭГ от людей, перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19) и людей, которые не имели перенесенного диагностированного COVID-19. Полученные данные подтверждают гипотезу о наличии определенных паттернов электрической активности мозга у людей, перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19). *Keywords:* COVID-19, ЭЭГ, нейронные сети, SARS-CoV-2

1. Введение

Разработка нейроинтерфейсов часто сопряжена с выявлением особых неврологических состояний испытуемых. В своем исследовании по разработке неинвазивного интерфейса мозг-компьютер, использующего 8

¹*Зубов Александр* — аспирант каф. инженерной кибернетики в МИСиС, e-mail: AIZubov@sberbank.ru ; разработчик в управлении экспериментальных систем машинного обучения департамента SberDevices, Сбер.

Zubov Aleksandr — developer at at Experimental ML Systems Subdivision, SberDevices, PJSC Sberbank; graduate student, Department of Information Technologies and Computer Sciences, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS).

²*Исаева Марина* — аспирантка каф. инженерной кибернетики в МИСиС, e-mail: isaevam.ec@gmail.com ; разработчик в управлении экспериментальных систем машинного обучения департамента SberDevices, Сбер.

Isaeva Marina — developer at at Experimental ML Systems Subdivision, SberDevices, PJSC Sberbank; graduate student, Department of Information Technologies and Computer Sciences, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS).

³*Бернадотт Александра* — исполнительный директор и лидер команды в управлении экспериментальных систем машинного обучения департамента SberDevices, Сбер; доцент каф. инженерной кибернетики в МИСиС; аспирантка каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bernadotte.alexandra@intsys.msu.ru.

Bernadotte Alexandra — Executive Director at Experimental ML Systems Subdivision, SberDevices, PJSC Sberbank; assistant professor, Department of Information Technologies and Computer Sciences, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS); graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

ментальных команд направления движения для взаимодействия с периферийными устройствами, мы столкнулись с особенностями сигнала у пользователей, перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19). Для выявления особенностей электрической активности мозга у переболевших людей и научной поддержки необходимости вакцинации мы провели исследование, косвенно подтверждающее неврологические последствия перенесенного SARS-CoV-2 (COVID-19).

На текущий момент известно 7 человеческих коронавирусов, некоторые из них ассоциированы с острыми, в большинстве, респираторными заболеваниями: ближневосточный респираторный синдром (MERS-CoV), SARS-CoV-1, SARS-CoV-2. Для некоторых коронавирусов таких, как HCoV-229E, HCoV-OC43, SARS-CoV-1 и SARS-CoV-2 (COVID-19), показана связь с неврологическими осложнениями. РНК HCoV-229E и HCoV-OC43 определяются в мозговой ткани пациентов с диагностированным рассеянным склерозом в больших концентрациях, чем у доноров без поставленного диагноза [1]. В 2020 году было показано, что повреждения нейронов могут быть вызваны прямым взаимодействием с вирусом SARS-CoV-2 (COVID-19), и коррелируют с симптомами миелита, энцефалита, менингита, энцефалопатии, нарушений мозгового кровообращения [2].

В нашем исследовании мы хотели бы изучить особенности электрической активности мозга после перенесенной инфекции, вызванной вирусом SARS-CoV-2 (COVID-19) по данным электроэнцефалографии (ЭЭГ). Данный метод может являться вспомогательным неинвазивным скрининговым методом для оценки неврологических последствий перенесенной инфекции.

Таким образом, целью нашего исследования является проверка следующей гипотезы: данные электрической активности мозга от испытуемых, перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19), и данные от испытуемых не переболевших SARS-CoV-2 (COVID-19) обладают признаками, выявляемыми с помощью бинарного классификатора на основе конволюционной и рекуррентной нейронной сети.

Данная гипотеза косвенно подтверждает наличие неврологических последствий перенесенного SARS-CoV-2 (COVID-19).

2. Методы

Данные для исследования были получены методом ЭЭГ на 32 безгелевых электродах, схема позиционирования электродов — 10-20. Запись данных осуществлялась с помощью двух модулей Cyton OpenBCI и собственного модуля оцифровки и преобразования сигнала. Частота дискретизации сигнала составляла 250 Гц.

Эксперимент представлял собой следующее: испытуемым демонстрировались слова на мониторе (8 слов на русском языке) в течении 3 секунд с последующей паузой в виде черного экрана в 2 секунды; во время демонстрации испытуемых просили произносить слова внутренним голосом; во время эксперимента у испытуемых записывались данные ЭЭГ. Длительность эксперимента составляла 5 – 60 минут, в зависимости от индивидуального состояния и желания испытуемого.

Данные были размечены на данные от болевших (32 человека) и не болевших испытуемых (40 человек). Датасет планируется сделать публично доступным по лицензии FreeBSD 3 в ближайшее время. Обработка данных осуществлялась аналогично описанной нами ранее методике со следующими модификациями: дублирование каналов височных долей на начальной стадии для достижения исходной размерности 40 x 1024 [3]. В результате в обработанный вектор формата 256 x 256 вошли признаки частотного спектра, данные без обработки, значения медиан каналов речевого центра, компоненты глазного шума. Обработанные данные балансировали по количеству векторов в классах болевших и не болевших индивидов до получения равных значений. Выборку делили на обучающую (70% от всего объема), валидационную (20%) и тестовую (10%) выборки. В качестве модели для бинарного классификатора была выбрана свёрточная рекуррентная сеть ResNet18 с двумя слоями GRU (рекуррентный блок) [3]. При обучении модели использовали алгоритм Адам с параметром обучения 0.001, размер батча составлял 128 векторов, обучали не более 200 эпох.

3. Результаты

Модифицированный бинарный классификатор на основе конволюционной и рекуррентной нейронной сети, представленный нами ранее [3], показал среднюю точность классификации на переболевших и не переболевших испытуемых равную 60%, с максимальным значением 78.9%. Полученные данные подтверждают гипотезу об особенностях паттернов электрической активности мозга, свойственных людям, перенесшим SARS-CoV-2 (COVID-19).

4. Заключение

В своей работе мы подтвердили возможность использования нейросетевого алгоритма для выявления особенностей электрической активности мозга после перенесенного SARS-CoV-2 (COVID-19). Мы сформулировали и доказали гипотезу, косвенно подтверждающую наличие невро-

логических симптомов, выявляемых по ЭЭГ, у испытуемых перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19). Мы показали возможность использования методов машинного обучения для выявления неврологических последствий SARS-CoV-2 (COVID-19) и продемонстрировали возможности неинвазивных нейроинтерфейсов на основе ЭЭГ для решения подобных задач. В дальнейшем мы планируем детальнее рассмотреть особенности электрической активности мозга для выявления частотных паттернов, паттернов асимметрии полушарий мозга, проблем латерального торможения и задержки вызванного потенциала у людей, перенесших SARS-CoV-2 (COVID-19).

**Neural network classifier for EEG data from people who have undergone COVID-19 and have not
Zubov A., Isaeva M., Bernadotte A.**

A binary classifier based on a convolutional and recurrent neural network, showed accuracy equal to 60% on average, with a maximum value of 78.9% when classifying EEG data from people who have undergone SARS-CoV-2 (COVID-19) and people who did not meet the SARS criteria. The data obtained support the hypothesis about the presence of the brain electrical activity patterns in people who have undergone SARS-CoV-2 (COVID-19).

