О формульном представлении характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами

М. В. Носов[1]

В работе представлен ряд формул характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами. Аргументами функции выступают двоичные разложения этих коэффициентов.

Ключевые слова: линейное уравнение, булевское решение, характеристическая функция.

Дано линейное уравнение с целыми коэффициентами от n переменных, которые принимают значения из множества $\{0,1\}$. Заменой переменных t на $1-t$ можно добиться того, что коэффициенты уравнения будут натуральными числами. Таким образом, рассматривается уравнение следующего вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_0,$$
$$a_1, \ldots, a_nx, a_0 \in N.$$

Все коэффициенты m-разрядные двоичные числа

$$a_i = \sum_{j=0}^{m-1} 2^j a_{ij},$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}, i = 0,1,\ldots,n; j = 0,1,\ldots,m-1.$$

Ниже представлены формулы $\Xi(a_1,\ldots,a_nx,a_0)$ - характеристической функции решения уравнения на множестве $\{0,1\}^n$. Далее используется известное равенство

$$\int\limits_0^1 exp\{2\pi ikt\}dt = \begin{cases} 1, k=0, \\ 0, k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases}$$

[1] *Носов Михаил Васильевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@mail.ru.

Nosov Michail Vasilevich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Следовательно, если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то выражение

$$\sum_{x \in E_2^n} \int\limits_0^1 exp\{2\pi i(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - a_0)t\}dt$$

задает количество булевых решений. Перепишем его в виде

$$\sum_{\beta \subseteq \{1,\ldots,n\}} \int\limits_0^1 exp\{2\pi i(\sum_{j \in \beta} a_j - a_0)t\}dt =$$

$$\int\limits_0^1 (\sum_{\beta} exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j \in \beta} exp\{2\pi i a_j t\})dt =$$

$$\int\limits_0^1 (exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^{n} (1 + exp\{2\pi i a_j t\}))dt.$$

Характеристическая функция имеет вид

$$\Xi(a_1, \ldots, a_n, a_0) =$$

$$1 - \int\limits_0^1 exp\{-2\pi i\Big(\int\limits_0^1 (exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^{n} (1 + exp\{2\pi i a_j t\}))dt\Big)\tau\}d\tau.$$

В этом представлении выпоняется свойство

$$(1 - \Xi(a_1, \ldots, a_n, a_0)) \cdot \ (1 - \Xi(b_1, \ldots, b_n, b_0)) =$$

$$\int\limits_0^1 exp\{-2\pi i\Big(\int\limits_0^1 \Big((exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^{n} (1 + exp\{2\pi i a_j t\})) +$$

$$(exp\{-2\pi i b_0 t\} \prod_{j=1}^{n} (1 + exp\{2\pi i b_j t\}))\Big)dt\Big)\tau\}d\tau.$$

Другое представление, если уравнение имеет решение,то

$$\prod_{x \in E_2^n} (\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - a_0) = \prod_{\beta \subseteq \{1,\ldots,n\}} (\sum_{j \in \beta} a_j - a_0) = 0.$$

Значит

$$\Xi(a_1,\dots,a_n,a_0)=\int\limits_0^1 exp\{-2\pi i\Big(\prod_{\beta\subseteq\{1,\dots,n\}}(\sum_{j\in\beta}^{n}a_j-a_0)\Big)t\}dt.$$

В этом представлении произведение имеет вид

$$\Xi(a_1,\dots,a_n,a_0)\cdot\Xi(b_1,\dots,b_n,b_0)=$$

$$\int\limits_0^1 exp\{-2\pi i\Big(\prod_{\beta\subseteq\{1,\dots,n\}}(\sum_{j\in\beta}^{n}a_j-a_0)^2+\prod_{\beta\subseteq\{1,\dots,n\}}(\sum_{j\in\beta}^{n}b_j-b_0)^2\Big)t\}dt.$$

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

On the formula representation of the characteristic function of the Boolean solution of a linear equation with integer coefficients

Nosov M.V.

The paper presents a number of formulas for the characteristic function of the Boolean solution linear equation with integer coefficients. The function arguments are binary expansions of these coefficients.

Keywords: linear equation, Boolean solution, characteristic function.