

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Международная Академия Технологических Наук
Российская Академия Естественных Наук

Интеллектуальные Системы.

Теория и приложения

ТОМ 25 ВЫПУСК 3 * 2021

МОСКВА

УДК 519.95; 007:159.955
ББК 32.81

ISSN 2411-4448

Издается с 1996 г.*

Главный редактор: д.ф.-м.н., профессор В. Б. Кудрявцев

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев (зам. главного редактора)
д.ф.-м.н., проф. Э. Э. Гасанов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин (ответственный секретарь)
д.ф.-м.н., проф. В. В. Александров, д.ф.-м.н., проф. С. В. Алешин, д.ф.-м.н., проф.
Д. Н. Бабин, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю. Л. Ершов, академик РАН, д.ф.-м.н.,
проф. Ю. И. Журавлев, д.ф.-м.н., проф. В. Н. Козлов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
проф. А. В. Михалев, к.ф.-м.н., проф. В. А. Носов, д.ф.-м.н., проф. А. С. Подколзин,
д.т.н., проф. Д. А. Поспелов, д.ф.-м.н., проф. Ю. П. Пытьев, академик РАН, д.т.н.,
проф. А. С. Сигов, д.ф.-м.н., проф. А. В. Чечкин

Международный научный совет журнала:

С. Н. Васильев (Россия), К. Вашик (Германия), В. В. Величенко (Россия),
А. И. Галушкин (Россия), И. В. Голубятников (Россия), Я. Деметрович (Венгрия), Г.
Килибарда (Сербия), Ж. Кнап (Словения), П. С. Краснощеков (Россия), А. Нозаки
(Япония), В. Н. Редько (Украина), И. Розенберг (Канада), А. П. Рыжов (Россия) —
ученый секретарь совета, А. Саломая (Финляндия), С. Саксида (Словения), Б.
Тальхайм (Германия), Ш. Ушчумлич (Сербия), Фан Дин Зиеу (Вьетнам), А. Шайеб
(Сирия), Р. Шчепанович (США), Г. Циммерман (Германия)

Секретарь редакции: И. О. Бергер

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН, Секции «Информатики и кибернетики» РАЕН.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

ООО «Два Облака»

Разработка корпоративных информационных систем

<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: mail@intsysjournal.org

*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2021.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>От редакции</i> К 85-летию юбилею Валерия Борисовича Кудрявцева	5
<i>От редакции</i> К 80-летию юбилею Станислава Владимировича Алешина ..	7
Часть 1. Общие проблемы теории интеллектуальных систем	
<i>Антонюк В.А.</i> Об алгоритме строгого консенсусного ранжирования	11
<i>Тропин А.М.</i> О методах решения задачи Ферма-Штейнера для симметричных выпуклых границ в гиперпространствах	35
Часть 2. Специальные вопросы теории интеллектуальных систем	
<i>Вороненко А.А., Кафтан Д.В.</i> Тестирование неповторных функций в элементарном базисе, расширенном всеми поляризуемыми слабоповторными функциями	75
<i>Клибарда Г.</i> Проблема типовой встречи для автоматов в лабиринтах	83
<i>Носов М.В.</i> О формульном представлении характеристической функции булевого решения линейного уравнения с целыми коэффициентами	133
<i>Отрощенко О.Д.</i> О выразимости кусочно-постоянных функций в пространстве кусочно-параллельных	137
Часть 3. Математические модели	
<i>Комков С.А.</i> Новые по порядку экспоненциальные темпы роста	159
<i>Корнеев С.А.</i> О поведении функции Шеннона сложности реализации систем мономов схемами композиции	173
<i>Носов М.В.</i> О соответствии сложности СФЭ и числа шагов машины Тьюринга	189
<i>Ронжин Д.В.</i> О конечной порожденности A -предполных классов в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел	191

К 85-летнему юбилею Валерия Борисовича Кудрявцева

4 июля 2021 года исполнилось 85 лет создателю и бессменному главному редактору нашего журнала, заведующему кафедрой математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ, доктору физико-математических наук профессору **Кудрявцеву Валерию Борисовичу**.

В.Б. Кудрявцев – выдающийся русский ученый-математик, основатель и бессменный руководитель кафедры математической теории интеллектуальных систем, создатель крупнейшей в России научной школы по теории автоматов и математической теории интеллектуальных систем, в которой трудятся подготовленные им 28 докторов и 96 кандидатов наук. Полученные им фундаментальные результаты по математической кибернетике, дискретной математике, теории автоматов и теории интеллектуальных систем получили широкую известность и заслуженное признание отечественной и международной научной общественности. Его яркие прикладные работы широко используются в промышленных технологиях и подтверждены 35 патентами США в области микроэлектроники. В.Б.Кудрявцев является автором 247 научных работ, среди которых 35 монографий и учебных пособий, действительным членом Международной Академии Технологических Наук, Российской Академии Естественных Наук, почетным доктором университета г. Белграда (Сербия), членом ряда других отечественных и зарубежных научных организаций.

В.Б.Кудрявцев окончил механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, а затем его аспирантуру и прошел весь путь от ассистента до заведующего кафедрой математической теории интеллектуальных систем.

В.Б.Кудрявцев разработал более 10 курсов лекций, которые читает на механико-математическом факультете МГУ, руководит работой 6 спецсеминаров. В 2008 году он возглавил филиал МГУ в г. Ташкенте (Узбекистан) и вывел его в число лучших среди зарубежных филиалов МГУ.

В.Б.Кудрявцев ведет большую работу по организации научно-исследовательской деятельности, являясь членом диссертационных и научных советов.

Созданный В.Б.Кудрявцевым семинар «Наука и культура», где проходят встречи с интересными учеными и деятелями культуры, способствует духовно-нравственному воспитанию научной молодежи.

Сердечно поздравляем Валерия Борисовича с юбилеем, желаю крепкого здоровья, творческого долголетия и счастья!

Редакционная коллегия журнала
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения».

К 80-лeтнему юбилею Станислава Владимировича Алешина

14 августа 2021 года исполнилось 80 лет члену нашей редакционной коллегии, профессору кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ, доктору физико-математических наук **Алешину Станиславу Владимировичу**.

С.В. Алешин – крупный ученый, талантливый математик, автор фундаментальных работ в области алгебраической теории автоматов и распознавания образов. С.В. Алешиным получен выдающийся научный результат – средствами теории автоматов найдено решение одной из центральных проблем алгебры – проблемы Бернсайда о периодических группах. В теорию автоматов прочно вошло устойчивое сочетание «группы алешинского типа». В докторской диссертации С.В. Алешиным развит новый подход к построению динамических распознающих систем. Эти результаты вошли в учебники, широко известны мировой научной общественности и получили заслуженное признание. С.В. Алешиным получены 43 патента США, которые подтверждают его крупный вклад в развитие технологии проектирования чипов. С.В. Алешин является автором более 40 научных работ, среди которых 9 монографий и учебников, один из которых «Введение в теорию автоматов» является классическим учебником по теории автоматов.

С.В. Алешин окончил механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, а затем его аспирантуру и прошел весь путь от ассистента до профессора.

С.В. Алешин читает на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова курсы лекций, среди которых «Теория автоматов», «Группы и полугруппы автоматов», руководит работой нескольких спецсеминаров.

С.В. Алешин замечательный педагог. Среди его учеников – 1 доктор и 10 кандидатов наук.

Он является членом диссертационных и научных советов, входил в состав оргкомитетов многих научных конференций.

Сердечно поздравляем Станислава Владимировича с юбилеем, желая крепкого здоровья, творческого долголетия и счастья.

Редакционная коллегия журнала
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения».

Часть 1.
Общие проблемы теории
интеллектуальных систем

Об алгоритме строгого консенсусного ранжирования

В. А. Антонюк¹

Рассматривается комбинаторный подход к задаче отыскания оптимального строгого консенсусного ранжирования для заданной совокупности нестрогих упорядочений альтернатив. Вводится понятие «облегчённой» матрицы потерь (антисимметричной), позволяющей сделать процесс (и результат) оптимизации более простым и наглядным. Сформулированы процедуры поиска оптимальных строгих ранжирований (в т.ч. — всех множественных) в различных ситуациях.

Ключевые слова: ранжирования, медиана Кемени, антисимметричные матрицы, параллельное формирование перестановок, язык Julia, OpenCL.

Введение. Процесс ранжирования [1, с. 16] предполагает сопоставление независимыми акторами (они называются обычно экспертами) набору некоторых объектов, событий, явлений и пр. в количестве N — обобщённо именуемых альтернативами — какого-то своего порядка (порядка предпочтительности).

Представлением результата такого ранжирования (он здесь тоже будет именоваться ранжированием, поскольку это слово может в языке обозначать как сам процесс, так и его результат) считают либо вектор рангов, где перечислены ранги, сопоставленные альтернативам, — от 1 до N , либо вектор порядка, где перечислены сами альтернативы — в порядке от наилучшей до самой худшей.

Если эксперт сопоставляет разным альтернативам различные значения рангов, то принято говорить о полном ранжировании (complete ranking) и линейном (или полном) упорядочении альтернатив (linear/full ordering). Если же какие-нибудь альтернативы для эксперта представляются неразличимыми, т.е., не получается сопоставить им различные ранги или порядок следования, то говорят о связанном ранжировании (tied ranking) или слабом упорядочении (weak ordering). Набор из K ранжирований, предоставленных K экспертами, часто называют профилем индивидуальных предпочтений или просто профилем.

Цель анализа исходных ранжирований альтернатив (профиля) — получение некоторого консенсусного ранжирования, минимизирующего сум-

¹ Антонюк Валерий Алексеевич — доцент каф. математического моделирования и информатики физ. ф-та МГУ, к.ф.-м.н., e-mail: antonyuk@physics.msu.ru.

Antonyuk Valery Alekseevich — Associate Professor, Ph.D., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Chair of Mathematical Modeling and Computer Science.

марное (по всем экспертам) «расхождение» между предпочтениями экспертов (исходными ранжированиями) и получаемым консенсусом (результатирующим ранжированием). В качестве расстояния между ранжированиями часто используется т. н. расстояние Кемени, при этом найденное консенсусное ранжирование именуется медианой Кемени [1, стр. 73]; оно имеет вид перестановки (или перестановок, если их несколько) альтернатив в нужном порядке (или же их условных номеров).

В работе показано, что для отыскания оптимальных консенсусных (строгих¹) ранжирований удобнее работать не со стандартной матрицей потерь, а с т. н. «облегчённой». Её элементарный анализ позволяет установить, с какой ситуацией приходится иметь дело, каково примерно ожидаемое количество оптимальных перестановок. Предложен простой эвристический алгоритм поиска оптимальных консенсусных ранжирований. Для практической работы с ранжированиями и реализации предложенного алгоритма был использован язык Julia [2] — по причинам, которые станут понятны в дальнейшем.

«Облегчённая» матрица потерь (антисимметричная). Матрица потерь (также profile matrix [3, с. 2928–2929]) является удобным способом представления информации о совокупности ранжирований альтернатив экспертами и, обладая полезными свойствами, часто используется при отыскании медианы Кемени. Цитируя [1, с. 78]: *“Задача отыскания медианы Кемени для ранжирований может быть сформулирована как задача отыскания такого упорядочения альтернатив, а следовательно, строк и столбцов матрицы потерь, чтобы сумма её элементов, расположенных над диагональю, была минимальна.”*

Если обратиться к определению матрицы потерь [1, с. 77], [3, с. 2929], то выяснится, что каждое из значений в ней (за исключением нулей на главной диагонали) включает в себя и количество исходных ранжирований (экспертов), поскольку там суммируются модули элементов каждой из матриц отношений² за вычетом значения 1: $r_{ij} = \sum_{k=1}^K |a_{ij}^{(k)} - 1|$, $i \neq j$, что реально просто отображает область значений $\{+1, 0, -1\}$ внедиагональных элементов всех K матриц $\|a_{ij}^{(k)}\|$ в диапазон $\{0, 1, 2\}$ перед суммированием.

Однако для минимизации суммы наддиагональных элементов (производимой путём «перемещения» внедиагональных значений в пределах

¹В настоящей статье исходные ранжирования считаются полными или связанными, но результирующие ранжирования — всегда полными; для заголовка же статьи вместо слова «полное» выбрано слово «строгое» — как менее дезориентирующее.

²Для элементов a_{ij} матрицы отношений (для ранжирования частичного или линейного порядка) величина $+1$ означает предпочтительность альтернативы i перед альтернативой j , 0 — равноценность альтернатив i, j (или равенство $i = j$), -1 — наоборот, предпочтительность альтернативы j перед альтернативой i .

внедиагональных же областей) не имеет никакого значения, что ко всем внедиагональным добавлена одна и та же величина. Можно вычесть количество ранжирований из этих элементов, тогда каждый элемент этой преобразованной матрицы потерь станет просто суммой соответствующих элементов матриц отношений — но с противоположным знаком. А так как все матрицы отношений для ранжирований (частичного или линейного порядка) антисимметричны, их сумма тоже будет антисимметричной³; далее будем называть её (условно) «облегчённой» матрицей потерь⁴.

Расположение в подобной матрице отрицательных значений только над главной диагональю означает, во-первых, что все альтернативы расположены в таком порядке, что каждая из них предпочтительнее (или как минимум равноценна) каждой из последующих, а, во-вторых, что найдена такая перестановка альтернатив, при которой сумма наддиагональных элементов матрицы минимальна.

Таким образом, ясно, что традиционная неотрицательность элементов стандартной матрицы потерь — это следствие метрического подхода к задаче поиска консенсусных ранжирований, потому что вполне естественно работать с неотрицательными величинами, трактуя их как некоторые «расстояния». Если же взглянуть на это немного под другим углом, с более «комбинаторной» точки зрения, то окажется, что и отрицательность значений имеет свои преимущества.

Поскольку речь идёт об антисимметричной матрице, минимально возможное (хотя бы теоретически) значение суммы наддиагональных элементов известно заранее: оно равно сумме всех её отрицательных элементов. Такое значение может быть достигнуто, если все эти отрицательные элементы удастся сосредоточить в верхнем треугольнике матрицы, и меньше эту сумму сделать уже никак нельзя. Но удастся ли расположить все отрицательные значения таким образом — заранее совершенно неочевидно. Кроме того, нас будет интересовать не какое-то одно решение этой задачи, а все возможные решения, поскольку часто в данной задаче они многочисленны. При этом вопрос, как следует поступать с этими множественными решениями для получения одного итогового консенсусного ранжирования, здесь не рассматривается.

Поэтому фактически можно считать, что в настоящей работе анализируется такая комбинаторная

³Если $A_i^\top = -A_i$, $i = 1, \dots, n$, то $(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^\top = A_1^\top + A_2^\top + \dots + A_n^\top = -A_1 - A_2 - \dots - A_n = -(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$.

⁴В «облегчённой» матрице потерь любую её строку (соответствующую некоторой альтернативе) надо трактовать так: положительными значениями в каких-то столбцах указаны более предпочтительные альтернативы (соответствующие этим столбцам), отрицательными — менее предпочтительные, нулевыми — равноценные (или сама альтернатива).

Задача. Для заданной антисимметричной матрицы найти такие (одновременные) перестановки её строк и столбцов, чтобы после любой из них сумма всех наддиагональных элементов преобразованной матрицы была минимально возможной.