Keywords: COVID-19, EEG, neural network, SARS-CoV-2

References

- [1] A. Salmi, B. Ziola, T. Hovi, and M. Reunanen., “Antibodies to coronaviruses OC43 and 229E in multiple sclerosis patients.”, *Neurology*, **32** (1982.), 292–295..
- [2] N. Arbour, R. Day, J. Newcombe, P.J. Talbot, “Neuroinvasion by human respiratory coronaviruses.”, *J Virol*, **74**:19 (2000), 8913–8921.
- [3] D. Vorontsova, I. Menshikov, A. Zubov, K. Orlov, P. Rikunov, E. Zvereva, L. Flitman, A. Lanikin, A. Sokolova, S. Markov, A. Bernadotte, “Silent EEG-Speech Recognition Using Convolutional and Recurrent Neural Network with 85% Accuracy of 9 Words Classification”, *Sensors*, **21**:20 (2021), 6744.

Критерий качества кластеризации на основе отбора признаков размеченной выборки с приложением в области разработки интерфейсов мозг-компьютер

А. Мазурин¹ А. Бернадотт²

В прикладных задачах машинного обучения часто встречается проблема неоднородности выборки. Например, это приводит к трудностям в решении задачи распознавания паттернов электрической активности мозга при разработке нейроинтерфейса у людей разных социальных характеристик.

В работе мы предложили новый метод оценки работы алгоритма кластеризации, имеющий низкие вычислительные затраты и основанный на способности алгоритма распознать скрытые закономерности, то есть выделять группы, схожие по внешнему признаку. Мы показали области практического применения алгоритма, в частности в задачах классификации данных электрической активности мозга при произнесении 8 слов у людей с разными социальными характеристиками.

Ключевые слова: кластеризация, критерий качества кластеризации, нейроинтерфейс.

1. Введение

В прикладных задачах машинного обучения распространена проблема неоднородности выборки. Одним из решений данной проблемы может

¹Мазурин Александр Дмитриевич — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, разработчик в управлении экспериментальных систем машинного обучения департамента SberDevices, Сбер, e-mail: mazurin1567@gmail.com.

Mazurin Alexander — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems; developer at Experimental ML Systems Subdivision, SberDevices, PJSC Sberbank

²Бернадотт Александра — исполнительный директор и лидер команды в управлении экспериментальных систем машинного обучения департамента SberDevices, Сбер; доцент каф. инженерной кибернетики в МИСиС; аспирантка каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bernadotte.alexandra@intsys.msu.ru.

Bernadotte Alexandra — Executive Director at Experimental ML Systems Subdivision, SberDevices, PJSC Sberbank; assistant professor, Department of Information Technologies and Computer Sciences, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS); graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

быть разделение выборки на несколько групп, состоящих из более однородных данных. Последующее обучение с использованием нейронных сетей на каждой из групп по отдельности может повысить точность решения прикладных задач, например, задач классификации. Простое применение классических методов кластеризации не всегда выделяет явный признак, по которому новый элемент выборки может быть отнесён к той или иной группе. Для решения этой задачи можно, с одной стороны, индуцировать разбиение выборки на подгруппы, построив конечное число отображений (внешних признаков) на элементах выборки с дискретной областью значений. С другой стороны, применяя алгоритм кластеризации, можно получить разбиение на кластеры по признаку схожести самих данных и сравнить соответствие этих двух разбиений путём создания метрики сходства.

Для оценки работы алгоритмов кластеризации сейчас используется две категории критериев качества кластеризации – внутренние и внешние. Внешние критерии оценивают результат работы алгоритма по его сходству с известным (согласно мета-данным выборки) разбиением данных на классы, в то время как внутренние критерии – по геометрическим признакам, таким как компактность получившихся кластеров и их делимость.

В нашей работе мы представляем метод оценки качества кластеризации, соответствующий задаче кластеризации данных электроэнцефалографии согласно социальным мета-данным и используемый для повышения точности последующей классификации мыслительных команд (слов, задающих направление движения и передаваемых в устройстве, соединяющем мозг и компьютер) в проекте по разработке нейроинтерфейса. Представленный метод позволяет оценить сходство полученных в результате работы алгоритма кластеризации классов с разбиением, индуцированным наличием у объектов выборки (на данных электрической активности мозга от 270 испытуемых) внешних признаков – социальных мета-данных, таких, как возраст, профессия и образование. В 2022 году планируется доступ к использованному в нашей работе набору данных электрической активности мозга под лицензией Free BSD 3.

2. Критерий качества кластеризации, основанный на выделении признака

Пусть алгоритм кластеризации завершился разбиением обучающей выборки X на множество C кластеров, имеющее мощность K . Пусть также имеется множество A всех внешних признаков – отображений, ставящих в соответствие элементу выборки x численное значение признака a из

области его значений $dom(a)$. Принципом, на котором основан предлагаемый критерий качества кластеризации, является следующая

Кластеризация выполнена качественно \iff для каждого признака a из множества признаков A существует кластер из разбиения, все элементы которого принимают одно значение признака a , в то время как значение признака a у всех остальных элементов других кластеров отличается. Формализуем этот критерий в математической форме:

$$M(C) = \sum_{a \in A} \frac{1}{|dom(a)|} \sum_{i \in dom(a)} \max_{c_k \in C} \frac{\frac{1}{|c_k|} \sum_{x_j \in c_k} \mathbb{I}\{a(x_j) = i\}}{\frac{1}{|X| - |c_k|} \left(\sum_{c_l \in C \setminus c_k} \sum_{x_j \in c_l} \mathbb{I}\{a(x_j) = i\} + \varepsilon \right)},$$

где ε – произвольное малое число, необходимое для устранения обращения знаменателя в нуль.

Теорема 1. *Вычислительная затрата предложенного критерия M составляет $O(NK\tilde{A})$ операций, где $N = |X|$ – размер обучающей выборки, K – число кластеров в разбиении, $\tilde{A} = \sum_{a \in A} |dom(a)|$. Если зафиксировано K , а также множество всех внешних признаков и их значений, трудоёмкость вычисления критерия M составит $O(N)$ операций.*

Ситуация, при которой K не является фиксированной величиной, может возникать в задаче подбора оптимального количества кластеров K . При этом оптимальное K может по размерам быть сопоставимо с N , и тогда критерий M имеет квадратичную вычислительную сложность.

В таблице на рис. 1 приведено сравнение по сложности наиболее используемых внешних критериев качества кластеризации и предложенного индекса M , а также объективизация сравнения адекватности различных индексов качества кластеризации в виде представления результатов оптимальной, согласно критериям, кластеризации для восьми слов русского языка, представленных данными электроэнцефалограммы (см. Практическое применение алгоритма).

3. Практическое применение алгоритма

Применение алгоритма существенно повышает точность решения задачи классификации данных электрической активности мозга нейросетевым сверточным рекуррентным классификатором[4] на выборке, состоящей из индивидов с разными социальными признаками, такими как пол, возраст (до 25, от 25 до 35, старше 35), образование (гуманитарное, техническое, прикладное). Индекс M позволил выявить более тонкие закономерности