Компактная запись одновременной перестановки строк и столбцов квадратной матрицы R выглядит так: $\Pi^T R \Pi$, где Π — некоторая матрица перестановки⁵. К такому же виду приводится и последовательность подобных преобразований, поскольку

$$\Pi_n^T (\dots (\Pi_2^T (\Pi_1^T R \Pi_1) \Pi_2) \dots) \Pi_n = (\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n)^T R (\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n),$$

а произведение нескольких матриц перестановки есть тоже некоторая матрица перестановки, т. к. класс этих матриц замкнут относительно операции умножения матриц [4, стр. 36]. Легко также убедиться, что после подобного преобразования антисимметричная матрица A : $A^T = -A$ таковой и остаётся:

$$(\Pi^T A \Pi)^T = \Pi^T A^T (\Pi^T)^T = \Pi^T (-A) \Pi = -(\Pi^T A \Pi).$$

Преимущества использования антисимметричных матриц. Переход от уже традиционных матриц потерь к «облегчённым» (антисимметричным) не влияет на «перестановочную» оптимизацию суммарного значения в верхнем треугольнике матрицы, однако позволяет чётко разделить три возможные при этом ситуации.

I. В антисимметричной матрице нет внедиагональных нулевых элементов и все отрицательные элементы могут быть сгруппированы над главной диагональю матрицы. Отметим, что в этом случае число отрицательных элементов в столбцах линейно нарастает (от 0 до $N - 1$), а в строках их число линейно убывает (от $N - 1$ до 0).

II. В антисимметричной матрице есть нулевые элементы вне главной диагонали и все отрицательные элементы могут быть сгруппированы над этой диагональю. В таком случае число отрицательных элементов в столбцах (строках) не превышает указанных выше для ситуации I значений линейного нарастания (убывания), потому что в противном случае это означало бы принципиальную невозможность размещения всех отрицательных элементов над диагональю матрицы. Однако здесь — в отличие от предыдущей ситуации — появляются возможности для такого обмена местами каких-то строк/столбцов, который не нарушает при этом «группировку» отрицательных элементов над диагональю, что означает появление некоторого количества перестановок, дающих требуемый результат.

⁵При домножении R на Π справа — переставляются столбцы R , а при домножении R слева на Π^T (транспонированную матрицу перестановки Π) — точно так же переставляются строки матрицы R .

III. Отрицательные элементы не удаётся полностью сосредоточить над главной диагональю. Это значит, что «идеальные» значения линейного нарастания (убывания) количеств отрицательных элементов в столбцах (строках) матрицы при этом где-то обязательно превышены.

Каждая из упомянутых здесь трёх ситуаций иллюстрируется на рис. 1 диаграммами⁶ со строчными (ромбики) и столбцовыми (квадратики) количествами отрицательных значений трёх конкретных «облегчённых» матриц потерь (подробнее о самих матрицах — ниже). «Левые» и «правые» фоновые треугольники показывают допустимые области расположения отсортированных должным образом количеств отрицательных элементов, при которых в принципе возможно сосредоточить их над главной диагональю. Это, конечно, не значит, что подобное размещение отрицательных величин будет обязательно возможно, так как данные ограничения на них являются необходимыми, но не достаточными.

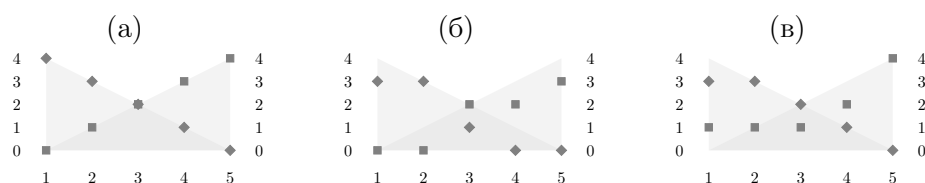


Рис. 1. Отрицательные значения в антисимметричных матрицах: (а) — пример ситуации I (см. рис. 2), (б) — пример ситуации II (см. рис. 4), (в) — пример ситуации III (см. рис. 3).

Для ситуаций I и II никакого превышения количеств отрицательных значений не наблюдается (ромбики не выходят за пределы левых треугольников, а квадратики — за пределы правых), в то время как в ситуации III все столбцовые количества отрицательных значений больше нуля, значит в матрице нет столбца без отрицательных величин: в любом столбце всегда будет отрицательный элемент.

Кстати, стоило бы отметить, что до тех пор, пока все отрицательные элементы антисимметричной матрицы можно расположить над главной диагональю, не имеет никакого значения, чему они в точности равны. Но в случае принципиальной невозможности сосредоточить их все над диагональю, значения остающихся под диагональю уже весьма существенны: если среди них есть самые большие (по модулю) отрицательные, то

⁶На всех трёх диаграммах по горизонтали указаны условные номера строк/столбцов «облегчённых» матриц потерь, а по вертикали — количества отрицательных элементов в них (после сортировки строчных количеств — по убыванию и столбцовых — по возрастанию). Цель диаграмм — оценка возможности «правильно» расположения отрицательных элементов.

стоит озаботиться именно их перемещением в верхний треугольник, тем самым уменьшая наддиагональную сумму.

Кроме того, для антисимметричных «облегчённых» матриц потерь становятся более заметными существенные различия нечётного и чётного количества экспертов: в первом случае в «облегчённой» матрице потерь никогда не будет нулевых значений за пределами главной диагонали, а во втором они возможны — в случае некоторого несовпадения мнений экспертов по поводу отдельных альтернатив.

Антисимметричные матрицы и минимизация суммы их наддиагональных элементов. Начнём с некоторых несложных, но довольно полезных утверждений.

Теорема 1. *Для антисимметричной матрицы, у которой все элементы над главной диагональю отрицательны, не существует одновременной перестановки её строк и столбцов (кроме тождественной), после которой все наддиагональные элементы снова будут отрицательными.*

Доказательство. Будем доказывать «от противного». Отметим прежде всего, что отрицательность всех наддиагональных элементов матрицы означает, что все элементы под диагональю — положительные, так как после подобных перестановок матрица всё равно остаётся антисимметричной.

Предположим противное: существует ещё одна перестановка строк и столбцов матрицы, при которой все наддиагональные элементы матрицы опять отрицательны. Покажем, что это вступает в противоречие с тем фактом, что ни один из столбцов рассматриваемой матрицы не может быть переставлен на другое место⁷, иначе под диагональю обязательно окажется хотя бы один отрицательный элемент, что будет противоречить либо тому, что матрица остаётся антисимметричной, либо тому, что после перестановки все наддиагональные элементы опять отрицательны.

Действительно, последний столбец (где имеется $N - 1$ отрицательное значение) не может оказаться на месте предпоследнего (или более левого) столбца, поскольку тогда над диагональю в столбце не более $N - 2$ мест, а отрицательных значений в последнем столбце — $N - 1$. Точно так же предпоследний столбец не может попасть на место последнего, поскольку тогда некуда будет поставить последний столбец, а перемещение предпоследнего столбца левее тоже невозможно — по соображениям, только что изложенным для последнего столбца: мест над диагональю будет меньше, чем отрицательных значений в столбце. Применяя аналогичные рассуждения к каждому из более левых столбцов матрицы, мы

⁷Достаточно говорить только о столбцах, поскольку используемая операция сохраняет все элементы столбца неизменными, лишь изменяя их расположение в нём, хотя с таким же успехом можно было рассматривать и строки, ибо они обладают теми же свойствами.

получим, что ни один из столбцов не может быть перемещён на другое место, т. е., другой перестановки реально получить не удаётся, что противоречит предположению. Значит, это предположение неверно и столбцы матрицы нельзя переставить по-другому, чтобы все её наддиагональные элементы снова были отрицательными. \square

Теорема 2. *Если все столбцовые⁸ количества отрицательных величин антисимметричной матрицы $N \times N$ ($N > 1$) различны, то одновременными перестановками её строк и столбцов матрица может быть приведена к состоянию, когда все отрицательные значения находятся в её верхнем треугольнике.*

Доказательство. Если все количества отрицательных величин в разных столбцах разные, значит они принимают все целые значения от 0 (минимально возможное количество отрицательных величин столбца) до $N - 1$ включительно (максимально возможное, т. к. один элемент, расположенный на главной диагонали матрицы, всегда равен нулю). Всего отрицательных величин в матрице в этом случае будет $0 + 1 + \dots + (N - 2) + (N - 1) = N(N - 1)/2$, т. е., столько же, сколько и наддиагональных элементов матрицы.

Приведём матрицу с помощью перестановок её строк и столбцов к виду, когда столбцовые количества отрицательных величин расположены по возрастанию (слева направо)⁹. Рассмотрим последний столбец матрицы. В нём должно быть $N - 1$ отрицательное значение и одно нулевое, расположенное в последней строке. Значит, все отрицательные значения последнего столбца расположены выше главной диагонали, т. е., в верхнем треугольнике. При этом вся последняя строка, за исключением последнего элемента в ней, состоит из положительных значений — в силу антисимметричности матрицы: элементы этой строки противоположны по знаку элементам последнего столбца. Аналогичным образом все отрицательные значения предпоследнего столбца расположены в начальных $N - 2$ строках, потому что оставшиеся два элемента столбца неотрицательны: предпоследний (на главной диагонали) равен нулю, а последний — положителен (как уже выяснилось). При этом в предпоследней строке все значения, за исключением последних двух, положительны — опять из-за антисимметричности матрицы. Продолжая рассматривать один за другим остальные столбцы и используя аналогичные соображения, мы приходим к выводу, что все различные столбцовые коли-

⁸Совершенно аналогично можно сформулировать этот результат и для строковых количеств отрицательных величин.

⁹Это всегда можно сделать не более чем $N - 1$ проходом по столбцам с перестановкой (в стиле сортировки «пузырьком») соседних столбцов и соответствующих строк, если столбцы оказались расположены не надлежащим образом.

чества отрицательных значений расположены над главной диагональю матрицы (в первом столбце отрицательных значений нет), т. е., в её верхнем треугольнике. Строчные же количества отрицательных величин окажутся расположенными в убывающем порядке, поскольку все значения над главной диагональю отрицательны. \square

Хотя эта теорема сформулирована для столбцовых количеств отрицательных элементов антисимметричной матрицы (либо может быть сформулирована только для строчных количеств), из её доказательства видно, что в любом случае оба набора количеств будут удовлетворять условиям теоремы — из-за антисимметричности матрицы. Если же вспомнить, что анализируемая здесь задача для таких матриц — просто переформулированная задача поиска медианы Кемени по традиционной матрице потерь, то мы получаем простое

Следствие. *Если в «облегчённой» матрице потерь некоторого набора ранжирований все столбцовые (строчные) количества отрицательных величин различны, то медиана Кемени данного профиля в этом случае будет единственна и её можно определить перестановкой номеров столбцов по возрастанию в них (или перестановкой номеров строк по убыванию в них) количеств отрицательных величин.*

Подобная ситуация встречается не очень часто, но её примеры имеются в литературе ([1, с. 75], [5, с. 23]). Рассмотрим первый из них: пятью экспертами указаны такие ранжирования пяти альтернатив a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 : 1) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ; 2) a_2, a_5, a_1, a_4, a_3 ; 3) a_3, a_2, a_1, a_4, a_5 ; 4) a_1, a_5, a_3, a_2, a_4 ; 5) a_4, a_3, a_1, a_5, a_2 .

На рис. 2 приведены: исходная «облегчённая» матрица потерь для этих ранжирований (вместе с обозначениями альтернатив); она же, но с количествами отрицательных элементов; результирующее состояние «облегчённой» матрицы потерь после «оптимальной» перестановки альтернатив.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(а)} & \text{(б)} & \text{(в)} \\
 \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 2. Пример из книги Б. Литвака [1, с. 75] (ситуация I): (а) — «облегчённая» матрица потерь и альтернативы; (б) — число отрицательных элементов по строкам и столбцам матрицы; (в) — матрица потерь после перестановки [1,3,2,4,5].

В соответствии с теоремой 2, как только обнаруживается различие всех столбцовых или же строчных количеств отрицательных элементов «облегчённой» матрицы потерь, задачу поиска медианы Кемени можно считать решённой: остаётся лишь узнать порядок следования номеров альтернатив после сортировки какого-либо из количеств отрицательных элементов. Поэтому совершенно аналогичная ситуация¹⁰ из [5] может быть проанализирована и разрешена существенно проще и быстрее, чем это сделано в статье.

Действия, необходимые для выяснения, имеет ли место для заданного профиля предпочтений столь простой случай, здесь записаны на языке Julia, но следует знать, что они во многих синтаксических аспектах не сложнее записи кода в MATLAB (синтаксис Julia был сознательно сделан авторами языка близким к его синтаксису).

```
col_negs(R::Matrix) = [sum(R[:,j].<0) for j=1:size(R)[2]]
row_negs(R::Matrix) = [sum(R[i,:].<0) for i=1:size(R)[1]]
straight_cols(R) = all(sort(col_negs(R)).==Vector{0:size(R)[2]-1})
straight_rows(R) = all(sort(row_negs(R)).==Vector{0:size(R)[1]-1})
is_straight(R) = straight_cols(R) && straight_rows(R)
```

Все эти строки — однострочные определения функций в Julia, выполняющих нужные действия над передаваемой им матрицей R: подсчёт столбцовых/строчных количеств отрицательных элементов, проверку линейного изменения этих отсортированных количеств (по отдельности и вместе).

	(а)	(б)	(в)
	$ \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} $	$ \begin{matrix} & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} $	$ \begin{matrix} & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} $

Рис. 3. Пример из книги Б. Литвака [1, с. 86–88] (ситуация III): (а) — «облегчённая» матрица потерь и альтернативы; (б) — число отрицательных элементов по строкам и столбцам матрицы; (в) — матрица потерь после перестановки [3,5,4,1,2].

Иллюстрация наиболее часто встречающейся ситуации III (невозможности размещения над главной диагональю всех отрицательных эле-

¹⁰Исходные ранжирования разбираемого там примера: $c \succ e \succ d \succ b \succ a$, $c \succ e \succ d \succ b \succ a$, $c \succ e \succ b \succ d \succ a$, $c \succ e \succ d \succ b \succ a$, $e \succ c \succ d \succ a \succ b$, $e \succ d \succ c \succ a \succ b$, $e \succ c \succ d \succ a \succ b$, $b \succ e \succ d \succ c \succ a$, $d \succ b \succ e \succ c \succ a$.

ментов) приведена на рис. 3 (пример¹¹ взят из [1, с. 86–88]). Обнаружить подобную ситуацию помогут такие фрагменты Julia-кода:

```
crossing_cols(R) = any(sort(col_negs(R)).>Vector{0:size(R)[2]-1})
crossing_rows(R) = any(sort(row_negs(R)).>Vector{0:size(R)[1]-1})
is_crossing(R) = crossing_cols(R) || crossing_rows(R)
```

Здесь опять присутствуют однострочные определения минимально необходимых вспомогательных функций. Из-за того, что часть отрицательных элементов неизбежно останется под главной диагональю (на это указывают ненулевые столбцовые суммы), теоретически возможный минимум суммы наддиагональных элементов (его можно найти с помощью функции `sum_negs(R) = sum(R[R.<0])`) не может быть достигнут.

Ситуация II иллюстрируется рис. 4: наличие дополнительных нулевых элементов антисимметричной матрицы уменьшает число отрицательных (превышение становится менее вероятным), однако появляется возможность дополнительных перестановок получаемого результата, приводящая к множественности медиан Кемени (в примере для профиля 5 альтернатив — $ABCDE, BDAEC, BAECD, ADBCE$ — 6 консенсусных ранжирований: $[1, 2, 3, 4, 5], [1, 2, 4, 3, 5], [1, 2, 4, 5, 3], [2, 1, 3, 4, 5], [2, 1, 4, 3, 5], [2, 1, 4, 5, 3]$).

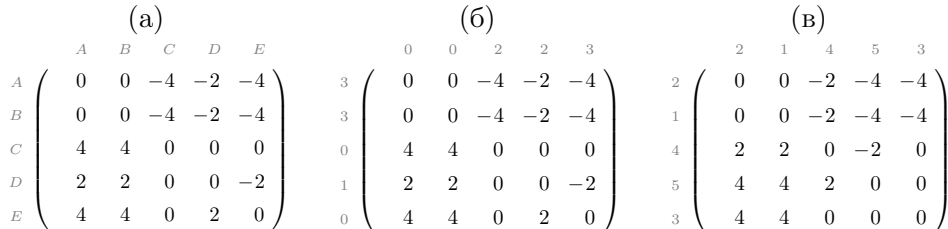


Рис. 4. Пример из пакета `RankAggreg` [6] для языка R : (а) — «облегчённая» матрица потерь и альтернативы; (б) — число отрицательных элементов по строкам и столбцам матрицы; (в) — матрица потерь после перестановки $[2, 1, 4, 5, 3]$.