Название критерия	Математическая запись	Описание критерия	Вычислительная сложность	Результаты применения на датасете ЭЭГ (оптимальное число кластеров)
Скорректированный индекс Рэнда	$\frac{\sum_j C_{n_j}^2 - \left(\sum_i C_{a_i}^2 \sum_j C_{b_j}^2 \right) / C_n^2}{\frac{1}{2} \left(\sum_i C_{a_i}^2 + \sum_j C_{b_j}^2 \right) - \left(\sum_i C_{a_i}^2 \sum_j C_{b_j}^2 \right) / C_n^2}$, где $n_{ij} = X_i \cap Y_j , a_i = \sum_j n_{ij}, b_j = \sum_i n_{ij}$	внешний; выражает схожесть двух разных кластеризаций одной и той же выборки; отличается от индекса Rand введением нормировки; максимизируем	$O(N)$	слово 1: 0.1333 (10 кластеров) слово 2: 0.0813 (19 кластеров) слово 3: 0.0944 (13 кластеров) слово 4: 0.0886 (18 кластеров) слово 6: 0.0641 (20 кластеров) слово 7: 0.0734 (11 кластеров) слово 8: 0.1013 (17 кластеров)
Индекс Жакжара	$\frac{TP}{TP + FN + FP}$	внешний; в отличие от Rand и Adjusted Rand, не учитывает пары элементов находящиеся в разные классах и разных кластерах; максимизируем	$O(N)$	слово 1: 0.1551 (2 кластера) слово 2: 0.1568 (3 кластера) слово 3: 0.1632 (3 кластера) слово 4: 0.1632 (3 кластера) слово 6: 0.2323 (3 кластера) слово 7: 0.2006 (2 кластера) слово 8: 0.2649 (3 кластера)
Индекс Фолкса-Мэлоуа	$\sqrt{\frac{TP}{TP + FP} \cdot \frac{TP}{TP + FN}}$	внешний; используется для определения сходства между двумя кластерами и хорошо работает на зашумленных данных; максимизируем	$O(N)$	слово 1: 0.5241 (2 кластера) слово 2: 0.6274 (2 кластера) слово 3: 0.6418 (2 кластера) слово 4: 0.6444 (2 кластера) слово 6: 0.6986 (2 кластера) слово 7: 0.6986 (2 кластера) слово 8: 0.5710 (2 кластера)
Индекс M	$R(a, i, k) = \frac{1}{ dom(a) } \sum_{i \in dom(a)} \max_{a_j \in C} \frac{TP}{TP + FP} \cdot \frac{TP}{TP + FN}$ $R(a, i, k) = \frac{1}{ X - a_i } \left(\sum_{q \in C \setminus \{a_i, x_j \in C_q\}} \mathbb{I}\{a(x_j) = i\} + 1 \right)$	внешний; используется для определения сходства между кластерами и zároveň неизвестным разбиением выборки на классы; требует размеченную выборку; максимизируем	$O(N)$	слово 1: 0.5378 (18 кластеров) слово 2: 0.5439 (19 кластеров) слово 3: 0.7926 (18 кластеров) слово 4: 0.7912 (16 кластеров) слово 6: 0.4731 (19 кластеров) слово 7: 0.4732 (19 кластеров) слово 8: 0.4760 (20 кластеров)

Рис. 1. В таблице представлены: скорректированный индекс Ренда [1], индекс Жаккара [2], индекс Фулкса-Мэллова [3], и предложенный в данной статье индекс М. В последней колонке представлено применение индексов для выявления оптимального числа кластеров на данных электрической активности мозга при произнесении 8 слов-команд.

в данных и разделить выборку на кластеры методом k -средних, соответствующие комбинациям мета-данных. Так, выбор оптимального согласно индексу М числа кластеров (18 кластеров) для данных электроэнцефалограммы позволяет точно выделить гомогенные группы испытуемых относительно рода занятий: представителей технического и гуманитарного образования. Уменьшение количества кластеров до оптимального, согласно другим индексам качества кластеризации, не приводило к выделению гомогенных групп испытуемых. Полученное разделение на группы может существенно повысить качество классификации слов при обучении нейросетевого классификатора на группах из гомогенных относительно социальных характеристик данных.

4. Заключение

Подводя итоги вышесказанному, мы предложили новый метод оценки работы алгоритма кластеризации, имеющий низкие вычислительные затраты и основанный не на близости/отдалённости объектов выборки, а на способности алгоритма распознать скрытые от него закономерности, то есть выделять группы, схожие по внешнему признаку. Более того, мы показали области практического применения алгоритма, в частности в задачах классификации данных электрической активности мозга при произнесении 8 слов у людей с разными социальными характеристиками.

Clustering quality criterion based on the features extraction of a tagged sample with an application in the field of brain-computer interface development

Mazurin A., Bernadotte A.

In applied machine learning, the problem of sample heterogeneity is often encountered. For example, the sample heterogeneity leads to serious difficulties in solving the problem of brain electrical activity patterns recognition when developing a brain-computer interface for people of different social characteristics.

In this work, we proposed a new criterion of clustering quality based on the features selection, which has low computing needs and is based

not on the proximity / remoteness of the sampled objects, but on the ability of an algorithm to recognize hidden patterns, that is, to select groups that are similar in features. We have shown the areas of practical application of the algorithm, in particular, in the task of brain electrical activity patterns recognition when pronouncing 8 words by people with different social characteristics.

Keywords: clustering, criterion of clustering quality, brain-computer interface.

References

- [1] W. M. Rand, “Objective criteria for the evaluation of clustering methods”, *Journal of the American Statistical Association. American Statistical Association*, **66**:336 (1971), 846–850.
- [2] Paul Jaccard, “The Distribution of the Flora in the Alpine Zone”, *New Phytologist*, **11**:2 (1912), 37–50.
- [3] E. B. Fowlkes, C. L. Mallows, “A Method for Comparing Two Hierarchical Clusterings”, *Journal of the American Statistical Association*, **78**:383 (1983), 553.
- [4] D. Vorontsova, I. Menshikov, A. Zubov, K. Orlov, P. Rikunov, E. Zvereva, L. Flitman, A. Lanikin, A. Sokolova, S. Markov, A. Bernadotte, “Silent EEG-Speech Recognition Using Convolutional and Recurrent Neural Network with 85% Accuracy of 9 Words Classification”, *Sensors*, **21**:20 (2021), 6744.

Часть 9.
Представление знаний и
автоматизация рассуждений

Метарассуждения: логико-когнитивный ПОДХОД

Д. В. Зайцев¹

В работе предлагается использовать синтетический подход к формальному представлению рассуждений в искусственном интеллекте. Основу этого подхода составляют положения теории двойного процесса, позволяющие различить элементарные, быстрые, интуитивные базовые рассуждения и контролируемые, осознаваемые, медленные рассуждения, основанные на размышлениях. Другим источником являются развиваемые в логике и формальной аргументации идеи представления метарассуждений как трансформации исходных рассуждений.

Ключевые слова: человеко-совместимый искусственный интеллект, метарассуждения, трансформация рассуждений.

С годами парадигма исследований искусственного интеллекта (далее ИИ) претерпевает существенные изменения. Одна из последних концепций представлена в книге С. Расселла [1], опубликованной в 2019 г. Автор считает, что проект ИИ зашел в тупик, а причину этого видит в неверной трактовке интеллекта. Согласно стандартному подходу, основы которого были заложены Н. Винером, машины разумны в той степени, в которой в какой от их действий можно ожидать достижения их целей, предварительно заложенных в них людьми. Стандартному пониманию интеллекта противопоставляется идея "человеко-совместимого" (human compatible) ИИ: машины полезны в той степени, в которой от их действий можно ожидать достижения наших целей. Такой подход предполагает способность ИИ понимать действия людей, в той степени, в которой они понятны нам самим, то есть со значительной мерой неопределенности.

Естественно эволюция понимания ИИ сопровождается изменениями в трактовке рассуждений как одной из главных функций ИИ. Логические рассуждения, формализуемые в соответствии с жесткими критериями классической логики, уступили место формальным моделям естественных рассуждений, существенными чертами которых являются неопределенность, правдоподобность, модифицируемость (немонотонность) и т.п. Человеко-совместимому ИИ соответствует идея метарассуждений (см. например, [2], [3], [4]). Метарассуждения понимаются как рассуждения о рассуждениях. Это в свою очередь предполагает рациональный выбор вычислительный действий из определенного предзаданного

¹Зайцев Дмитрий Владимирович — д.ф.н., профессор каф. логики философского ф-та МГУ, e-mail: zaitsev@philos.msu.ru

Zaitsev Dmitry Vladimirovich — D.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Philosophy, Department of Logic.