Таким образом, количество отрицательных элементов в столбцах и строках матрицы, подвергаемой рассматриваемым здесь преобразованиям (одновременным перестановкам строк и столбцов), — это важные инварианты этих строк и столбцов при таких преобразованиях¹². Полезно

¹¹В примере пятью экспертами указаны такие ранжирования пяти альтернатив: 1) $a_2 \sim a_5, a_4, a_1 \sim a_3$; 2) $a_1 \sim a_3, a_2, a_5, a_4$; 3) $a_1, a_4, a_3 \sim a_5, a_2$; 4) $a_4, a_3, a_1 \sim a_2 \sim a_5$; 5) a_3, a_5, a_4, a_1, a_2 . Консенсусных ранжирований в этом примере три: $[3, 5, 4, 1, 2], [4, 3, 1, 5, 2], [4, 3, 5, 1, 2]$.

¹²Поскольку при любых перестановках строк (столбцов) элементы столбцов (строк), оставаясь неизменными, могут лишь менять своё местоположение в них.

также рассмотреть чуть подробнее, что может происходить при этом с отдельными элементами вообще. Т. к. порядок следования столбцов и строк в любой матрице потерь определяется общим порядком расстановки альтернатив, будем иногда говорить не о столбцах и строках матриц отдельно, а о позиционировании этих строк и столбцов, определяемом некоторой перестановкой их изначального расположения.

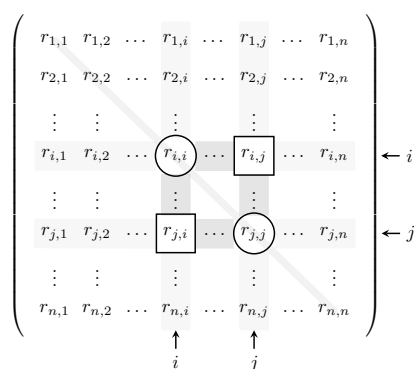


Рис. 5. Операция перестановки двух строк и столбцов (i и j).

Перестановка двух произвольных позиций. Действие этой «базовой» для рассматриваемых здесь матриц операции проиллюстрировано на рис. 5. Так как при обмене i -го и j -го столбцов и i -й и j -й строк часть элементов матрицы переставляется один раз, а те, что находятся на пересечении строк и столбцов, — дважды, получается, что элементы строк/столбцов вне области «перекрытия» останутся в «своей» треугольной половине, в пределах самой области «перекрытия» (за исключением «угловых» элементов) — перейдут в другую половину, а «угловые» — диагонально поменяются местами.

На рисунке 5 элементы области «перекрытия» сделаны чуть более тёмными, чем элементы вне её. Переставляемые «угловые» элементы там выделены, причём (поскольку на главной диагонали матрицы потерь находятся нули) перестановка одной пары вообще никак не сказывается на результате, а во второй паре элементы (не находящиеся на главной диагонали) попадают в противоположную половину. При этом, если обмениваются местами соседние строки/столбцы, то область «перекрытия» сводится лишь к «угловым» её элементам, а потому в таком случае в матрице потерь просто меняются местами наддиагональный и поддиагональный элементы, а остальные изменения происходят лишь в рамках «своих» половин и не изменяют ситуацию в смысле формирования суммы наддиагональных элементов.

Циклический сдвиг некоторых соседних позиций. Для простоты будем рассматривать пока только вариант циклического сдвига на одну позицию в ту или другую сторону. В принципе, перестановка двух соседних позиций вроде бы является частным случаем разбираемого здесь, но существенное отличие заключается в том, что для столь малого числа позиций вообще нет внедиагональных элементов «общего» фрагмента матрицы размером 2×2 , остающихся в «своей» треугольной половине после подобного сдвига, если не считать — формально — случай нулевых элементов под и над диагональю.

1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	6
11	12	13	14	15	11
16	17	18	19	20	16
21	22	23	24	25	21
	2	3	4	5	1

Рис. 6. Сдвиг на торе.

Легко проверить, что циклический сдвиг одновременно нескольких соседних строк и столбцов на одну позицию в сторону, скажем, уменьшения их номеров эквивалентен диагональному перемещению влево-вверх «общего» участка из этих строк и столбцов, «свёрнутого» в тор, т. е., когда первая из группы строк переходит в последнюю (с перемещением диагонального элемента), а первый столбец — в последний столбец (см. рис. 6).

Теперь, пользуясь этими двумя приведёнными преобразованиями, можно уже сформулировать некоторые полезные критерии относительно сумм наддиагональных элементов антисимметричных матриц.

Критерий «неизменности». Если в антисимметричной матрице $\|a_{ij}\|$ с размерами $N \times N$ для строки i при некотором целом $k > 0$ выполняется какое-либо из двух условий

$$\sum_{j=i}^{i+k} a_{ij} = 0 \quad (0 < k \leq N - i), \quad \sum_{j=i-k}^i a_{ij} = 0 \quad (0 < k < i),$$

то перестановка строки и столбца i на место $i+k$ (или $i-k$, соответственно) не изменяет сумму наддиагональных элементов матрицы¹³.

¹³Интересно, что антисимметричная матрица со всеми отрицательными значениями в верхнем треугольнике не будет удовлетворять критерию неизменности, поскольку в каждой строке справа и слева от диагональных элементов находятся величины одного знака (если они есть), — в полном соответствии с теоремой 1.

Доказательство. Применяемая здесь перестановка является циклическим сдвигом строк и столбцов (см. ранее), это значит, что строка i попала на место $i + k$ (или $i - k$) и наоборот, а остальные части строк и столбцов (между ними, но по разные стороны от главной диагонали) переместились в пределах «своих» треугольных половин матрицы. То же самое справедливо и для столбцов i и $i + k$ (или $i - k$): они перешли каждый в противоположную половину, но сумма элементов в этих перемещённых отрезках равна нулю: для строк — по условию, для столбцов — в силу антисимметричности матрицы. Значит, это изменение никак не могло повлиять на сумму её наддиагональных элементов. \square

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 \\
 5 & \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\
 4 & \boxed{0} & \boxed{0} & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\
 6 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
 1 & 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 & -1 & -1 \\
 7 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\
 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 7. Наличие дополнительных «равноправных» ранжирований.

В качестве пояснения использования критерия можно привести пример из [7], где для 6 ранжирований¹⁴ семи альтернатив получается 13 оптимальных перестановок; на рисунке 7 показано состояние «облегчённой» матрицы потерь этих ранжирований после одной из них.

Для каждого диагонального элемента антисимметричной матрицы ищутся (вправо и влево) отрезки из последовательных элементов его строки с нулевой накопленной суммой (рис. 7). Они будут указывать, куда можно переставлять номер диагонального элемента в текущем порядке столбцов и строк, чтобы сумма элементов верхнего треугольника матрицы оставалась неизменной. Такие отрезки здесь выделены фоновым цветом, а суммы элементов равны: $a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} = 0$, $a_{11} + a_{12} = 0$, $a_{22} + a_{21} = 0$, $a_{44} + a_{43} + a_{42} = 0$. Соответственно, в перестановке $[5, 4, 6, 1, 7, 2, 3]$, отвечающей за демонстрируемое состояние матрицы, первый номер можно поставить на второе место, второй — на первое и на последнее, четвёртый — на второе, что даёт (без учёта повто-

¹⁴Это ранжирования $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ (x_5, x_6, x_7)$; $x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_6 \succ (x_3, x_7)$; $x_7 \succ x_6 \succ x_2 \succ x_3 \succ (x_1, x_4, x_5)$; $x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ (x_1, x_2, x_6, x_7)$; $x_4 \succ x_7 \succ x_5 \succ x_6 \succ x_2 \succ (x_1, x_3)$; $x_6 \succ x_1 \succ x_7 \succ x_2 \succ (x_3, x_4, x_5)$; они записаны здесь более традиционно, чем в оригинале (в [7] вместо знака \succ используется \prec).

рений) такие новые перестановки: [4, 5, 6, 1, 7, 2, 3], [5, 6, 1, 7, 2, 3, 4], [5, 1, 4, 6, 7, 2, 3].

Критерий «улучшаемости». Если в антисимметричной матрице $\|a_{ij}\|$ с размерами $N \times N$ для строки i при некотором целом $k > 0$ выполняется какое-либо из двух условий

$$\sum_{j=i}^{i+k} a_{ij} > 0 \quad (0 < k \leq N - i), \quad \sum_{j=i-k}^i a_{ij} < 0 \quad (0 < k < i),$$

то перестановка строки и столбца i на место $i + k$ (или $i - k$, соответственно) уменьшает сумму её наддиагональных элементов на удвоенную абсолютную величину получаемой суммы, т. е., на $2|\sum a_{ij}|$.

Доказательство. Аналогично соображениям из доказательства предыдущего критерия можно сказать, что при указанных циклических сдвигах строка с положительной (отрицательной) суммой попадает из наддиагональной (поддиагональной) части матрицы в противоположную ей, уменьшая сумму наддиагональных элементов на (абсолютную) величину суммы в строке; то же самое происходит и с соответствующими столбцами (с такой же абсолютной величиной суммы): они переходят в противоположную часть, тоже уменьшая сумму наддиагональных элементов; остальные изменяющие своё положение части строк и столбцов никак на эту сумму не влияют, поскольку перемещаются в пределах «своих» частей. \square

Располагая такими критериями, можно уже «сконструировать» простейший («наивный») алгоритм минимизации суммы наддиагональных элементов антисимметричной матрицы (путём одновременного изменения положений её строк и столбцов): сначала — в соответствии с критерием «улучшаемости» — уменьшать её наддиагональную сумму, пока это возможно, а затем — с помощью критерия «неизменности» — выявить и многочисленные «равноправные» перестановки полученного «решения» (если они есть).

Конечно, здесь имеются некоторые трудности, связанные с тем, что путей уменьшения минимизируемой величины обычно не так мало (но можно рассматривать «жадную» версию, когда выбирается путь, дающий наибольший эффект), достигнутый минимум вполне может оказаться локальным, а не глобальным (но можно попытаться стартовать с какого-нибудь «хорошего приближения» к минимизирующей перестановке), да и вообще возможно, что существуют какие-то другие (пока не обнаруженные) критерии, позволяющие установить, что значение в локальном минимуме можно уменьшить, и указывающие, как это сделать.

Но, как выясняется, даже столь тривиальный подход работает на удивление неплохо для эвристического алгоритма, особенно учитывая его крайнюю простоту и применимость к ситуациям, которые нельзя назвать малоразмерными. А самым интересным для множественных оптимальных перестановок является то, что преобразования из критерия «неизменности» позволяют получить не просто какие-то другие оптимальные перестановки, а, похоже, дают возможность найти их все. Или, выражаясь более осторожно: пока не обнаружены примеры, в которых бы это было не так.

Эксперименты с ранжированиями. Настоящая работа начиналась с попыток отыскания консенсусных ранжирований (медиан Кемени) для различных наборов ранжирований. Довольно быстро выяснилось, что эвристический алгоритм, предложенный в [1, с. 82–83], работает не всегда, да и не рассчитан на поиски множественных оптимальных ранжирований. Попытки трансформировать его в рекурсивную версию, способную обнаруживать множественные результирующие ранжирования, привели к обнаружению случаев, в которых процедура из [1, с. 82], находит не медиану Кемени, а другое (довольно близкое к оптимальному) ранжирование [8]. После этого по доступной литературе были изучены приводимые там примеры, особенно те, где имеются множественные оптимальные ранжирования [3, 7], [9, с. 29]¹⁵ и др.

Разумеется, для повторения и анализа уже опубликованных примеров и результатов потребовались эффективные средства как ввода находимых наборов ранжирований, так и преобразования их в матрицы потерь. Подобный инструментарий — Julia-пакет `Rankings.jl` [10] — был создан, опробован на различных найденных в литературе примерах и постепенно усовершенствовался. Это позволило легко и просто выверять находимые примеры. При помощи макросов этого пакета ранжирования могут быть записаны во вполне привычном для исследователя виде, причём чаще всего — почти так же, как и в большинстве публикаций¹⁶: например, $a_2 \sim a_5, a_4, a_1 \sim a_3$ — для примера из [1, с. 86], $BDAEC$ — для примера из [6], $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ (x_5, x_6, x_7)$ — для примера из [7] и т. д., — только с «обрамлением» `ranking"..."`.

¹⁵ Два ранжирования, приводимые в книге Кемени и Снелла (по немного другому поводу), можно записать с помощью созданного пакета `Rankings.jl` так: `ranking"abcdefjgh" ⊗ ranking"gaiebchjfd"`. Как оказывается, они имеют целых 1224 ранжирования, максимально близких к ним (в смысле расстояния Кемени), являясь тем самым превосходным примером для проверки любых алгоритмов получения всех оптимальных ранжирований.

¹⁶ Некоторым исключением являются французские (и, по всей видимости, канадские) статьи, поскольку в них часто знаком приоритетности альтернативы выбран \prec (знак предшествования), а не \succ (по аналогии с $>$), как в остальном мире.

Дополнительно (для удобства) была введена специальная операция, обозначаемая выбранным для этой цели символом \otimes (в Julia такое тоже возможно), — для комбинирования отдельных ранжирований сразу в («облегчённую») матрицу потерь. Этот символ можно использовать и как специфическое имя функции:

```
 $\otimes(\text{ranking} \text{"ABCDE"}, \text{ranking} \text{"BDAEC"}, \text{ranking} \text{"BAECD"}, \text{ranking} \text{"ADBCE"})$ 
```

и как infixный символ бинарной операции (наподобие сложения или вычитания):

```
 $\text{ranking} \text{"ABCDE"} \otimes \text{ranking} \text{"BDAEC"} \otimes \text{ranking} \text{"BAECD"} \otimes \text{ranking} \text{"ADBCE"}$ 
```

В любом случае будет сформирована квадратная целочисленная антисимметричная матрица, каждый размер которой равен количеству альтернатив в отдельном ранжировании (совпадение их обозначений и согласованность количеств обязательно проверяется). Тем самым ввод практически любого найденного набора экспертных оценок сводился к «правильной» записи соответствующего выражения на языке Julia, создающего в качестве результата матрицу потерь для набора, что позволяло переходить от ранжирований непосредственно к процедурам определения консенсусных вариантов для них.

Реализованный в рамках пакета `Rankings.jl` упомянутый выше «наивный» алгоритм минимизации суммы наддиагональных элементов антисимметричной матрицы оформлен в виде функции `consensus()`, принимающей в качестве единственного параметра «облегчённую» матрицу потерь заданного профиля (набора ранжирований). Ситуация I в функции обрабатывается отдельно, а в ситуациях II и III (которые иногда¹⁷ трудно отличить друг от друга) в качестве первоначальных приближений взяты перестановки строк и столбцов матрицы, при которых должным образом отсортированы не сами количества отрицательных элементов в строках и столбцах, а суммы этих элементов в них¹⁸. При невозможности продолжить дальнейшее «улучшение» предусмотренным способом (используется «жадный» вариант, т. е., максимальный шаг) функция возвращает набор перестановок, получаемый на основе многократного применения критерия «неизменности».

Проверка работы функции `consensus()` на опубликованных в литературе примерах показала, что в большинстве случаев обнаруживается

¹⁷Так бывает при формальном отсутствии превышения прямых линейного нарастания/убывания отсортированными количествами отрицательных элементов, но при невозможности расположить все отрицательные элементы над диагональю.

¹⁸Такой подход позволяет «улучшить» приближения в случае большого диапазона изменения значений элементов; если же все значения отличаются незначительно, то приближения практически совпадут с полученными просто по количеству.

глобальный минимум наддиагональной суммы, а также все сопутствующие ему перестановки [8]. В некоторых примерах определяется локальный минимум (как правило, это происходит на матрицах, получаемых из т. н. турнирных²⁷); в одном из примеров, приводимом в статье [3], возникли трудности с получением всех оптимальных перестановок — поскольку их количество весьма велико (почти полмиллиона по оценкам автора статьи); сейчас в коде количество выводимых перестановок специально ограничено и процесс их поиска прерывается, если количество стало большим, хотя основная проблема заключается не в самом их формировании, а во времени, затрачиваемом на это.

Надёжная верификация результатов работы алгоритма при поиске оптимальных ранжирований (и тем более — всех) возможна с помощью последовательного перебора различных перестановок альтернатив, но практически осуществима лишь в случае их небольшого количества: уже десять альтернатив будут перебираться Julia-программой несколько секунд; распараллеливание проверок даёт возможность ускорить процесс, но не слишком значительно (можно перебрать до пятнадцати альтернатив), поскольку требует быстро нарастающего количества независимых «исполнителей» с каждой новой альтернативой. Тем не менее, параллельная реализация перебора также была опробована — из-за того, что в литературе имеются результаты поиска оптимальных ранжирований для 13 и 14 альтернатив [3, 11].

Распределённое (параллельное) формирование перестановок. Если для ускорения верификации результатов искать подходящие перестановки параллельно, то возникает необходимость формировать их отдельно и независимо друг от друга, а, значит, понадобится сопоставлять условному номеру каждого вычислительного элемента свою перестановку. Использованный в настоящей работе (ввиду отсутствия готового кода для параллельного формирования перестановок) способ такого сопоставления оказался — как выяснилось впоследствии — вариантом т. н. факториальной системы [12], но с обратным порядком следования «рядов» представления; поясним его вкратце.

```

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6
. . . . .

```

Рис. 8. Пояснение алгоритма формирования перестановок.

«Треугольник» на рис. 8 наглядно иллюстрирует рекурсивное «строение» перестановок. Возьмём, скажем, его вторую строчку. Числа 1, 2 показывают две возможные позиции второго элемента (впереди/позади) при размещении его относительно позиции первого (первая строчка), одновременно нумеруя их. Точно так же третья строка показывает все три возможные позиции размещения третьего элемента относительно (любого размещения!) первых двух (эти позиции тоже пронумерованы). Совершенно аналогичные выводы можно сделать и по поводу любой из последующих строк по сравнению с ей предшествующей: там будут все позиции размещения очередного элемента относительно уже расположенных ранее. Первая строка показывает (и нумерует) единственное возможное расположение самого первого элемента: перед ним никаких элементов нет, он может располагаться произвольно, но фактически — безвариантно. Тем самым (в силу принципа индукции) мы имеем способ перебора всех возможных перестановок.

Спускаясь из «вершины» этого треугольника вниз и выбирая в каждой строке (вплоть до последней) номер одной из позиций, мы получаем и подтверждение тому, что перебираются все перестановки (число «путей» будет равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N = N!$ для N строк), и уникальный числовой код каждой перестановки (образованный уже выбранными номерами — это и будет представление её условного номера в некоторой числовой системе; правда, в отличие от числа в «настоящей» факториальной системе разряды здесь идут в обратном порядке¹⁹).

Несмотря на то, что данное представление есть почти факториальная форма²⁰ (некоторого) числа, только записанная «цифрами» в обратном порядке, преобразование перестановки снова в уникальное первоначальное значение должно производиться не обычным переводом факториального представления в десятичное (хотя получится тоже уникальное значение из того же диапазона, но иное), а немного другим способом. Скажем, для четырёхзначных представлений веса разрядов будут не (1), 1, 2, 6, а (24), 12, 4, 1 ($2 = 1 \times 2$, $6 = 1 \times 2 \times 3$; но $24 = 4 \times 3 \times 2$, $12 = 4 \times 3$)²¹.

Одним из переносимых способов организации параллельных вычислений является стандарт OpenCL [13], предполагающий использование набора вычислительных единиц для выполнения одинакового кода (т. н.

¹⁹Что не имеет принципиального значения, поскольку нас интересует просто весь набор возможных перестановок.

²⁰В факториальном представлении какого-либо числа его «цифры» можно считать координатами соответствующей целочисленной точки многомерного параллелепипеда со всеми разными (целыми) размерами по различным измерениям.

²¹Это соответствует процедуре «выстраивания в линию» целочисленных точек упомянутого многомерного параллелепипеда со всеми разными (целыми) размерами по разным измерениям — только начиная с других («старших») измерений.

ядра OpenCL); именно наличие в настоящее время многих различных реализаций этого стандарта на распространённых платформах и позволило протестировать параллельный вариант перебора перестановок. Поясним, как организовано необходимое ядро.

Глобальный идентификатор ядра (т. е., уникальная целая величина, соответствующая ему; т. н. номер «исполнителя») сначала преобразуется в изложенное выше (квази)факториальное представление, из которого, в свою очередь, формируется соответствующая перестановка²². Она далее используется для преобразования порядка следования строк и столбцов заданной матрицы перед подсчётом суммы её наддиагональных элементов. В массиве с результатами проверки фиксируются только те перестановки, при которых сумма наддиагональных элементов преобразованной матрицы не превышает заданной пороговой величины. Если перестановок будет больше, чем предусмотрено памяти для хранения их условных номеров, то последующие перестановки сохранены не будут, однако их общее количество, тем не менее, подсчитывается.

Полный код использованного OpenCL-ядра для формирования некоторой конкретной перестановки и вычисления для заданной матрицы — после воздействия на её строки и столбцы этой сформированной перестановки — суммы её наддиагональных элементов приводится ниже (листинг 1). Он содержит собственно функцию ядра `Permutation()` (строки 13–42) и вспомогательную функцию `UTSum()` (строки 3–11). Последняя подсчитывает сумму наддиагональных элементов передаваемой ей матрицы `A` после переупорядочивания её строк и столбцов с помощью передаваемой перестановки `P` размера `N`.

Параметрами функции ядра являются: количество всех перестановок `Total`, указатель на исследуемую матрицу `AMatrix`, задаваемая пороговая величина `Level`, указатель на инкрементируемую (атомарно²³) величину `NumOf`, которая может быть изменена лишь одним из многочисленных «исполнителей», давая ему одновременно уникальное значение для расположения его результата в массиве, и ограничивающее её значение `NoMore`, определяемое реальным размером результирующего массива, а также сам этот массив `Result` для номеров подходящих перестановок — в виде указателя.

Суммарное количество «исполнителей» должно быть точно равно факториалу числа альтернатив — чтобы при обработке каждая перестановка была использована ровно один раз, для этого в функции ядра

²²Следует отметить, что она будет содержать величины, начиная с нуля, — поскольку ими индексируется массив языка C.

²³Для того, чтобы функция атомарного инкремента `atom_inc()` была доступна коду ядра, необходима также специальная директива разрешения использования нужного расширения в коде (она располагается в строке 1 листинга 1).

производится проверка (строка 24): должно ли оно (в зависимости от значения своего глобального идентификатора) исполняться или нет. Из-за быстрого роста (при увеличении количества альтернатив) числа необходимых «исполнителей» конфигурационное пространство OpenCL надо использовать максимально полно и понадобятся все три его возможных измерения. При этом приведение адресации конкретного «исполнителя» в трёх измерениях к некоторому уникальному идентификатору осуществляется с помощью параметров конфигурационного пространства стандартным образом (строки 19–21).

```
#pragma OPENCL EXTENSION cl_khr_int64_base_atomics : enable

int UTSum(__global int A[], uint P[], uint N)
{
    int S = 0;

    for (uint i = 0; i < N; i++)
        for (uint j = i+1; j < N; j++)
            S += A[P[i]*N + P[j]];
    return S;
}

__kernel void Permutation(ulong Total, __global int *AMatrix, int Level,
                          volatile __global ulong *NumOf, ulong NoMore,
                          __global ulong *Result)
{
    uint factcode[SIZE] = {0};
    uint permutation[SIZE] = {0};
    ulong gid = get_global_id(0)+
                get_global_id(1)*get_global_size(0)+
                get_global_id(2)*get_global_size(0)*get_global_size(1);
    ulong gid0 = gid;

    if (gid < Total) {
        uint n = SIZE;
        while (0 < n) {
            factcode[n-1] = gid % n + 1;
            gid /= n--;
        }
        n = SIZE;
        while (1 < n--) {
            uint k = 0;
            for (uint i = 0; i < SIZE; i++)
                if (permutation[i] == 0 && ++k == factcode[n])
                    permutation[i] = n;
        }
        if (UTSum(AMatrix, permutation, SIZE) <= Level) {
            ulong MyNo = atom_inc(NumOf);
            if (MyNo < NoMore) Result[MyNo] = gid0;
        }
    }
}
```

Листинг 1. Код ядра OpenCL

Воспользоваться этим ядром можно как в рамках OpenCL-программы на языке C/C++, так и из языков Python (с помощью пакета PyOpenCL), Julia (с помощью пакета OpenCL.jl) и т. п. В экспериментах настоящей статьи применялись различные версии пакета PyOpenCL на платформах x86_64 и ARM.

Поскольку ядро OpenCL компилируется уже в процессе работы программы (непосредственно перед запуском необходимого количества экземпляров ядра), при его компиляции можно (и нужно!) в командной строке указать значение ещё не определённого параметра: в данном случае — размера перестановки SIZE.

Следует отметить, что реализованный выше алгоритм может исполняться не только на многих ядрах, но и параллельно на многочисленных независимых вычислительных устройствах, поскольку позволяет легко распределять работу между ними путём разделения всего диапазона необходимых идентификаторов «исполнителей» на отдельные отрезки, тем самым дополнительно ускоряя процесс перебора.

Предшествующие работы по рассматриваемым вопросам. То, что здесь названо критерием «улучшаемости», в несколько упрощённом виде уже использовалось ранее и в эвристическом алгоритме Б.Литвака: ситуация, формулируемая критерием для ближайших к главной диагонали элементов, там называлась нарушением необходимого условия оптимальности [1, с. 82]; здесь оба сформулированных критерия составляют взаимодополняющую пару способов «перемещения» по возможным «уровням» суммы наддиагональных элементов «облегчённой» матрицы потерь.

Идею возможной циклической перестановки альтернатив можно обнаружить в статье [7], но там нет никаких численных соотношений, характеризующих подобные перестановки. Мысль об использовании количеств определённых элементов в строках и столбцах матрицы (по)парных сравнений²⁴ каких-либо объектов для определения такого их упорядочения, при котором количество противоречивых ответов минимально, появлялась в давней статье [14, р. 308], но не получила дальнейшего логического развития²⁵, а приводимый там же пример наглядно

²⁴В статье подобная матрица содержит символ + (плюс) в столбце j строки i и символ - (минус) в строке j столбца i — если объект i предпочтительнее объекта j . По сути она антисимметрична (с элементами ± 1), а при «правильном» порядке расположения объектов все последующие менее предпочтительны, чем предшествующие, и, значит, правее главной диагонали в каждой строке в идеале должны быть лишь символы плюс. Ситуация, когда там имеются символы минус, трактуется как противоречивость отдельных сравнений; «правильный» порядок должен иметь минимальное число противоречий.

²⁵Хотя там уже содержится наблюдение о возможности перемещения строки матрицы ниже, если число символов минус справа от диагонального элемента превышает

продемонстрировал, что работает такой подход далеко не всегда. В настоящей работе подобный подход применяется к (произвольным) антисимметричным матрицам (как вариантам матриц потерь некоторых профилей ранжирований) — но для их предварительного анализа и получения начального приближения, с которого начинается процесс дальнейшего уточнения и поиска оптимальных ранжирований.

Вообще надо сказать, что задача отыскания медиан Кемени родственна немалому количеству задач, по-разному названных и рассматриваемых в различных предметных областях: и только что упомянутой задаче упорядочения альтернатив по матрице парных сравнений (которая антисимметрична с элементами ± 1), и задаче ранжирования команд по результатам игр в (однокруговом) турнире²⁶ (от матрицы парных сравнений турнирная матрица отличается лишь отсутствием отрицательных значений — вместо них присутствуют нули, но её легко привести к антисимметричному виду, если сформировать матрицу²⁷ $A = T^\top - T$; в записи на языке Julia можно использовать выражение $A = T' - T$, где T' — операция, эквивалентная для вещественных матриц транспонированию) и многим другим, не говоря уже о том, что турнир можно рассматривать и как полный орграф, где каждой паре вершин (двум игрокам) соответствует ребро из одной вершину в другую (результат их игры), а тогда задача уже переходит в область теории графов. Поэтому значительная часть исследований может не попадать в поле зрения специалистов, так как находится за пределами областей их традиционного интереса, а, значит, требует внимательного перекрёстного анализа разнообразных математических и прикладных разделов.

Иллюстрации вывода некоторых известных алгоритмов генерации перестановок для случая четырёх элементов приводятся в [15] и [16]; использованный здесь алгоритм порождает другую последовательность. Она отличается от уже известных тем, что в ней перестановки упорядочены в соответствии с факториальным представлением их индекса, но начиная не со «старших», а с «младших» разрядов этого представления. Впрочем, для алгоритма параллельного формирования всех возможных

число символов плюс, — для уменьшения количества символов минус в верхней треугольной половине, в чём можно усмотреть «предка» сформулированного в настоящей работе критерия «улучшаемости».

²⁶Турнир (tournament) — это круговой турнир, в котором каждый игрок из N играет ровно одну игру с каждым из остальных игроков, причём ничьих не бывает. Результаты турнира обычно записываются в квадратную матрицу $\|t_{ij}\|$ порядка N , где $t_{ij} = 1$, если игрок i побеждает j , и $t_{ij} = 0$, если игрок i проигрывает j ; диагональные элементы считаются равными нулю: $t_{ii} = 0$. Такая (0,1)-матрица T называется турнирной матрицей (tournament matrix).

²⁷Антисимметричность матрицы следует непосредственно из её определения: $A^\top = (T^\top - T)^\top = T - T^\top = -(T^\top - T) = -A$.

перестановок, использованного в работе, их порядок не является существенным, главное, чтобы перестановки были сформированы все и без повторений.

Заключение. В настоящей работе рассмотрен комбинаторный подход к задаче отыскания медиан Кемени с использованием антисимметричных аналогов матриц потерь, проанализированы возникающие при этом типы ситуаций и сформулирован эвристический алгоритм поиска оптимальных консенсусных ранжирований, включая множественные. Для эффективной работы с ранжированиями и возможности быстрой верификации сторонних результатов был создан специализированный пакет на языке Julia и опробован на имеющихся в литературе примерах.

Работа выполнена при поддержке гранта 18-07-00424 и по предложению его научного руководителя профессора Ю.П. Пытьева, за что автор хотел бы выразить ему искреннюю благодарность.