набора и оценку ожидаемой полезности этих действий, то есть выход на метаяуровень, что позволяет осуществлять так называемый «контроль за обдумыванием» (control of deliberation).

Следует отметить, что метарассуждения не являются темой, обсуждаемой исключительно в рамках логики или компьютерной науки. В когнитивных науках существует давняя традиция исследования метарассуждений в контексте метапознания (metacognition, [5], [6]). Важно, что в рамках этой традиции метарассуждения анализируются в терминах теории двойного процесса. Не вдаваясь в подробности этой интерпретации, зафиксируем важную для дальнейшего рассмотрения идею – интеллектуальные процедуры, которые мы традиционно называем рассуждениями, распадаются на два принципиально различных типа когнитивных процессов: автоматические, быстрые, интуитивные, встроенные механизмы рассуждений (система 1) и управляемые, медленные, основанные на рефлексии и размышлении механизмы (система 2), подробнее см. [7].

Программа метарассуждений включает в себя множество различных направлений исследований. В данном случае акцент делается на рассмотрении перспектив трактовки метарассуждений как процесса перехода от одних (исходных, атомарных) рассуждений к другим.

Одним из оснований развиваемого подхода служат наши совместные исследования с сотрудниками кафедры нейрофизиологии факультета психологии МГУ [8], направленные на выявление когнитивных критериев различения непосредственных автоматических переходов от посылок к заключениям, называемых в традиционной логике умозаключениями, и опосредованных рассуждений, понимаемых как процедуры пошагового обоснования некоторого высказывания. Успешная реализация этого проекта позволит отказаться от конвенционального разведения элементарных умозаключений и состоящих из них рассуждений, и выделить некоторое множество атомарных непосредственных переходов от посылок к заключениям как когнитивный базис человеческих рассуждений.

Другой источник обнаруживается в логике и формальной аргументации. Идея трансформации рассуждений в виде специальных правил, описывающих допустимые способы перестройки вывода отнюдь не нова. Достаточно вспомнить такие принципы как сведение к абсурду или рассуждение от противного:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A},$$

или структурные правила генценовского типа, например, ослабление или сечение:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Theta \vdash \Sigma}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Sigma}.$$

Следующий важный шаг в представлении метарассуждений как трансформации рассуждений делают идеологи формальной аргументации. Особенно хорошо это заметно на примере так называемого «абстрактного аргументативного каркаса» а-ля Данг (abstract argumentation framework), названного так благодаря основополагающей работе [9]. Главные идеи абстрактной аргументации состоят в том, чтобы абстрагироваться от внутренней структуры рассуждений и рассматривать аргументативные рассуждения как атомарные объекты, на которых задано единственное отношение атаки, соответствующее принятому в неформальной теории аргументации понятию критики. В результате аргументативная структура – это пара, включающая множество рассуждений (arguments) и двухместное отношение атаки. Утверждение о том, что рассуждение A атакует рассуждение B обычно представляется как формула вида $A \rightarrow B$. Примечательно, что абстрактное отношение атаки оказывается фундаментальным и позволяет выразить другие отношения между рассуждениями, например отношение поддержки или восстановления (одним рассуждением другого):

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

В этом примере рассуждение B атакует рассуждение C . Но само рассуждение B находится под атакой рассуждения A , которого ничто не атакует. Это позволяет интерпретировать отношение между A и C как поддержку или восстановление: A как бы нейтрализует негативное влияние B .

Таким образом в рамках формальной аргументации разработан эффективный механизм представления и оценки аргументации, предполагающий фиксацию исходных рассуждений как неделимых объектов.

Подводя итог, перспектива соединения описанных выше идей для проекта ИИ видится в следующем.

1. Следуя примеру разработчиков формальной аргументации, я предлагаю рассматривать метарассуждения как способы допустимых трансформаций исходных атомарных умозаключений.
2. Набор атомарных умозаключений выявляется на основе когнитивно-логических исследований и представляет собой множество интуитивно приемлемых автоматически осуществляемых переходов от посылок к заключениям.

Исследование выполнено в рамках научного направления «Философия когнитивных наук и искусственного интеллекта» научно-образовательной школы Московского государственного университета

имени М. В. Ломоносова «Мозг, когнитивные системы и искусственный интеллект».

Metareasonings: logical-cognitive approach Zaitsev D.V.

The paper promotes a synthetic approach to the formal representation of reasoning in artificial intelligence. The basis of this approach is the provisions of the dual process theory, which make it possible to distinguish between elementary, fast, intuitive basic reasoning and controlled, conscious, slow reasoning based on reflection. Another source of my approach is developed in logic and formal argumentation ideas of the representation of meta-reasoning as a transformation of the original reasoning.

Keywords: human compatible artificial intelligence, metareasoning, transformation of reasoning.

References

- [1] Russell S., *Human compatible: Artificial intelligence and the problem of control*, Penguin, New York City, 2019, 352 pp.
- [2] Brazdil P. B., Konolige K. (ed.), *Machine learning, meta-reasoning and logics*, Springer-Verlag, New York City, 1990, 348 pp.
- [3] Russell S., Wefald E., “Principles of metareasoning”, *Artificial intelligence*, **49**:1-3 (1991), 361–395
- [4] Cox M. T., Raja A. (ed.), *Metareasoning: Thinking about thinking*, MIT Press, Cambridge, 2011, 340 pp.
- [5] Flavell J. H., “Metacognitive aspects of problem solving”, *The nature of intelligence*, ed. L. B. Resnick, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1976, 231–235.
- [6] Ackerman R., Thompson V. A., “Meta-reasoning: Monitoring and control of thinking and reasoning”, *Trends in Cognitive Sciences*, **21**:8 (2017), 607–617.
- [7] Thompson, V.A., “Dual-process theories: A metacognitive perspective”, *In Two Minds: Dual Processes and Beyond*, ed. Evans, J. Frankish, K., Oxford University Press, Oxford, 2009, 171–195.
- [8] Kovalev A., Kisel'nikov A., Sukhotina K., Zaitsev D., Zaitseva N., “Oculomotor indicators can differentiate various types of inference processes”, *Psychophysiology*, **58**:51 (2021), S53–S53.
- [9] Dung P.M., “On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games”, *Artificial Intelligence*, **77**:2 (1995), 321–357.

Семантика Крипке объединённой логики задач и высказываний

А. А. Оноприенко¹

Рассматривается объединённая логика задач и высказываний QHC, введённая С. А. Мелиховым. Доказана теорема о полноте данной логики относительно моделей Крипке, получающихся обогащением моделей Крипке с отмеченными мирами для её пропозиционального фрагмента HC. Кроме того, показано, что логика QHC является консервативным расширением предикатного варианта интуиционистской эпистемической логики IEL⁺, предложенной С. А. Артёмовым и Т. Протопопеску.

Ключевые слова: неклассические логики, модальная логика, семантика Крипке

А. Н. Колмогоров рассматривал интерпретацию интуиционистской логики высказываний как логики задач [1]. А. Н. Колмогоров критически исследовал интуиционистскую логику и указывал, что её объекты — это, по существу, задачи, а не теоретические высказывания. Поэтому интуиционистская логика должна быть заменена исчислением задач. По замыслу А. Н. Колмогорова работа [1] должна была стать предпосылкой к созданию «единого логического аппарата», работающего одновременно с объектами двух типов: задачами и высказываниями. Такое исчисление содержало бы в себе интуиционистскую логику как логику решения задач и вместе с тем не запрещало «грязные теоремы существования», без которых математика часто не может обойтись.