Список литературы

- [1] Б. Г. Литвак, *Экспертная информация: Методы получения и анализа*, Радио и связь, М., 1982.
- [2] *Julia language*. <https://julialang.org>.
- [3] S. V. Muravyov, “Ordinal measurement, preference aggregation and interlaboratory comparisons”, *Measurement*, **46** (2013), 2927–2935.
- [4] Е. Е. Тыртышников, *Основы алгебры*, Физматлит, М., 2017.
- [5] В. А. Болтенков, В. И. Куваева, П. П. Червоненко, “Метод экспертного выбора цифровых компонентов систем промышленной автоматизации на основе марковской модели”, *Технология и конструирование*, 2018 № 2, 21–28.
- [6] *RankAggreg package*.
<https://cran.r-project.org/web/packages/RankAggreg/RankAggreg.pdf>.
- [7] A. Guénoche, “Analyse des Préférences et Tournois Pondérés”, *J. of Interd. Method. and Issues in Science*, **2** (2017).
- [8] *Эксперименты с ранжированиями*.
<https://github.com/vaa-msu/ranking-tests>.
- [9] Дж. Кемени, Дж. Снелл, *Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения*, Советское радио, М., 1972.
- [10] *Пакет Rankings.jl*. <https://github.com/vaa-msu/Rankings.jl>.
- [11] С. Д. Двоенко, Д. О. Пшеничный, “О метрических свойствах медианы Кемени”, *Машинное обучение и анализ данных*, **1:11** (2015), 1619–1631.
- [12] *Factorial number system*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Factorial_number_system.
- [13] *Open Standard for Parallel Programming*. <https://www.khronos.org/oclc/>.
- [14] P. Slater, “Inconsistencies in a Schedule of Paired Comparisons”, *Biometrika*, **48:3/4** (1961), 303–312.
- [15] *Permutation*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation>.
- [16] *Generate permutations*. <http://compos.org/perm>.

On a Strict Consensus Ranking Algorithm

Antonyuk V. A.

A combinatorial approach to the strict consensus ranking problem for a given set of nonstrict orderings of alternatives is considered. A concept of light score matrix (skew-symmetric) is introduced providing more simple and clear optimization process and its result. Some heuristic search procedures are formulated allowing optimal strict consensus rankings (including multiple) to be found in different cases.

Keywords: rankings, Kemeny median, skew-symmetric matrices, parallel generation of permutations, Julia language, OpenCL.

References

- [1] Litvak, B. G., *Expert Information. Methods of Acquisition and Analysis*, Radio and Communication, Moscow, 1982 (in Russian), 184 pp.
- [2] *Julia Language*, <https://julialang.org>.
- [3] Muravyov, S. V., “Ordinal measurement, preference aggregation and interlaboratory comparisons”, *Measurement*, **46** (2013), 2927–2935.
- [4] Tyrtyshechnikov, E. E., *Algebra Fundamentals*, Fizmatlit, Moscow, 2017 (in Russian), 464 pp.
- [5] Boltenev, V. A., Kuvaieva, V. I., Chervonenko, P. P., “Method for Expert Choice of Industrial Automation Digital Components on the Basis of Markov’s Model”, *Tekhnologiya i Konstruirovaniye v Elektronnoi Apparature [Technology and Design in Electronic Equipment]*, 2018, № 2, 21–28 (in Russian).
- [6] RankAggreg package
<https://cran.r-project.org/web/packages/RankAggreg/RankAggreg.pdf>
- [7] Guénoche A., “Analyse des Préférences et Tournois Pondérés”, *J. of Interd. Method. and Issues in Science*, **2** (2017).
- [8] *Experiments with Rankings*, <https://github.com/vaa-msu/ranking-tests> (in Russian).
- [9] Kemeny J.G. and Snell J.L., *Mathematical Models in the Social Sciences*, Sovetskoe radio, Moscow, 1972 (in Russian), 192 pp.
- [10] *Rankings.jl Package*, <https://github.com/vaa-msu/Rankings.jl>.
- [11] Dvoenko, S.D. and Pshenichny, D.O., “On Metric Characteristics of the Kemeny’s Median”, *Mashinnoye obucheniye i analiz dannykh [Machine Learning and Data Analysis]*, **1**:11 (2015), 1619–1631 (in Russian).
- [12] Factorial Number System
https://en.wikipedia.org/wiki/Factorial_number_system
- [13] *Open Standard for Parallel Programming*, <https://www.khronos.org/opencv/>.
- [14] Slater P., “Inconsistencies in a Schedule of Paired Comparisons”, *Biometrika*, **48**:3/4 (1961), 303–312.
- [15] *Permutation*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation>.
- [16] *Generate Permutations*, <http://combos.org/perm>.

Достаточные условия минимальности сетей типа звезда в гиперпространствах

А. М. Тропин¹

Задача Ферма—Штейнера заключается в поиске такой точки метрического пространства Y , что сумма расстояний от нее до точек некоторого конечного фиксированного подмножества $A \subset Y$, называемого границей, минимальна. Минимальную сумму расстояний мы будем называть длиной минимальной астросети. Мы рассматриваем эту задачу в гиперпространстве $Y = H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного метрического пространства X ; причем на $H(X)$ введена метрика Хаусдорфа. В силу ограниченной компактности X все элементы $H(X)$ являются компактными. Каждое решение задачи Ферма—Штейнера будем называть астрокомпактом Штейнера; их множество разбивается на классы одинаковой взвешенности, каждый из которых соответствует своему вектору расстояний до граничных компактов.

В настоящей статье доказаны три достаточных условия того, что для данной границы предъявленный компакт является астрокомпактом Штейнера. Также эти условия гарантируют единственность класса астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности. Данная теория применяется для полного решения задачи Ферма—Штейнера для некоторых симметричных выпуклых трехэлементных границ в \mathbb{R}^2 , что демонстрируется примерами.

Ключевые слова: задача Ферма—Штейнера, сеть типа звезда, минимальная астросеть, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, расстояние Хаусдорфа, метрическая проекция, функция расстояния от точки до множества, первая вариация.

1. Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой дана предыстория задачи и приводятся необходимые определения из теории экстремальных сетей и задачи Ферма—Штейнера в гиперпространствах.

Напомним, что в метрическом пространстве X метрику $\rho(a, b)$ мы обозначаем через $|ab|$, а расстояние от точки a до множества B через $|aB|$. В гиперпространстве $H(X)$ непустых замкнутых и ограниченных

¹Тропин Александр Михайлович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amtropin@gmail.com.

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

подмножеств X в качестве метрики используем расстояние Хаусдорфа $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |bA|\}$. Для фиксированной границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$ длиной минимальной сети типа звезда, или, для краткости, длиной минимальной астросети называется точная нижняя грань величин $S_{\mathcal{A}}(K) := \sum_{i=1}^n d_H(A_i, K)$ по всем $K \in H(X)$. Известно, что в случае ограниченно компактного пространства X все элементы $H(X)$ являются компактами, а длина минимальной астросети достигается хотя бы на одном компакте (их будем называть астрокомпактами Штейнера). Задача поиска астрокомпактов Штейнера называется *задачей Ферма–Штейнера*.

Для границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ в гиперпространстве над ограниченно компактным пространством доказаны три достаточных условия того, что предъявленный компакт K' является астрокомпактом Штейнера. Приведем эти условия:

- 1) для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют такие точки $b_i \in A_i$, что для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K'))$ выполняется

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} \sum_{j \neq i} |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K');$$

- 2) для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ и для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K'))$ выполняется

$$d_i + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_i}(A_i)| > S_{\mathcal{A}}(K');$$

- 3) для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для каждого набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ и для любых $d_{i_l} \geq 0$ таких, что $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, выполняется

$$\sum_{l=1}^m d_{i_l} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_{i_1}, \dots, d_{i_m}}| > S_{\mathcal{A}}(K'),$$

где $L_{d_1, \dots, d_l} = \bigcap_{i=1}^l B_{d_i}(A_i)$ при $d_j \geq 0$.

Более того, при выполнении любого из этих условий класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} единственен, и K' ему принадлежит.

Отметим, что для решения задачи Ферма–Штейнера в гиперпространстве мы существенно используем функцию, равную сумме расстояний от точки пространства до фиксированных компактов. Обратим внимание, что эта функция используется в первом достаточном условии. В данной работе исследуются следующие свойства этой функции.

- 1) В $\mathbb{R}^{m'}$ рассматривается граница из $(2m+1)$ -го выпуклого компакта, один из которых — строго выпуклый A_0 — отделен от остальных гиперплоскостью π , а остальные разбиваются на пары $\{A_j, A_{m+j}\}$, $j = 1, \dots, m$, состоящие из компактов, симметричных относительно гиперплоскости π_1 . Для таких компактов показано, что функция $s(k) := \sum_{i=1}^{2m} |kA_i|$, минимизируемая по $k \in A_0$, имеет единственную точку минимума, которая лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$.
- 2) Доказана формула первой вариации для длины сети типа звезда в $\mathbb{R}^{m'}$, соединяющей точку k , не лежащую ни в одном из выпуклых компактов A_1, \dots, A_n , с ближайшими точками $c_i(k) \in A_i$ этих компактов. Показано, что производная по направлению \vec{v} функции $s(k)$ равняется $\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle$, где \vec{n} — сумма единичных векторов, сонаправленных с $c_i(k)\vec{k}$.

В статье демонстрируются конкретные примеры границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которых удается полностью решить задачу Ферма—Штейнера с использованием приведенных выше достаточных условий, а также экстремальных свойств функции $s(k)$. Также в некоторых случаях граничных элементов исследовано поведение функции длины минимальной астросети при естественных 1-параметрических деформациях границы. Кроме того, на данных примерах проиллюстрирована техника, описанная в [1] и позволяющая деформировать границы с неувеличением длины минимальной астросети: деформации граничных компактов относительно редукции и переход к подмножествам, выпуклые оболочки которых равны граничным компактам.

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Необходимые сведения из теории сетей и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу приведены в первой части статьи [1].

2.1. Структура астрокомпактов Штейнера в ограниченно компактных пространствах

Мы будем изучать минимальные астросети, соединяющие конечные границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ в $(H(X), d_H)$. Длина ребра $e = BC$ сети опреде-

ляется как расстояние Хаусдорфа $d_H(B, C)$. Напомним, что длину параметрической сети типа звезда, соединяющей границу \mathcal{A} с компактом K , мы обозначаем через $S_{\mathcal{A}}(K)$, а длину минимальной астросети, соединяющей \mathcal{A} , — через $S_{\mathcal{A}}$.

Пусть сначала X — произвольное метрическое пространство. Множество всех астрровершин Штейнера мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Положим $d(x, \mathcal{A}) = (\rho(x, a_1), \dots, \rho(x, a_n))$ и $\Omega(\mathcal{A}) = \{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\}$. Для каждого $d \in \Omega$ мы определим класс астрровершин Штейнера одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \{y \in \Sigma(\mathcal{A}), d(y, \mathcal{A}) = d\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega$. Заметим, что, в общем случае, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ может быть пустым, однако в случае ограниченной компактности X это множество непусто.

При этом астрровершины Штейнера не всегда определяются однозначно. Минимальным и максимальным астрровершинами Штейнера в классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ назовем соответственно минимальный и максимальный элементы в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в смысле естественного порядка по включению.

Каноническим расширением компакта K из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ относительно семейства \mathcal{A} назовем множество $K_d(\mathcal{A}) := \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$ и $d_i = d_H(K, A_i)$. Доказано, что множество $K_d(\mathcal{A})$ является компактом.

Пусть теперь X — ограниченно компактное метрическое пространство с метрикой ρ , в нем все замкнутые и ограниченные множества являются компактами. Астрровершины Штейнера в этом случае будем называть астрокомпактами Штейнера. В работе [2] описана структура класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в случае ограниченно компактного X , мы напомним здесь основные результаты.

Лемма 1 (существование и единственность максимального астрокомпакта Штейнера). Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ множество $\Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит единственный максимальный астрокомпакт Штейнера, и этот астрокомпакт Штейнера равен $K_d(\mathcal{A})$.

Теорема 1 (структура $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в ограниченно компактном пространстве). Пусть X — ограниченно компактное пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ компакт K лежит в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $K_\lambda \subset K \subset K_d(\mathcal{A})$ для некоторого минимального астрокомпакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ и единственного максимального астрокомпакта Штейнера $K_d(\mathcal{A})$ из $\Sigma_d(\mathcal{A})$.

Напомним результаты, сформулированные в [1].

Лемма 2. Если метрическое пространство (X, ρ) ограничено компактно, то пространство $(H(X), d_H)$ также ограничено компактно.

Следствие 1. Пусть X — ограничено компактное метрическое пространство, и \mathcal{A} — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто.

2.2. Некоторые свойства расстояния от точки до выпуклого множества

Пусть даны точка a и множество B в метрическом пространстве (X, ρ) . Напомним, что мы обозначаем $\rho(a, b)$ через $|ab|$, а $\inf_{b \in B} |ab|$ — через $|aB|$.

Введем функцию $r_B(a) := |aB|$ и напомним некоторые ее свойства.

Лемма 3. При $B \subset X$ функция $r_B(a)$ является непрерывной.

Доказательство. Фиксируем точку a и $\delta > 0$. По определению инфимума, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| - r_B(a) < \varepsilon$. Значит, для каждой точки $a' \in U_\delta(a)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$r_B(a') \leq |a'b| \leq |ab| + |aa'| < |ab| + \delta \leq r_B(a) + \varepsilon + \delta.$$

Аналогично получаем неравенство $r_B(a) < r_B(a') + \varepsilon + \delta$, откуда $|r_B(a') - r_B(a)| < \delta + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому окончательно $|r_B(a') - r_B(a)| < \delta$. Значит, функция r_B является непрерывной. \square

Лемма 4. Пусть K — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n . Тогда функция $r_K(a)$ является выпуклой.

Доказательство. Хорошо известно, функция расстояния $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой, то есть для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\rho((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)) \leq (1-t)\rho(x_1, y_1) + t\rho(x_2, y_2)$.

Поскольку K — компакт, для точек $a, b \in \mathbb{R}^m$ существуют $k_a \in P_K(a)$ и $k_b \in P_K(b)$, то есть $r_K(a) = \rho(a, k_a)$ и $r_K(b) = \rho(b, k_b)$. Поскольку K — выпуклый, при $t \in [0, 1]$ точка $(1-t)k_a + tk_b$ принадлежит K . Тогда справедливо

$$r_K((1-t)a + tb) \leq \rho((1-t)a + tb, (1-t)k_a + tk_b) \leq (1-t)r_K(a) + tr_K(b).$$

Утверждение доказано. \square

Следствие 2. Если $r_K(a)$ определена на выпуклом подмножестве $L \subset \mathbb{R}^n$, то $r_K(a)$ является выпуклой на нем. В частности, это верно для $L = \mathbb{R}^m$, $m \leq n$.

Метрической проекцией $P_B(a)$ точки a на множество B называется множество $\{b \in B : |ab| = r_B(a)\}$. Следующее утверждение вытекает из свойства компакта.

Лемма 5. Если K — компакт в \mathbb{R}^n , и a — произвольная точка, то $P_K(a)$ не пусто.

Лемма 6. Если K — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n со строго выпуклой нормой, то $P_K(a)$ состоит из одной точки.

Доказательство. Если $a \in K$, то утверждение очевидно. Пусть $a \notin K$, тогда предположим, что $P_K(a)$ содержит хотя бы две различные точки k_1 и k_2 , то есть $|ak_1| = |ak_2| = d > 0$. Из строгой выпуклости нормы получаем, что середина отрезка $[k_1, k_2]$, которую мы обозначим через k_3 , обладает свойством $|ak_3| < d$. Из выпуклости K следует, что $k_3 \in K$. Получили противоречие с тем, что $r_K(a) = d$. \square

В случаях, когда метрическая проекция $P_B(a)$ одноточечная, будем обозначать ее элемент через $c_B(a)$. Если к тому же точка $a = a(d)$ однозначно задается некоторым параметром d , то будем также использовать обозначения $P_B(d)$ и $c_B(d)$.

Следующий результат хорошо известен и упоминается, к примеру, в [3].

Лемма 7. Пусть в \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой дан выпуклый компакт K . Тогда отображение $c_K(a)$ как функция точки a является непрерывным.

Также нам потребуется результат из [4]. Нормированный вектор $\frac{\vec{ab}}{|ab|}$ будем обозначать через \vec{e}_{ab} .

Лемма 8. Пусть в \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой даны выпуклый компакт K и точка $a \notin K$. Тогда функция $r_K(a)$ дифференцируема по направлениям, и ее производная по направлению \vec{v} в точке a_0 равна

$$\frac{\partial r_K(a_0)}{\partial v} = \left(\frac{a_0 - c_K(a_0)}{r_K(a_0)}, \vec{v} \right) = (\overrightarrow{e_{c_K(a_0)a_0}}, \vec{v}).$$

2.3. Некоторые свойства расстояния Хаусдорфа и астросетей

Пусть A, B — компакты в метрическом пространстве (X, ρ) . Введем также обозначение $d_{AB} := \min\{d : A \subset B_d(B)\} = \sup_{a \in A} |aB|$. По определению, что $d_H(A, B) = \max\{d_{AB}, d_{BA}\}$.

Следующий результат опубликован в [2].

Лемма 9. Пусть A и B — непустые компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_H(A, B)$.

Сформулируем и докажем более сильное утверждение.

Лемма 10. Пусть A и B — непустые компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_{AB}$.

Доказательство. Для любой точки $a \in A$ справедливо неравенство $|aB| \leq \sup_{a_1 \in A} |a_1B| = d_{AB}$. Поскольку B — компакт, то существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| = |aB|$. Утверждение доказано. \square

Пусть a_1, \dots, a_n — точки в метрическом пространстве X . Введем функцию $\sigma_{a_1 \dots a_n}(k) := \sum_{i=1}^n |a_i k|$ для $k \in X$. Тогда, как показано в [1], верен следующий результат.

Лемма 11. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, и $K \in H(X)$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_l, K) \geq |a_l k|$ для любого $l \in \{1, \dots, n\}$. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k)$.

Утверждение 11 с учетом утверждения 10 можно усилить следующим образом.

Лемма 12. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, и K — некоторый компакт. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_{A_i K} \geq |a_i k|$ и $d_{KA_j} \geq |a_j k|$ для любого $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. В частности, $d_{A_i K} + \sum_{j \neq i} d_{KA_j} \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k)$.

2.4. Деформации границы с неувеличением длины минимальной астросети

Напомним определения и результаты из [1].

Выпуклой оболочкой подмножества A линейного пространства X называется наименьшее по включению выпуклое множество в X , содержащее A . Будем обозначать её через $\text{conv}(A)$. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Через $\text{conv}(\mathcal{A})$ обозначим границу, состоящую из компактов $\text{conv}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Для m -мерного нормированного пространства X и границы $\mathcal{A} \subset H(X)$ выполняется $S_{\text{conv}(\mathcal{A})} \leq S_{\mathcal{A}}$.

Назовем множество $B \subset X$ *порождающим* для множества $A \subset X$, если $A = \text{conv}(B)$. Очевидно, что множество A , для которого существует порождающее множество, является выпуклым. Границу $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\} \subset H(X)$ назовем *порождающей* для границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$, если B_i является порождающим для A_i , $i = 1, \dots, n$. Границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$ назовем *выпуклой*, если все A_i — выпуклые, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что если граница \mathcal{B} является порождающей для \mathcal{A} , то \mathcal{A} является выпуклой.

Следствие 4. Для m -мерного нормированного пространства X и границ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset H(X)$ таких, что \mathcal{B} является порождающей для \mathcal{A} , выполняется $S_{\mathcal{A}} \leq S_{\mathcal{B}}$.

Применение следствия 4 для нахождения множества астрокомпактов Штейнера будет продемонстрировано на границах из теорем 11 и 13.

Пусть теперь A, K — компакты в ограниченно компактном пространстве X . Определим следующие подмножества компактов A и K :

$$\begin{aligned} \text{to}_K(A) &:= A \setminus U_{d_{AK}}(K), \quad \text{from}_A(K) := K \cap B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A)), \\ \text{to}_A(K) &:= K \setminus U_{d_{KA}}(A), \quad \text{from}_K(A) := A \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)). \end{aligned}$$

Введенные понятия проиллюстрированы на рис. 1. Компакт $\text{from}_K(A) \cup \text{to}_K(A)$ обозначим через $R_K(A)$ и будем называть *редукцией компакта A относительно компакта K* . Также введем множество (см. рис. 2)

$$F_K(A) := R_K(A) \cup \left(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right),$$

которое будем называть *K -облаком* компакта A .

Будем говорить, что компакт $B \in H(X)$ является *K -деформацией* компакта A , если $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. Будем говорить, что компакт A обладает *свойством from-покрытия* компакта K , если

$$\left(K \setminus \text{to}_A(K) \right) \subset U_{d_{KA}}(\text{from}_K(A)).$$

Перейдем к деформации границ и оценке длины минимальной астро-сети. Пусть K — некоторый компакт, и даны границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Границу \mathcal{B} назовем *K -деформацией* границы \mathcal{A} , если B_i является K -деформацией компакта A_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Скажем, что граница \mathcal{A} обладает *свойством from-покрытия K* , если каждый A_i обладает свойством from-покрытия K . Тогда справедлива следующая теорема.

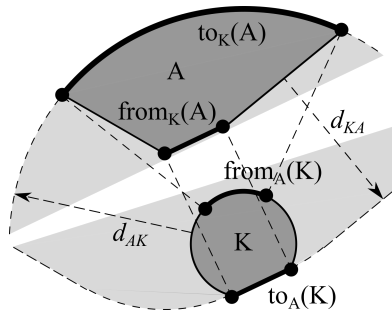


Рис. 1. Компакты A , K (закрашены темно-серым) и множества $\text{from}_K(A)$, $\text{to}_K(A)$, $\text{from}_A(K)$, $\text{to}_A(K)$.

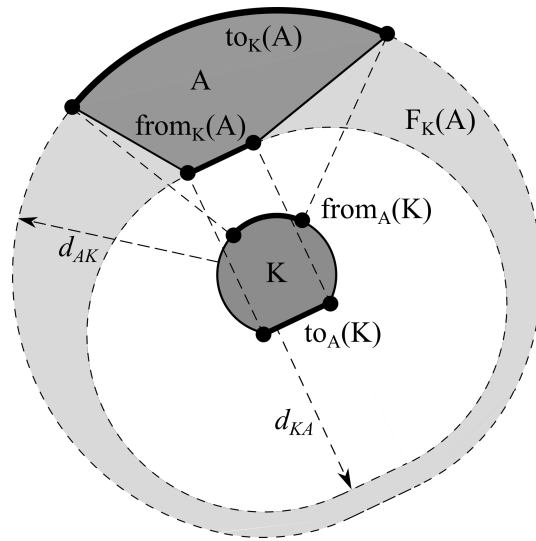


Рис. 2. Компакты A и K (закрашены темно-серым) и множество $F_K(A)$ (закрашено светло-серым).

Теорема 2. Если для границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ и астрокомпакта Штейнера $K_{\mathcal{A}}$ для границы \mathcal{A} верно, что \mathcal{B} является $K_{\mathcal{A}}$ -деформацией \mathcal{A} , и \mathcal{A} обладает свойством from-покрытия компакта $K_{\mathcal{A}}$, то $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{A}}$.

Применение теоремы 2 будет продемонстрировано на границе из теоремы 9.

3. Достаточные условия того, что данный компакт является астрокомпактом Штейнера. Единственность класса одинаковой взвешенности

В данном разделе мы докажем три достаточных условия принадлежности компакта множеству астрокомпактов Штейнера для данной границы, которые также гарантируют единственность класса астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности.

3.1. Первое условие

В доказательстве первого условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j}.$$

Лемма 13. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть $b_1 \in A_1$ и $d_1 \geq 0$ таковы, что для некоторого компакта K' выполняется

$$d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} \sum_{j=2}^n |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{A_1 K} = d_1$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{A_1 K} = d_1$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда, по лемме 12, для любой точки $b_1 \in A_1$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{2, \dots, n\}$, такие, что $d_1 = d_{A_1 K} \geq |b_1 k|$ и $d_{KA_j} \geq |a_j k|$, $j = 2, \dots, n$ и, следовательно, $d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j} \geq d_1 + \sigma_{a_2 \dots a_n}(k)$. Поскольку $k \in B_{d_1}(b_1)$, то, минимизируя правую часть по таким k , получаем

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}(K) &\geq d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j} \geq d_1 + \min_{a_j \in A_j, j > 1, k \in B_{d_1}(b_1)} \sigma_{a_2 \dots a_n}(k) = \\ &= d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} \sum_{j=2}^n |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K'). \end{aligned}$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 5. Используя в доказательстве леммы 13 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_1, K) = d_1$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют такие точки $b_i \in A_i$, что для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K'))$ выполняется

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} \sum_{j \neq i} |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт. Если хотя бы для одного i выполняется $d_i := d_H(A_i, K) < d_H(A_i, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 13 и следствию 5 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех i справедливо $d_H(A_i, K) \geq d_H(A_i, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то $S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}}(K')$, и K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенства, то для всех i справедливо $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$, следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Пример границы, для которой можно найти астрокомпакты Штейнера с помощью теоремы 3, будет построен в разделе 5.1.

3.2. Второе условие

В доказательстве второго условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{KA_1} + \sum_{j=2}^n d_{A_j K}$$

Лемма 14. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторых $d_1 \geq 0$ и компакта K' выполняется

$$d_1 + \sum_{j=2}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{KA_1} = d_1$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{KA_1} = d_1$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда $K \subset B_{d_1}(A_1)$ и для каждого $j = 2, \dots, n$ справедливо

$$d_H(A_j, K) \geq d_{A_j K} = \max_{a_j \in A_j} |a_j K| \geq \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)|.$$

Значит,

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{KA_1} + \sum_{j=2}^n d_{A_j K} \geq d_1 + \sum_{j=2}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 6. *Используя в доказательстве леммы 14 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_1, K) = d_1$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' , для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ и для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K')]$ выполняется*

$$d_i + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_i}(A_i)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт. Если хотя бы для одного i выполняется $d_i := d_H(A_i, K) < d_H(A_i, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 14 и следствию 6 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех i справедливо $d_H(A_i, K) \geq d_H(A_i, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то $S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}}(K')$, и K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенство, то для всех i справедливо $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$, следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Рассмотрим пример границы, для которой можно найти астрокомпакты Штейнера с помощью теоремы 4.

Пусть в \mathbb{R}^2 дан правильный $\triangle a_1 a_2 a_3$ со стороной 1. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = \{a_j, a_k\}$ для $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. рисунок 3). Построим точки $y_{j,k}$ как середины отрезков $[a_j, a_k]$ и определим компакт $Y = \{y_{1,2}, y_{2,3}, y_{1,3}\}$.

Теорема 5 (пример четырехэлементного множества компактов Штейнера). *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A} :*

- 1) *длина минимального дерева Штейнера $S_{\mathcal{A}}$ равняется $\frac{3}{2}$;*
- 2) *множество $\Sigma(\mathcal{A})$ компактов Штейнера состоит из одного класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ такого, что $d = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и содержит четыре элемента;*

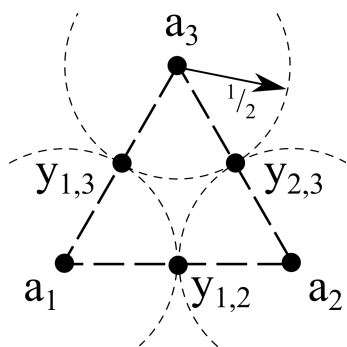


Рис. 3. Граница \mathcal{A} и компакт Y .

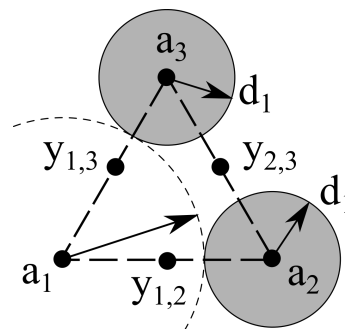


Рис. 4. Окрестность $B_{d_1}(A_1)$ (закрашена серым).

- 3) максимальным компактом Штейнера является компакт Y ;
- 4) минимальных компакта Штейнера три: $\{y_{1,2}, y_{2,3}\}$, $\{y_{2,3}, y_{1,3}\}$, $\{y_{1,2}, y_{1,3}\}$.

Доказательство. Заметим сначала, что $d_H(A_i, Y) = \frac{1}{2}$. Пусть $d_1 \in [0, \frac{1}{2}]$. Очевидно (см. рис. 4), что для $j = 2, 3$ справедливо

$$\max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| = |a_1 B_{d_1}(A_1)| = 1 - d_1.$$

Следовательно,

$$d_1 + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| = 2 - d_1 > \frac{3}{2} = S_{\mathcal{A}}(Y).$$

С учетом имеющихся симметрий, получаем аналогичные неравенства для остальных индексов. Значит, по теореме 4, существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и Y ему принадлежит.

По построению, Y совпадает со своим каноническим расширением относительно \mathcal{A} , поэтому является максимальным компактом в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Удаление из компакта Y ровно одной точки сохраняет сумму расстояний до граничных компактов, удаление двух — увеличивает. Поэтому в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ имеется три минимальных компакта Штейнера: $\{y_{1,2}, y_{2,3}\}$, $\{y_{2,3}, y_{1,3}\}$, $\{y_{1,2}, y_{1,3}\}$ и, значит, в этом классе содержится ровно четыре элемента. □

Теперь докажем обобщение теоремы 4.

3.3. Третье условие

В доказательстве третьего условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sum_{i=1}^m d_{KA_i} + \sum_{j=m+1}^n d_{A_j K}$$

Для чисел d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$ и $l \geq 2$, обозначим компакт $\bigcap_{i=1}^l B_{d_i}(A_i)$ через L_{d_1, \dots, d_l} . Заметим, что он может быть пуст; в этом случае определим расстояние до него от любого другого компакта равным ∞ .

Лемма 15. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для некоторых чисел d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$, и компакта K' выполняется

$$\sum_{i=1}^m d_i + \sum_{j=m+1}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{KA_i} = d_i$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{KA_i} = d_i$, $i = 1, \dots, m$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда $K \subset L_{d_1, \dots, d_m}$ и для каждого $j = m+1, \dots, n$ справедливо

$$d_H(A_j, K) \geq d_{A_j K} = \max_{a_j \in A_j} |a_j K| \geq \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}|.$$

Значит,

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sum_{i=1}^m d_{KA_i} + \sum_{j=m+1}^n d_{A_j K} \geq \sum_{i=1}^m d_i + \sum_{j=m+1}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 7. Используя в доказательстве леммы 15 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_i, K) = d_i$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' , для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для каждого набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset$

$\{1, \dots, n\}$ и для любых $d_{i_l} \geq 0$ таких, что $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, выполняется

$$\sum_{l=1}^m d_{i_l} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_{i_1}, \dots, d_{i_m}}| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт, и пусть $d_i := d_H(A_i, K)$. Если хотя бы для одного набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ выполняется $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 15 и следствию 7 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех наборов $\{i_1, \dots, i_m\}$ справедливо $\sum_{l=1}^m d_{i_l} \geq \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то сложив все эти неравенства и поделив на C_{n-1}^{m-1} , получим, что $S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}}(K')$, и что K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенство, то для всех наборов $\{i_1, \dots, i_m\}$ справедливо $\sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$.

Рассмотрим набор $\{i_1, \dots, i_{m+1}\}$, он имеет $m+1$ различных m -элементных подмножеств вида $\{j_1, \dots, j_m\}$, для каждого из которых выполняется равенство $\sum_{l=1}^m d_H(A_{j_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{j_l}, K')$. Сложив все такие равенства и поделив на m , получим равенство $\sum_{l=1}^{m+1} d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^{m+1} d_H(A_{i_l}, K')$, из которого, с учетом $\sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, получаем равенство $d_H(A_{i_{m+1}}, K) = d_H(A_{i_{m+1}}, K')$. Аналогично получаем $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$ для всех i , следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Если числа d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$, таковы, что для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется $A_j \subset B_{d_j} \left(\bigcap_{i=1, i \neq j}^l B_{d_i}(A_i) \right)$, то набор (d_1, \dots, d_l) будем называть *астровектором весов* для границы $\{A_1, \dots, A_l\}$.