С. А. Мелихов в [2], [3] ввёл в рассмотрение объединённую логику задач и высказываний QHC, содержащую переменные двух сортов — сорта высказывание и сорта задача. Формулы логики QHC строятся из переменных с помощью стандартных классических и интуиционистских связок и кванторов $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$ (не меняющих сорт формул), а также модальностей ! и ?. Формулы сорта высказывание подчиняются аксиомам и правилам вывода классической логики предикатов, а формулы сорта задача — аксиомам и правилам вывода интуиционистской логики

¹ Оноприенко Анастасия Александровна — аспирантка каф. математической логики и теории алгоритмов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ansidiana@yandex.ru. Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект»

Onoprienko Anastasia Alexandrovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms. This research has been supported by the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University «Brain, Cognitive Systems, Artificial Intelligence»

предикатов. Модальности меняют сорт формул: если p — формула сорта высказывание, то $!p$ — задача «найди доказательство p ». Если α — формула сорта задача, то $?\alpha$ — высказывание «задача α имеет решение». Эти модальности связаны между собой следующими аксиомами и правилами вывода [2]:

1. $!(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$;
2. $?(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$;
3. $\frac{p}{!p}$;
4. $\frac{\alpha}{? \alpha}$;
5. $?!p \rightarrow p$;
6. $\alpha \rightarrow !? \alpha$;
7. $\neg !0$.

С.А. Мелихов рассмотрел несколько типов моделей логики QHC (топологические модели, модели на основе понятия пучка), но даже для пропозиционального фрагмента HC этой логики не было известно полной семантики [3]. Автором в [4] рассмотрены следующие типы моделей логики HC: алгебраическая семантика, модели Крипке с двумя независимыми множествами миров, а также модели Крипке с отмеченными мирами. Доказано, что логика HC полна относительно конечных моделей каждого из этих типов.

В [5] были введены следующие шкалы Крипке с отмеченными мирами и рассмотрены в качестве моделей эпистемической логики IEL⁺.

Определение 1. *Тройка (W, \preceq, Aud) называется шкалой Крипке с отмеченными мирами, если (W, \preceq) — стандартная модель Крипке интуиционистской логики высказываний (W — непустое множество, \preceq — частичный порядок), $\text{Aud} \subseteq W$ — множество отмеченных миров и выполнено следующее свойство*

$$\forall a \in W \exists b \in W (a \preceq b \wedge b \in \text{Aud}).$$

Определим истинность интуиционистских переменных и интуиционистских связок как в стандартных моделях Крипке, истинность классических переменных — в мирах множества Aud , а истинность классических связок естественным образом. Наконец, определив оценки для формул, получаемых при помощи модальностей,

$$\begin{aligned} a \models ?\alpha &\Leftrightarrow a \models \alpha \text{ (для } a \in \text{Aud)} \\ a \models !p &\Leftrightarrow \forall b \in \text{Aud} (a \preceq b \Rightarrow b \models p) \text{ (для } a \in W), \end{aligned}$$

получим модель Крипке логики HC. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Логика НС полна относительно моделей Крипке с отмеченными мирами. Кроме того, выполнено свойство конечных моделей.*

Описанные модели можно обогатить до моделей предикатного варианта логики НС — логики QHC — следующим образом: к каждому миру $a \in W$ приписывается некоторое непустое множество D_a , которое можно воспринимать как совокупность объектов, построенных к этому моменту [6]. Подобная техника была использована в [7] для построения семантики интуиционистской логики предикатов. Предполагается, что если $a \preceq b$, то $D_a \subseteq D_b$, кроме того, если $a \models A(x_1, \dots, x_n)$, то $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq D_a$, и если $A(x_1, \dots, x_n)$ — атом сорта задача и $a \preceq b$, то $b \models A(x_1, \dots, x_n)$ (то есть для атомов сорта задача выполнена монотонность). Индуктивный переход в определении отношения истинности для классических и интуиционистских кванторов следующий.

Классические кванторы ($a \in \text{Aud}$):

$$\begin{aligned} a \models \exists x p(x) &\Leftrightarrow (\exists v \in D_a) a \models p(v); \\ a \models \forall x p(x) &\Leftrightarrow (\forall v \in D_a) a \models p(v). \end{aligned}$$

Интуиционистские кванторы ($a \in W$):

$$\begin{aligned} a \models \exists x \alpha(x) &\Leftrightarrow \exists v \in D_a a \models \alpha(v); \\ a \models \forall x \alpha(x) &\Leftrightarrow \forall b \succ a \forall v \in D_b b \models \alpha(v). \end{aligned}$$

Для данной семантики получены следующие результаты [6].

Теорема 2. *Для любой непротиворечивой теории Γ логики QHC существует модель Крипке \mathcal{K} и её отмеченный мир x такие, что в этом мире данной модели \mathcal{K} истинны все формулы из Γ .*

Теорема 3. *Логика QHC является консервативным расширением предикатного варианта логики IEL⁺, если понимать модальность ∇ логики IEL⁺ как производную модальность !? логики QHC.*

Теорема 4. *Для интуиционистского фрагмента логики QHC имеют место дизъюнктивное и экзистенциальное свойство.*

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985.
- [2] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax”, 2013/17 arXiv:1312.2575.
- [3] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics”, 2015/18 arXiv:1504.03379.

- [4] А. А. Оноприенко, “Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний”, *Математический сборник*, **211**:5 (2020), 98-125.
- [5] S. Artemov, T. Protopopescu, “Intuitionistic Epistemic Logic”, 2014/16 arXiv:1406.1582v2.
- [6] А. А. Оноприенко, “Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний”, (*подана в журнал*).
- [7] В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян, *Интуиционистская логика*, Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, М., 2009.

Kripke type semantics for the joint logic of problems and propositions
Onoprienko A.A.

We consider the joint logic of problems and propositions QHC suggested by S. A. Melikhov. We prove that this logic is complete with respect to Kripke models obtained by enrichment of Kripke models with audit set for a propositional part HC of this logic. We also show that this logic conservatively extends the predicate version of intuitionistic epistemic logic IEL^+ constructed by S. Artemov and T. Protopopescu.

Keywords: non-classical logics, modal logic, Kripke semantic

References

- [1] Tikhomirov V. M. (ed.), *Selected Works of A. N. Kolmogorov: Volume I: Mathematics and Mechanics (Vol. 25)*, Springer Science & Business Media, 1991.
- [2] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax”, 2013/17 arXiv:1312.2575.
- [3] S. A. Melikhov, “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics”, 2015/18 arXiv:1504.03379.
- [4] А. А. Оноприенко, “Kripke semantics for the logic of problems and propositions”, *Sbornik: Mathematics*, **211**:5 (2020), 709–732.
- [5] S. Artemov, T. Protopopescu, “Intuitionistic Epistemic Logic”, 2014/16 arXiv:1406.1582v2.
- [6] А. А. Оноприенко, “Predicate version for the joint logic of problems and propositions”, (*submitted in journal*) (In Russian).
- [7] В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян, *Intuitionistic logic*, publishing house at the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, М., 2009 (In Russian).

Компьютерные доказательства и их понимание человеком: случай унивалентных оснований

А. В. Родин¹

Компьютерное доказательство теоремы о четырех красках, которое было впервые опубликовано Апеллем, Хакеном и Кохом в 1977-м году, спровоцировало продолжающуюся по сегодняшний день философскую дискуссию об эпистемической ценности компьютерных доказательств. В настоящей работе мы показываем, опираясь на подход предложенный в 2006 году Баслером, как унивалентные основания математики (УО) решают некоторые эпистемологические проблемы, которые ранее обсуждались в литературе в связи с компьютерными доказательствами, и тем самым сглаживают различия между компьютерными и традиционными математическими доказательствами. Мы иллюстрируем наши аргументы примером формализованной и компьютеризированной версии доказательства из области алгебраической топологии.