Следствие 8. Если для некоторого компакта K выполняется $d_i = d_H(A_i, K)$ для любого $i = 1, \dots, l$, то набор (d_1, \dots, d_l) является астровектором весов для границы $\{A_1, \dots, A_l\}$. Таким образом, в лемме 15 и теореме 6 можно ограничиться астровекторами весов $(d_{i_1}, \dots, d_{i_m})$ для границы $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$.

Следствие 9. Метод, описанный в теоремах 3, 4 и 6, особенно хорошо работает для границ, симметричных относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, поскольку для них перебор наборов индексов длины m сокращается с точностью до симметрии.

4. Некоторые экстремальные свойства симметричных выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$

В данном разделе изучаются экстремальные свойства выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$, обладающих определенной симметрией относительно гиперплоскости. Кроме того, в \mathbb{R}^m рассматривается задача Ферма—Штейнера для частично свободной границы, точки которой принадлежат фиксированным строго выпуклым компактам, и доказывается формула первой вариации длины астросети.

4.1. Свойства симметричных выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$

Пусть π — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m'}$, отделяющая выпуклые компакты A_1, \dots, A_n от компакта A_0 . Для $a \in A_0$ определим функцию $s(a) := \sum_{i=1}^n r_{A_i}(a)$.

Лемма 16. *Во введенных выше обозначениях:*

- 1) функция $s(a)$ непрерывна;
- 2) точка минимума функции $s(a)$ лежит на ∂A_0 ;
- 3) если компакт A_0 — выпуклый, то функция $s(a)$ выпуклая;
- 4) если компакт A_0 — строго выпуклый, то точка минимума функции $s(a)$ единственна.

Доказательство. 1. Следует из непрерывности функций $r_{A_i}(a)$, см. лемму 3.

2. Предположим, что точка минимума a_0 функции $s(a)$ при $a \in A_0$ является внутренней точкой компакта A_0 , то есть лежит в нем вместе с некоторой окрестностью $B_\varepsilon(a_0)$. Пусть l' — прямая, проходящая через a_0 перпендикулярно π . Рассмотрим точку $c_i \in P_{A_i}(a_0)$, она существует по лемме 5. Тогда для точки $a'_0 \in l' \cap B_\varepsilon(a_0)$, взятой между a_0 и гиперплоскостью π , и каждого $i = 1, \dots, n$ верно $|a'_0 c_i| < |a_0 c_i|$ (см. рис. 5). Кроме того, $|a'_0 A_i| \leq |a'_0 c_i|$. Таким образом, $s(a'_0) < s(a_0)$, что противоречит минимальности функции $s(a)$ в точке a_0 . Значит, $a_0 \in \partial A_0$.

3. Следует из выпуклости функций $r_{A_i}(a)$ на выпуклом множестве A_0 , см. следствие 2.

4. Предположим, что точек минимума функции $s(a)$ хотя бы две: a_1 и a_2 . Из выпуклости функции $s(a)$ получаем, что любая точка отрезка $[a_1, a_2]$ является точкой минимума функции $s(a)$. Поскольку компакт A_0 — строго выпуклый, то любая точка из интервала (a_1, a_2) является внутренней точкой A_0 , что противоречит пункту 1. □

Пусть теперь к тому же $n = 2m$, а π_1 — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m'}$, перпендикулярная π и такая, что строго выпуклый компакт A_0 симметричен относительно π_1 , а компакты A_i и A_{m+i} симметричны относительно π_1 для всех $i = 1, \dots, m$ (см. рис. 6).

Лемма 17. *Во введенных выше обозначениях, точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$.*

Доказательство. Предположим, что точка минимума a_0 функции $s(a)$ при $a \in A_0$ не лежит в π_1 . Тогда, в силу имеющихся симметрий, точка a'_0 , симметричная a_0 относительно π_1 , также лежит в A_0 и является точкой минимума $s(a)$. Однако, по лемме 16, точка минимума функции $s(a)$ на строго выпуклом компакте A_0 единственна. Полученное противоречие показывает, что $a_0 \in A_0 \cap \pi_1$. Тогда, по лемме 16, a_0 лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$. \square

Лемма 18. *Во введенных выше обозначениях, если норма в $\mathbb{R}^{m'}$ строго выпуклая, a_0 — точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$, то точки $c_{A_i}(a_0)$ и $c_{A_{m+i}}(a_0)$ симметричны относительно π_1 , $i = 1, \dots, m$.*

Доказательство. Предположим, что $c_{A_i}(a_0)$ и $c_{A_{m+i}}(a_0)$ не симметричны относительно π_1 , и построим точку $c'_i \in A_{m+i}$, симметричную $c_{A_i}(a_0)$ относительно π_1 . В силу имеющихся симметрий, $|a_0 c'_i| = |a_0 A_{m+i}|$, что, по лемме 6, противоречит единственности точки, в которой достигается $|a_0 A_{m+i}|$. \square

Далее рассматриваем случай $m' = 2$. В этом случае π и π_1 являются прямыми, и справедливо следующее утверждение.

Лемма 19. *Пусть в \mathbb{R}^2 даны перпендикулярные прямые l и l_1 , выпуклые компакты A_1, \dots, A_{2m} отделены от строго выпуклого компакта A_0 прямой l , компакт A_0 симметричен относительно l_1 , и компакты A_i и A_{m+i} симметричны относительно l_1 при $i = 1, \dots, m$. Тогда единственной точкой минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ является одна из двух точек множества $\partial A_0 \cap l_1$, ближайшая к точке $l \cap l_1$.*

Доказательство. По лемме 17, точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ лежит в компакте $\partial(A_0 \cap l_1)$, который является отрезком $[a_0, a'_0]$, где точка a_0 ближе к l , чем точка a'_0 . Очевидно, что для каждого $i = 1, \dots, m$ и любой точки $a \in (a_0, a'_0]$ справедливо $|a A_i| = |a c_{A_i}(a)| > |a_0 c_{A_i}(a)| \geq |a_0 c_{A_i}(a_0)| = |a_0 A_i|$. Значит, $s(a) > s(a_0)$ для любой точки $a \in (a_0, a'_0]$, поэтому a_0 и только она является точкой минимума $s(a)$. \square

Пусть теперь компакт A_0 является образом гомотетии $H_{b_0}^d$ некоторого строго выпуклого, симметричного относительно l_1 компакта B_0 , отделенного прямой l от A_1, \dots, A_{2m} , где $b_0 \in l_1 \cap B_0$ — центр гомотетии, а

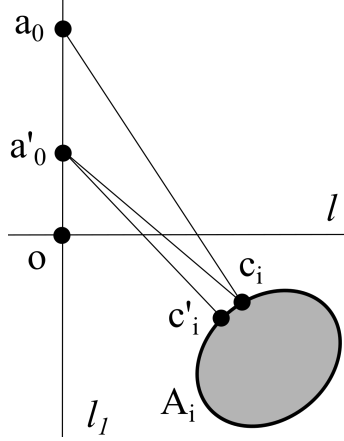


Рис. 5. К лемме 16.

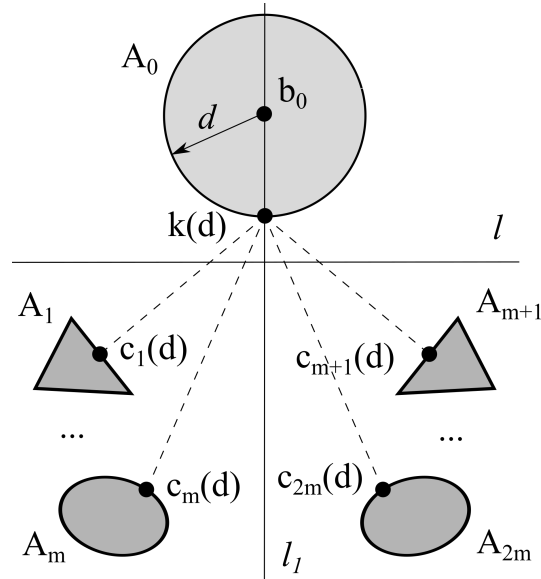


Рис. 6. К следствию 10.

$d \geq 0$ — коэффициент. Пусть $d_0 > 0$ — такое число, при котором $H_{b_0}^{d_0}(B_0)$ касается l . Для $d \in [0, d_0)$ определим функцию

$$\tilde{s}(d) := \min_{k \in H_{b_0}^d(B_0)} s(k).$$

По лемме 19, для каждого $d \in [0, d_0)$ точкой минимума функции $\tilde{s}(d)$ является одна из двух точек множества $\partial H_{b_0}^d(B_0) \cap l_1$, ближайшая к точке $l \cap l_1$. Обозначим эту точку через $k(d)$. Значит, $\tilde{s}(d) = s(k(d))$, и из непрерывности зависимости $k = k(d)$ и непрерывности функции $s(k)$ следует непрерывность $\tilde{s}(d)$. Аналогично показывается непрерывность функций $r_i(d) := r_{A_i}(k(d))$. Произвольную точку из $P_{A_i}(d)$ будем обозначать через $c_i(d)$.

Лемма 20. *Во введенных выше обозначениях, функции $\tilde{s}(d)$ и $r_i(d)$, $i = 1, \dots, n$, строго монотонно убывают при $d \in [0, d_0)$.*

Доказательство. Заметим, что при увеличении d точка $k(d)$ движется по l_1 по направлению от b_0 к ортогональной проекции A_i на прямую l , но не достигает ее ни для одного i . Таким образом, при $0 \leq d_1 < d_2 < d_0$ для каждого i справедливо $r_i(d_1) = |k(d_1)c_i(d_1)| > |k(d_2)c_i(d_1)| \geq |k(d_2)c_i(d_2)| = r_i(d_2)$. Значит, функция $r_i(d)$ строго монотонно убывает, поэтому $\tilde{s}(d)$ — тоже. \square

Разработанная теория позволяет аналогичным образом получить следующий результат.

Следствие 10. *Во введенных выше обозначениях, если $A_0 = B_d(b_0)$ (см. рис. 6), то функция*

$$\bar{s}(d) := \min_{k \in B_d(b_0)} s(k)$$

и $r_i(d) := r_{A_i}(k(d))$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны и строго монотонно убывают при $d \in [0, |b_0 l|)$.

4.2. Задача Ферма—Штейнера для частично свободной границы в \mathbb{R}^m

Считаем, что в \mathbb{R}^m задана евклидова метрика. Докажем формулу первой вариации длины астросети с частично свободной границей, у которой каждая граничная вершина a_i выбирается среди точек выпуклого компакта A_i , $i = 1, \dots, n$. Напомним, что если метрическая проекция точки k на компакт A одноточечная, то ее единственный элемент обозначаем через $c_A(k)$.

Лемма 21 (формула первой вариации длины астросети с граничными вершинами, лежащими в выпуклых компактах). *Пусть в \mathbb{R}^m с евклидовой метрикой даны выпуклые компакты A_1, \dots, A_n , и пусть k — точка, не лежащая ни в одном A_i . Тогда функция $s(k) := \sum_{i=1}^n r_{A_i}(k)$ дифференцируема по направлениям в точке k и ее производная в направлении \vec{v} равна*

$$\frac{\partial s(k)}{\partial v} = (\vec{n}, \vec{v}),$$

где \vec{n} — сумма единичных направляющих векторов отрезков $c_{A_i}(k)k$.

Доказательство. По лемме 8, если точка k не лежит ни в одном A_i , то функция $s(k)$ дифференцируема по направлениям, и справедливо равенство

$$\frac{\partial s(k)}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_{A_i}(k)}{\partial v} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{e_{c_{A_i}(k)k}}, \vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{e_{c_{A_i}(k)k}}, \vec{v} \right) = (\vec{n}, \vec{v}).$$

□

Пусть в \mathbb{R}^2 с евклидовой метрикой даны выпуклый компакт K и луч ob , лежащий на не пересекающейся с K прямой l . На внутренних точках луча ob определим функцию $\alpha(a) := \angle oac_K(a)$.

Лемма 22. *Функция $\alpha(a)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) *непрерывна;*
- 2) *если $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$ при $a_1 \neq a_2$, то $\alpha(a) = \alpha(a_1)$ при $a \in [a_1, a_2]$, и $[c_K(a_1), c_K(a_2)] \subset \partial K$;*
- 3) *монотонно убывает при удалении a от o к b , причем если K — строго выпуклый, то $\alpha(a)$ строго монотонно убывает.*

Доказательство. 1. Вектор \vec{ab} невырожден и непрерывно зависит от a , направляющий вектор $\vec{e_{ao}}$ неподвижен. Вектор $\vec{ac_K(a)}$, по лемме 7, непрерывно зависит от a . Поэтому $\cos(\angle oac_K(a))$ как функция a также непрерывен, следовательно, непрерывна и $\alpha(a)$.

2. Рассмотрим два случая расположения метрических проекций точек a_1 и a_2 , $a_1 \neq a_2$. Если $c_K(a_1) = c_K(a_2)$, то, поскольку $c_K(a_1)$ не лежит на прямой a_1a_2 , направления $\vec{a_1c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2c_K(a_2)}$ различны, поэтому $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$.

Если же $c_K(a_1) \neq c_K(a_2)$, то для каждого $i = 1, 2$ построим прямую l_i , перпендикулярную $a_i c_K(a_i)$ в точке $c_K(a_i)$. Поскольку компакт K — выпуклый, то прямые l_i являются опорными для K . Действительно, без ограничения общности предположим, что прямой l_1 принадлежит внутренняя точка k_1 компакта K , тогда в ее достаточно малой окрестности, пересекающейся с открытой полуплоскостью, ограниченной прямой l_1 и содержащей точку a_1 , существует точка $k'_1 \in K$. Поскольку компакт K — выпуклый, то в нем лежит и отрезок $[c_K(a_1), k'_1]$, на котором есть точки, более близкие к a_1 , чем точка $c_K(a_1)$, что противоречит определению метрической проекции.

Условие $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$ означает, что отрезки $a_1 c_K(a_1)$ и $a_2 c_K(a_2)$ параллельны. Тогда l_1 и l_2 либо параллельны, либо совпадают. Поскольку компакт K лежит в открытой полуплоскости относительно прямой $a_1 a_2$, то векторы $\vec{a_1c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2c_K(a_2)}$ направлены внутрь этой полуплоскости и не могут иметь противоположные направления. Значит, $\vec{a_1c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2c_K(a_2)}$ сонаправлены. Предположим, что l_1 и l_2 параллельны. Как показано выше, для каждого $i = 1, 2$ компакт K касается l_i и лежит в полуплоскости Π_i относительно l_i , не содержащей точки a_i . Одна из полуплоскостей содержится в другой, без ограничения общности, $\Pi_1 \subset \Pi_2$, тогда существуют точки компакта K , лежащие по разные стороны от l_1 , что противоречит тому, что l_1 является опорной для K .

Значит, прямые l_1 и l_2 совпадают, поэтому в ∂K содержится отрезок $[c_K(a_1), c_K(a_2)]$ (и, следовательно, компакт K — нестрого выпуклый). Тогда для каждой точки $c \in [c_K(a_1), c_K(a_2)]$ существует точка

$a \in [a_1, a_2]$, для которой $c = c_K(a)$. Действительно, построим a на пересечении l с прямой, проходящей через c параллельно $a_1 c_K(a_1)$. При этом $\alpha(a) = \alpha(a_1)$ для любой точки $a \in [a_1, a_2]$.