Ключевые слова: унивалентные основания, компьютерные доказательства, пространственная интуиция

1. Введение

Компьютерное доказательство теоремы о четырех красках (Т4К) было впервые опубликовано Апеллем, Хакеном и Кохом в 1977-м году [1]. В 1979-м году Тимошко опубликовал провокационную статью [7], в которой он аргументировал, опираясь на пример доказательства Т4К, что использование компьютерных доказательств кардинально меняет природу математики и делает математику подобной экспериментальной физике. Эта статья породила живую философскую дискуссию, которая продолжается по сегодняшний день [3],[2],[5]. В центре этой дискуссии находится вопрос об эпистемической прозрачности (surveyability) компьютерных доказательств. Как отмечает Тимошко и вслед за ним многие другие участники этой дискуссии, компьютерные доказательства в отличие от традиционных математических доказательств не обладают качеством эпистемической прозрачности: человек не в состоянии проследить за ра-

¹ *Родин Андрей Вячеславович* — доктор филос. наук, старший научный сотрудник ИФРАН и доцент СПбГУ, email: andrei@philomatica.org

Andrei Rodin, Sc.D., senior researcher in the Institute of Philosophy (Russian Academy of Sciences) and Associated Professor (Docent) in Saint-Petersburg State University.

ботой компьютера таким же образом, как он способен проследить за рассуждениями другого человека, и поэтому вынужден оценивать результаты компьютерных вычислений в готовом виде. В настоящей работе мы показываем, опираясь на поход предложенный в 2006 году Баслером, как унивалентные основания математики (УО) позволяют решить проблему прозрачности компьютерных доказательств и тем самым сгладить различия между компьютерными и традиционными математическими доказательствами. Мы иллюстрируем наши аргументы примером формализованной и компьютеризированной версии доказательства из области алгебраической топологии, который мы заимствуем из работы [4].

2. Локальная и глобальная прозрачность математических доказательств

Под *локальной* прозрачностью математического доказательства p Баслер понимает свойство (качество) этого доказательства, которое позволяет всякому человеку отслеживать каждый элементарный шаг p [2]. Баслер аргументирует, что локальная прозрачность сама по себе не делает данное доказательство эпистемически прозрачным, поскольку помимо локальной прозрачность для этого требуется *глобальная* прозрачность. Под глобальной прозрачностью Баслер понимает свойство (качество) доказательства p , которое позволяет человеку понять, что совокупность всех элементарных шагов p служит обоснованием заключения p при данных предпосылках. В исторической части своей статьи Баслер указывает на устойчивую философскую тенденцию игнорировать глобальный аспект эпистемической прозрачности, которая, по его мнению, восходит к философии Рене Декарта.

Применяя различие между локальной и глобальной прозрачностью доказательств вслед за Баслером к случаю компьютерного доказательства Т4К, мы предлагаем следующее уточнение предложенного им анализа. Компьютерная часть этого доказательства локально прозрачна, поскольку соответствующий программный код написан человеком и может быть проверен и интерпретирован другим человеком. Содержащиеся в статье Аппеля, Хакена и Коха [1] неформальные аргументы, которые объясняют, *почему* положительный результат компьютерной проверки нужно считать завершением доказательства Т4К, обеспечивают в большей или меньшей степени глобальную прозрачность данного доказательства. Причина того, что это доказательство тем не менее не кажется достаточно прозрачным, состоит, на наш взгляд, в том, что в нем отсутствует прозрачность промежуточного масштаба, которая позволила бы связать воедино элементарные шаги, реализованные с помощью выпол-

няемой компьютерной программы, и общие соображения, представленные обычным образом с помощью неформальной или полу-формальной математической прозы.

3. Унивалентные основания и пространственная интуиция

Гомотопическая теория типов (ГТТ), которая представляет собой логический каркас УО, позволяет думать о формальных выводах в теории типов Мартина-Лефа (ТТМЛ) как о пространственных гомотопических построениях [8]. Когда выводы в ТТМЛ реализуются в виде исполнимого программного кода (например, на языке AGDA), те же самые пространственные интуиции оказываются применимыми к соответствующему коду. Гомотопическая интерпретация программного кода имеет интуитивный характер (при небольшом числе измерений), который позволяет уточнять формальную структуру соответствующих доказательства, не вникая при этом в мелкие технические детали. Интерпретированный таким образом программный код приобретает новое качество “мезоскопической” эпистемической прозрачности, играющее роль связующего звена между локальной прозрачностью, которая позволяет человеку интерпретировать и понимать небольшие фрагменты программного кода, и общим пониманием того, как данная программа работает и зачем она написана, то есть глобальной прозрачностью. Итак, ГТТ посредством УО обеспечивает представление математических рассуждений, которое

- является полностью формальным в том смысле, что оно использует логическое исчисление со строгим синтаксисом (ТТМЛ или ее аналоги);
- допускает компьютерную реализацию и компьютерную проверку рассуждений (с помощью помощников для доказательств таких как Coq, AGDA или Arend);
- поддерживает интуитивную интерпретацию формализованных рассуждений, которая связывает локальные и глобальные аспекты эпистемической прозрачности компьютерных доказательств подобно тому, как это происходит в случае традиционных геометрических построений циркулем и линейкой.

4. Пример: вычисление фундаментальной группы окружности

Простой, но не тривиальный пример математического доказательства представленный с помощью ГТТ/УО и реализованный на компьютере с помощью AGDA описан в статье Ликаты и Шульмана [4]. Речь идет о теореме алгебраической топологии, которая утверждает, что фундаментальная группа $\pi_1(S^1)$ (топологической) окружности S^1 изоморфна бесконечной циклической группе \mathbb{Z} , которая канонически представляется аддитивной группой целых чисел.

Пусть b это произвольная точка окружности S^1 . Это суждение формально представляется в ТТМЛ следующей формулой:

$$b : S^1$$

Тогда петли, ассоциированные с выбранной базой, будут иметь простой вид

$$\text{loop} : b =_{S^1} b$$

Такая интуитивная геометрическая интерпретация формул распространяется на все последующие шаги построения фундаментальной группы и на последующее доказательство теоремы; та же интерпретация применима с незначительными модификациями к соответствующему программному коду на AGDA. Обычное содержательное доказательство данной теоремы оказывается сопряженным с формальным доказательством таким тесным образом, что обычного эпистемического разрыва между формальным и содержательным доказательством в данном случае не возникает. Компьютерный код (или псевдо-код) играет в таких случаях ту же роль, что и обычные для традиционной математической практики полуформальные символические обозначения. Но возникает важное преимущество, которое состоит в том, что компьютерный код в отличие от обычной математической символики делает возможной автоматическую формальную верификацию математических рассуждений.

5. Заключение

Подход к компьютерным доказательствам основанный на УО позволяет представлять математические рассуждения таким образом, что они оказываются более понятными для пользователей, чем компьютерные доказательства в стиле “черного ящика”, которые не обеспечивают достаточного эпистемического доступа к вычислениям. Важно иметь в виду,

что успех компьютерного представления знаний и рассуждений с использованием УО сегодня критически зависит не только (и, на наш взгляд, даже не столько) от технических аспектов вычислительной реализации УО, сколько от успешности проекта УО как новых оснований математики в целом. Какие фрагменты современной математики допускают удобную интуитивно прозрачную переформулировку на языке УО, а какие, возможно, нет, на сегодняшний день остается открытым исследовательским вопросом.

Список литературы

- [1] K. Appel and W. Haken, “Every Planar Map is Four Colorable”, *Illinois Journal of Mathematics*, **21**:3 (1977), 429–567.
- [2] O. Bradley Bassler, “The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective”, *Synthese*, **148**:1 (2006), 99–133.
- [3] M. Detlefsen and M. Luker, “The Four-Color Theorem and Mathematical Proof”, *Journal of Philosophy*, **77**:12 (1980), 803–820.
- [4] D.R. Licata and M. Shulman, *Calculating the Fundamental Group of the Circle in Homotopy Type Theory*, 2013, arXiv:1301.3443.
- [5] G. D. Secco and L.C. Pereira, “Proofs Versus Experiments: Wittgensteinian Themes Surrounding the Four-Color Theorem”, *How Colours Matter to Philosophy*, ed. M. Silva, Springer, 2017, 289–307.
- [6] P. Teller, “Computer Proof”, *Journal of Philosophy*, **77**:12 (1980), 797–803.
- [7] Th. Tymoczko, “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”, *Journal of Philosophy*, **76**:2 (1979), 57–83.
- [8] Univalent Foundations Group, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study (Princeton), 2013, homotopytypetheory.org/book.

Computer-Assisted Proofs and Their Understanding by a Human: the Case of Univalent Foundations

Rodin A. V.

The computer-assisted proof of Four Colour Map theorem published by Kenneth Appel, Wolfgang Haken and John Koch back in 1977 prompted a continued philosophical discussion on the epistemic value of computer-assisted mathematical proofs. We show, developing the approach proposed by O.B. Brassler in 2006, how the Univalent Foundations of Mathematics (UF) meets some earlier stressed epistemological concerns about computer-assisted proofs and thus offers a new possibility to fill the gap between computer-assisted and traditional mathematical proofs. We demonstrate the argument with a simple computer-assisted proof from Algebraic Topology.

Keywords: Univalent Foundations, Computer-Assisted Proof, Spatial Intuition

References

- [1] K. Appel and W. Haken, “Every Planar Map is Four Colorable”, *Illinois Journal of Mathematics*, **21**:3 (1977), 429–567.
- [2] O. Bradley Bassler, “The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective”, *Synthese*, **148**:1 (2006), 99–133.
- [3] M. Detlefsen and M. Luker, “The Four-Color Theorem and Mathematical Proof”, *Journal of Philosophy*, **77**:12 (1980), 803–820.
- [4] D.R. Licata and M. Shulman, *Calculating the Fundamental Group of the Circle in Homotopy Type Theory*, 2013, arXiv: 1301.3443.
- [5] G. D. Secco and L.C. Pereira, “Proofs Versus Experiments: Wittgensteinian Themes Surrounding the Four-Color Theorem”, *How Colours Matter to Philosophy*, ed. M. Silva, Springer, 2017, 289–307.
- [6] P. Teller, “Computer Proof”, *Journal of Philosophy*, **77**:12 (1980), 797–803.
- [7] Th. Tymoczko, “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”, *Journal of Philosophy*, **76**:2 (1979), 57–83.
- [8] Univalent Foundations Group, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study (Princeton), 2013, homotopytypetheory.org/book.

Представление знания в дискуссивной логике С. Яськовского

М. Юкевич¹
В.О. Шангин²

В статье анализируется представление знания в предложенной С. Яськовским дискуссивной (дискурсивной) логике D_2 , которая является одной из первых паранепротиворечивых логик. Показывается возможность упрощения её аксиоматизации и обсуждается решение проблемы независимости аксиом.

Ключевые слова: дискуссивная логика, дискурсивная логика, паранепротиворечивая логика, представление знания.

1. Введение

Статья посвящена представлению знаний в дискуссивной (дискурсивной) логике D_2 , предложенной С. Яськовским в 40-е гг. прошлого века [6, 7]. Недовольный *взрывоопасным* характером следования в классической логике (где из противоречия следует все что угодно), он предложил одну из первых *паранепротиворечивых* логик, то есть логику, в которой отношение следования невзрывоопасно. Поскольку наличие противоречия — это обязательный элемент любой дискуссии (где оппоненты придерживаются несовместимых и взаимоисключающих взглядов), С. Яськовский назвал свою логику *дискуссивной* или *дискурсивной*. Содержательно он выдвинул следующие критерии такой логики [6, с. 38]:

... Проблема логики противоречивых систем формулируется здесь следующим образом: задача состоит в том, чтобы найти такое пропозициональное исчисление, которое: (1) будучи применённым к противоречивым системам, не всегда приводит к тому, что доказывается все что угодно, (2) было бы довольно богатым для применения в практических рассуждениях, (3) имело бы интуитивное обоснование.

¹Юкевич Марчин — к.т.н., ассистент, отделение психологии и когнитивистики университета им. А. Мицкевича, Познань, Польша, e-mail: marcin.jukiewicz@amu.edu.pl.

Marcin Jukiewicz — PhD, Assistant Professor, Department of Logic and Cognitive Science, Faculty of Psychology and Cognitive Sciences, Adam Mickiewicz University in Poznan.

²Шангин Василий Олегович — к.филос.н., доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: shangin@philos.msu.ru.

Shangin Vasily Olegovich — PhD, Associate Professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov MSU.

Не довольный классической и известными неклассическими (прежде всего, табличными трёхвалентными) логиками, С. Яськовский останавливается в конце концов на модальной логике **S5**, определяя дискуссивную импликацию следующим образом: $A \rightarrow_d B := \Diamond A \rightarrow B$. Вскоре он публикует изменённый вариант **D₂**, вводя (правую) дискуссивную конъюнкцию: $A \wedge_d B := A \wedge \Diamond B$, которая позволяет (в отличие от первого варианта **D₂**) стандартно определять дискуссивную эквиваленцию: $A \leftrightarrow_d B := (A \rightarrow_d B) \wedge_d (B \rightarrow_d A)$. Более того, именно с такой конъюнкцией позитивный фрагмент **D₂** совпадает с классическим. В заключении отметим, что С. Яськовский не построил **D₂** в виде исчисления, что, по-видимому, привело к тому, что последующая история её развития полна драматическими попытками её аксиоматизировать [9].

2. Аксиоматизация **D₂**

D₂ задаётся над языком L в алфавите $\{\mathcal{P}, \neg, \vee, \rightarrow_d, \wedge_d, \leftrightarrow_d, (\cdot)\}$, где $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, p_1, \dots\}$ — это множество пропозициональных переменных. Множество всех L -формул задаётся стандартно и обозначается F . A, B, C и т.д. пробегают по L -формулам. X обозначает множество дискуссивных формул. Язык L_m модальной логики **S5** задаётся в алфавите $\{\mathcal{P}, \neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \Box, \Diamond, (\cdot)\}$. Множество всех L_m -формул определяется стандартно и обозначается F_m . В обоих языках эквиваленция стандартно (и с соответствующими изменениями) задаётся через импликацию и конъюнкцию. Понятия **S5**-общезначимой формулы и **S5**-следования также стандартны [1, 5]

Аксиоматизация **D₂** задаётся следующим образом [4]:

- 1) $A \rightarrow_d (B \rightarrow_d A)$,
- 2) $(A \rightarrow_d (B \rightarrow_d C)) \rightarrow_d ((A \rightarrow_d B) \rightarrow_d (A \rightarrow_d C))$,
- 3) $((A \rightarrow_d B) \rightarrow_d A) \rightarrow_d A$,
- 4) $(A \wedge_d B) \rightarrow_d A$,
- 5) $(A \wedge_d B) \rightarrow_d B$,
- 6) $A \rightarrow_d (B \rightarrow_d (A \wedge_d B))$,
- 7) $A \rightarrow_d (A \vee B)$,
- 8) $B \rightarrow_d (A \vee B)$,
- 9) $(A \rightarrow_d C) \rightarrow_d ((B \rightarrow_d C) \rightarrow_d ((A \vee B) \rightarrow_d C))$,

- 10) $\neg\neg A \rightarrow_d A$,
- 11) $A \rightarrow_d \neg\neg A$,
- 12) $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow_d B$,
- 13) $\neg(A \vee B) \rightarrow_d \neg(B \vee A)$,
- 14) $\neg(A \vee B) \rightarrow_d (\neg A \wedge_d \neg B)$,
- 15) $\neg(\neg\neg A \vee B) \rightarrow_d \neg(A \vee B)$,
- 16) $(\neg(A \vee B) \rightarrow_d C) \rightarrow_d ((\neg A \rightarrow_d B) \vee C)$,
- 17) $\neg((A \vee B) \vee C) \rightarrow_d \neg(A \vee (B \vee C))$,
- 18) $\neg((A \rightarrow_d B) \vee C) \rightarrow_d (A \wedge_d \neg(B \vee C))$,
- 19) $\neg((A \wedge_d B) \vee C) \rightarrow_d (A \rightarrow_d \neg(B \vee C))$,
- 20) $\neg(\neg(A \vee B) \vee C) \rightarrow_d (\neg(\neg A \vee C) \vee (\neg(\neg B \vee C)))$,
- 21) $\neg(\neg(A \rightarrow_d B) \vee C) \rightarrow_d (A \rightarrow_d \neg(\neg B \vee C))$,
- 22) $\neg(\neg(A \wedge_d B) \vee C) \rightarrow_d (\neg(\neg B \vee C) \wedge_d A)$.

Единственное правило вывода — модус поненс.

$$\frac{A \quad A \rightarrow_d B}{B} \quad (\text{MP})$$

Теорема 1. [4, Теорема 34] $\vdash_{\mathbf{D}_2} A \text{ m.m.m.} \models_{\mathbf{D}_2} \sigma(A)$.

Доказательство. Используется тот факт, что $\vdash_{\mathbf{D}_2} A \text{ m.m.m.} \vdash_{\diamond-\mathbf{S5}} \sigma(A)$, где $\diamond-\mathbf{S5}$ — это адекватная аксиоматизация \diamond -фрагмента логики $\mathbf{S5}$, предложенная Е. Пержановским [10]. \square

3. Проблема упрощения аксиоматизации \mathbf{D}_2

В силу того, что аксиоматизация \mathbf{D}_2 получается в результате взаимных переводов между L и L_m , подавляющее большинство аксиом для отрицания выглядят громоздко. Более того, Н. да Коста и Л. Дубикайтис, авторы первой аксиоматизации \mathbf{D}_2 в L (исторически первая аксиоматизация \mathbf{D}_2 , предложенная Е. Котасом, была в L_m [8]), поставили задачу создания независимой аксиоматизации \mathbf{D}_2 [4]. Позднее Г. Ачтелик, Л. Дубикайтис, Э. Дудек и Я. Конёр не полностью решили эту проблему заменой части аксиом 10)–22), то есть аксиом, содержащих \neg , на другие негативные аксиомы и показали, что в их аксиоматизации \mathbf{D}_2

каждая негативная аксиома является *независимой* [3, Теорема 2]. (Подмножество X множества всех аксиом данной аксиоматической теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X [2].) Таким образом, остаётся нерешённой проблема независимости аксиом 1)–9), то есть аксиом, не содержащих \neg . Давно известно, что данные аксиомы взаимно независимы [11], однако специфика \mathbf{D}_2 состоит в том, что при наличии негативных аксиом некоторые из них перестают быть независимыми. В докладе планируется обсудить способы решения этой проблемы, а также возможность построения (автоматической) процедуры поиска \mathbf{D}_2 -вывода.

Благодарности В.О. Шангин поддержан РФФИ, грант 20-011-00698 А.

Список литературы

- [1] Ивлев Ю.В., *Модальная логика*, Издательство Московского университета, Москва, 1991, 222 с.
- [2] Мендельсон Э., *Введение в математическую логику*, «Наука», Москва, 1976, 320 с.
- [3] Ahtelik, G., Dubikajtis, L., Dudek, E., Kanior, J., “On independence of axioms in Jaśkowski discussive propositional calculus”, *Reports on Mathematical Logic*, **11** (1981), 3–11
- [4] da Costa N.C.A., Dubikajtis, L., “On Jaśkowski’s discussive logic”, *Non-classical logics, model theory and computability*, 1977, 37–56
- [5] Garson J.W., *Modal logic for philosophers*, Cambridge University Press, 2006, 506 с.
- [6] Jaśkowski S., “A propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 35–56
- [7] Jaśkowski S., “On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 57–59
- [8] Kotas J., “The axiomatization of S. Jaśkowski’s discussive system”, *Studia Logica*, **33:2** (1974), 195–200
- [9] Omori H., Alama J., “Axiomatizing Jaśkowski’s discussive logic D_2 ”, *Studia Logica*, **106** (2018), 1163–1180
- [10] Perzanowski J., “On M-fragments and L-fragments of normal modal propositional calculi”, *Reports on Mathematical Logic*, **5** (1975), 63–72
- [11] Robinson T.T., “Independence of two nice sets of axioms for the propositional calculus”, *Journal of Symbolic Logic*, **33:2** (1968), 265–270

Knowledge representation in S. Jaśkowski’s discussive logic
Jukiewicz M., Shangin V.

In the paper, one analyzes knowledge representation in S. Jaśkowski's discussive (discursive) logic \mathbf{D}_2 which is one of the pioneering paraconsistent logics. One shows an opportunity to simplify its axiomatization and suggests some decision of the axioms' independence problem.

Keywords: discussive logic, discursive logic, paraconsistent logic, knowledge representation.

References

- [1] Ivlev Yu.V., *Modal logic*, MSU Publishers, Moscow, 1991 (In Russian), 222 c.
- [2] Mendelson E., *Introduction to mathematical logic*, Nauka Publishers, Moscow, 1976 (In Russian), 320 c.
- [3] Ahtelik, G., Dubikajtis, L., Dudek, E., Kanior, J., "On independence of axioms in Jaśkowski discussive propositional calculus", *Reports on Mathematical Logic*, **11** (1981), 3–11
- [4] da Costa N.C.A., Dubikajtis, L., "On Jaśkowski's discussive logic", *Non-classical logics, model theory and computability*, 1977, 37–56
- [5] Garson J.W., *Modal logic for philosophers*, Cambridge University Press, 2006, 506 c.
- [6] Jaśkowski S., "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 35–56
- [7] Jaśkowski S., "On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 57–59
- [8] Kotas J., "The axiomatization of S. Jaśkowski's discussive system", *Studia Logica*, **33:2** (1974), 195–200
- [9] Omori H., Alama J., "Axiomatizing Jaśkowski's discussive logic D_2 ", *Studia Logica*, **106** (2018), 1163–1180
- [10] Perzanowski J., "On M-fragments and L-fragments of normal modal propositional calculi", *Reports on Mathematical Logic*, **5** (1975), 63–72
- [11] Robinson T.T., "Independence of two nice sets of axioms for the propositional calculus", *Journal of Symbolic Logic*, **33:2** (1968), 265–270

**К сведению авторов публикаций в журнале
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете L^AT_EX, предоставляются к загрузке через WEB-форму http://intsysjournal.org/generator_form.
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте <http://intsysjournal.org>, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

Подписано в печать: 10.12.2021

Дата выхода: 20.12.2021

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций(Роскомнадзор).