3. По пункту 1, функция $\alpha(a)$ непрерывна, поэтому если она имеет локальный экстремум в точке a_0 , то в некоторой его окрестности существуют точки $a_1 \neq a_2$ такие, что a_0 принадлежит интервалу (a_1, a_2) , в которых функция принимает одинаковые значения, отличные от $\alpha(a_0)$. Тогда, по пункту 2, $\alpha(a_0) = \alpha(a_1)$, что противоречит тому, что a_0 — точка локального экстремума. Следовательно, $\alpha(a)$ монотонна. При движении a по лучу от точки o значение $\max_{k \in K} \angle oak$ стремится к нулю, при этом $0 < \alpha(a) \leq \max_{k \in K} \angle oak$. Значит, $\alpha(a)$ монотонно убывает при удалении a от o к b .

Если компакт K — строго выпуклый, то рассмотрим $a_1 \neq a_2$. Если $c_K(a_1) \neq c_K(a_2)$, то, по пункту 2, из того, что $[c_K(a_1), c_K(a_2)] \not\subset \partial K$, следует, что $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Если $c_K(a_1) = c_K(a_2)$, то также $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Значит, функция $\alpha(a)$ строго монотонно убывает при удалении a от o к b .

□

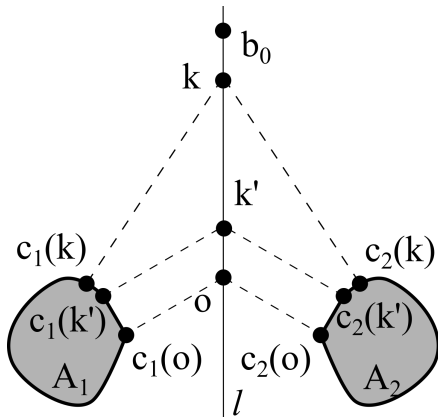


Рис. 7. К лемме 23.

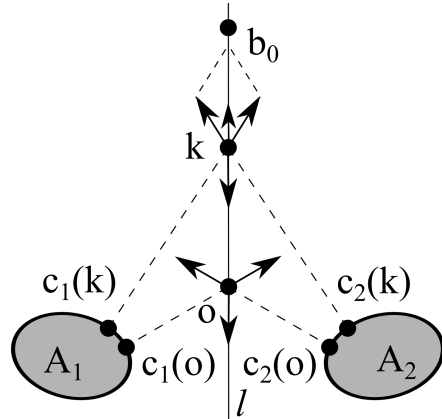


Рис. 8. К лемме 23.

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 23. Пусть на \mathbb{R}^2 даны выпуклые компакты A_1 и A_2 , симметричные относительно прямой l и не пересекающиеся с ней, и точки o и b_0 на l такие, что $\angle c_{A_1}(o)ob_0 = \frac{2\pi}{3}$ и $\angle c_{A_1}(b_0)b_0o < \frac{\pi}{3}$. Пусть компакт A_0 равен $\{b_0\}$. Пусть также k' — ближайшая к b_0 точка отрезка $[o, b_0]$,

для которой выполняется $\angle c_{A_1}(k')k'b_0 = \frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 7). Тогда функция $s(k) := \sum_{i=0}^2 r_{A_i}(k)$ на отрезке $[o, b_0]$ обладает следующими свойствами:

- 1) строго монотонно возрастает при движении k от k' к b_0 ;
- 2) достигает минимума на отрезке $[o, k']$.

Доказательство. 1. По лемме 22, для любой точки $k \in (k', b_0]$ выполняется $\angle c_{A_1}(k)ko < \frac{\pi}{3}$. Поскольку вектор $\overrightarrow{e_{c_{A_1}(k)k}} + \overrightarrow{e_{c_{A_2}(k)k}}$ лежит на l , а его длина больше длины вектора $\overrightarrow{e_{c_{A_0}(k)k}} = \overrightarrow{e_{b_0k}}$, который тоже лежит на l и противоположен сумме, то вектор \vec{n} в точке k сонаправлен с \vec{v} (см. рис. 8). Отсюда $(\vec{n}, \vec{v}) > 0$, а по лемме 21, $\frac{\partial s(k)}{\partial v} = (\vec{n}, \vec{v})$, поэтому $s(k)$ строго монотонно возрастает при движении k от k' к b_0 .

2. Если $k' \neq o$, то для любой точки $k \in [o, k']$, по лемме 22, верно $\angle c_{A_1}(k)kb_0 = \frac{2\pi}{3}$, поэтому в каждой такой точке k выполняется $\vec{n} = 0$. Значит, по лемме 21, функция $s(k)$ постоянна на $[o, k']$. По пункту 1 доказываемого утверждения, $s(k)$ возрастает при удалении от k' к b_0 , поэтому каждая точка из отрезка $[o, k']$ является точкой минимума $s(k)$ на отрезке $[o, b_0]$. \square

5. Задача Ферма—Штейнера для границ в $H(\mathbb{R}^2)$, полученных некоторыми деформациями вершин правильного треугольника

В данном разделе мы найдем решение задачи Ферма—Штейнера для некоторых трехэлементных границ, инвариантных относительно группы своих симметрий, элементы которых являются выпуклыми симметричными с некоторыми дополнительными ограничениями. Для таких границ будет применена теория из разделов 2.4, 3.1 и 4.2.

5.1. Общий случай симметричного выпуклого граничного компакта с to -подмножеством, пересекающим ось симметрии

Пусть в \mathbb{R}^2 на прямой l_1 лежат точки b_1, z_1, o так, что $z_1 \in (b_1, o)$, причем точное расположение z_1 мы определим позднее. Поворотом прямой l_1 и точек b_1, z_1 относительно точки o на угол $-\frac{2\pi}{3}(i-1)$ получим прямую l_i и точки b_i, z_i , $i = 2, 3$. Пусть l'_i — прямая, перпендикулярная прямой l_i в точке o , $i = 1, 2, 3$.

Пусть A_1 — выпуклый компакт, состоящий более чем из одной точки, симметричный относительно прямой l_1 , не пересекающийся с прямыми

l'_2 и l'_3 и такой, что выполняется

$$\sup_{a_1 \in A_1} |a_1 z_1| = |b_1 z_1|.$$

Пусть A_i — компакт, получившийся из A_1 поворотом относительно o на угол $-\frac{2\pi}{3}(i-1)$, $i = 2, 3$. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ (см. рис. 9).

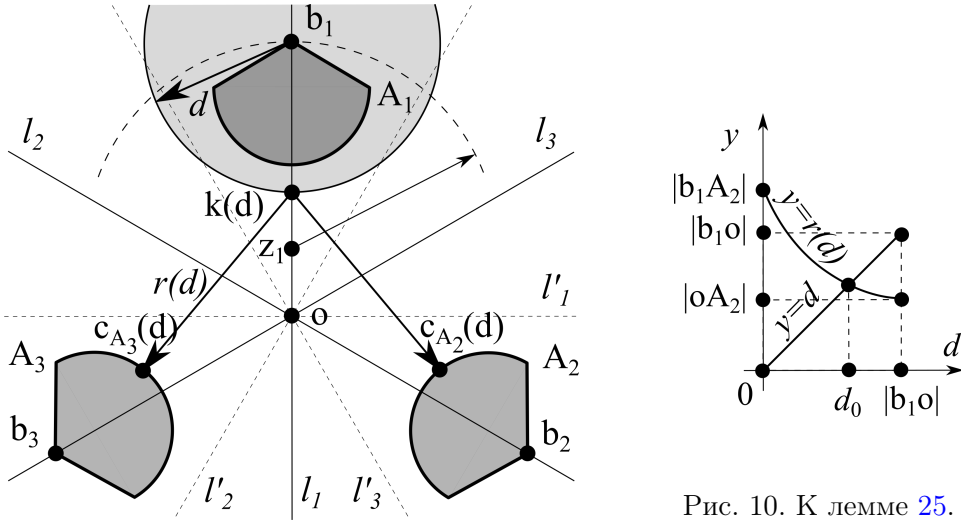


Рис. 9. Граница \mathcal{A} .

При $d \in (0, |b_1 o|)$ круг $B_d(b_1)$ отделен прямой l'_1 от компактов A_2 и A_3 , поэтому из леммы 19 следует, что единственной точкой минимума функции $s(k) = |kA_2| + |kA_3|$ при $k \in B_d(b_1)$ является одна из двух точек множества $\partial B_d(b_1) \cap l_1$, ближайшая к точке o ; обозначим эту точку минимума через $k(d)$. В силу выпуклости A_i , евклидовости метрики и леммы 6, верно следующее утверждение.

Лемма 24. *Существует единственная точка $c_{A_i}(d) \in A_i$ такая, что $|k(d)c_{A_i}(d)| = |k(d)A_i|$.*

Для удобства, положим $r(d) := r_2(d) = r_3(d)$ и докажем следующее свойство.

Лемма 25. *Существует единственное значение d_0 такое, что $d_0 = r(d_0)$.*

Доказательство. Тождественная функция d , очевидно, непрерывна и строго монотонно возрастает при $d \in [0, |b_1 o|]$, принимая все значения

из отрезка $[0, |b_1o|]$. По лемме 3, функция $r(d)$ непрерывна. По следствию 2, $r(d)$ является выпуклой на l , поэтому монотонно убывает при $d \in [0, |b_1o|]$. Следовательно, $r(d)$ принимает все значения из отрезка $[|oA_2|, |b_1A_2|]$. Поскольку $|b_1o| = |b_2o| \geq |oA_2|$, то области значений функций d и $r(d)$ пересекаются, поэтому существует единственное значение d_0 такое, что $d_0 = r(d_0)$ (см. рис. 10). □

Для удобства, положим $z_1 := k(d_0)$, $c_{21} := c_{A_2}(d_0)$ и $c_{31} := c_{A_3}(d_0)$. Поворотом точек z_1, c_{21}, c_{31} относительно точки o на угол $-\frac{2\pi}{3}$ построим точки z_2, c_{32}, c_{13} соответственно, а поворотом на угол $-\frac{2\pi}{3}$ — точки z_3, c_{23}, c_{12} соответственно (при этом точки c_{ij} и c_{ik} , принадлежащие одному A_i , могут совпасть, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$). По построению, эти точки обладают свойством $|b_i z_i| = |c_{ji} z_i| = d_0$ для всех $i = 1, 2, 3$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. Пусть $Z := \{z_1, z_2, z_3\}$; очевидно, что он переходит в себя при повороте относительно o на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 11).

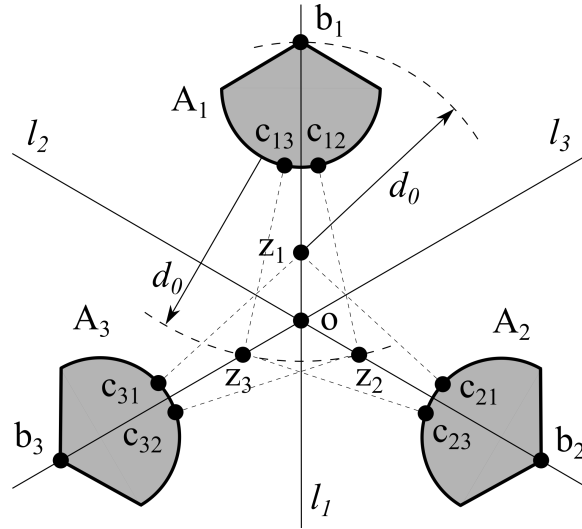


Рис. 11. Компакт $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Определим функцию $s_1(d) := d + 2r(d)$, из определений и доказанного ранее следует, что

$$s_1(d) = d + \min_{k \in B_d(b_1)} (|kA_2| + |kA_3|).$$

Поскольку $\angle b_1 o c_{A_i}(|b_1 o|) = \frac{2\pi}{3}$, $i = 2, 3$, то, по лемме 23, функция $s_1(d)$ достигает минимума при $d = |b_1 o|$, постоянна на отрезке $[d', |b_1 o|]$, где

d' — наименьшее значение, при котором $\angle_{c_{A_2}}(k(d'))k(d')o = \frac{\pi}{3}$, и строго монотонно убывает при $d \in [0, d']$. Далее предполагаем также, что граница \mathcal{A} такова, что $z_1 \in [k(d'), b_1]$.

Теорема 7. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A} :

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}}$ равняется $3d_0$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A})$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$;
- 3) Z является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Поскольку A_1 лежит вместе с z_1 в одной полуплоскости относительно l_2 , а с z_3 — в разных, и точки z_1 и z_3 симметричны относительно l_2 , то для любой точки $a_1 \in A_1$ выполняется неравенство $|a_1 z_1| < |a_1 z_3|$. Аналогично, $|a_1 z_1| < |a_1 z_2|$. Тогда

$$\sup_{a_1 \in A_1} |a_1 Z| = \sup_{a_1 \in A_1} |a_1 z_1| = |b_1 z_1| = d_0.$$

В силу имеющихся симметрий, выполняется

$$\sup_{z \in Z} |z A_1| = \max\{|z_1 A_1|, |z_2 A_1|, |z_3 A_1|\} = |c_{12} z_2| = |c_{13} z_3| = d_0.$$

Тогда, по определению, $d_H(A_1, Z) = \max\{|b_1 z_1|, |c_{12} z_2|\} = d_0$. В силу имеющихся симметрий, $S_{\mathcal{A}}(Z) = 3d_0$.

Как показано ранее, $s_1(d)$ строго монотонно убывает при $d \in [0, d_0]$, при этом $d_0 = d_H(A_1, Z)$ и $s_1(d_0) = 3d_0 = S_{\mathcal{A}}(Z)$, значит, при $d_1 \in [0, d_0]$ выполняется

$$d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} (|k A_2| + |k A_3|) = s_1(d_1) > S_{\mathcal{A}}(Z).$$

С учетом имеющихся симметрий получаем аналогичные неравенства для $d_i \in [0, d_0]$, $i = 2, 3$, $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$:

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} (|k A_j| + |k A_l|) = s_1(d_i) > S_{\mathcal{A}}(Z).$$

Таким образом, граница \mathcal{A} удовлетворяет условиям теоремы 3, следовательно, существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и Z ему принадлежит. Значит, $S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}}(Z) = 3d_0$. Удаление из Z хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера.

Теорема доказана. □

Следствие 11. По теореме 1, максимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} из теоремы 7 является компакт $K_{\bar{d}} = B_{d_0}(A_1) \cap B_{d_0}(A_2) \cap B_{d_0}(A_3)$, а любой астрокомпакт Штейнера K удовлетворяет включению $Z \subset K \subset K_{\bar{d}}$. Поскольку все z_i различны, то $K_{\bar{d}}$ имеет мощность континуума, поэтому $\Sigma(\mathcal{A})$ содержит континуум элементов.

Следствие 12. Для границы \mathcal{A} описанного вида справедливо $b_i \in \text{to}_K(A_i)$ для каждого $K \in \Sigma(\mathcal{A})$.

5.2. Непрерывные 1-параметрические деформации границы с последующими деформациями других видов

В этом разделе мы рассмотрим некоторые выпуклые 1-параметрические деформации трехэлементных границ, в каждой из которых нулевое значение параметра соответствует границе, состоящей из одноточечных компактов, расположенных в вершинах правильного треугольника $\Delta a_1 a_2 a_3$ с центром o и радиусом описанной окружности 1. Мы явным образом построим астрокомпакты Штейнера для этих границ, а также изучим деформации с помощью редукции и перехода к порождающим границам. Необходимые определения и результаты см. в разделе 2.4.

5.2.1. Раздутие в круги и деформация с помощью редукции

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ, для которой изучим деформации граничных компактов, полученные с помощью теории редукции и не увеличивающие длину минимальной астроросети.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_r^\circ = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = B_r(a_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $r \in (0, \frac{1}{2})$ — параметр.

Пусть $b_i \in A_i$ — точка, наиболее удаленная от o . Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = \frac{3(1+r)}{3+4r}$. Положим $Z_{\min}^r := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 12).

Теорема 8. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_r° при $r \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) длина астроросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ равняется $\frac{9(1+r)}{3+4r}$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_r^\circ)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\bar{d} = (d_0, d_0, d_0)$, где $d_0 = \frac{3(1+r)}{3+4r}$;
- 3) Z_{\min}^r является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;

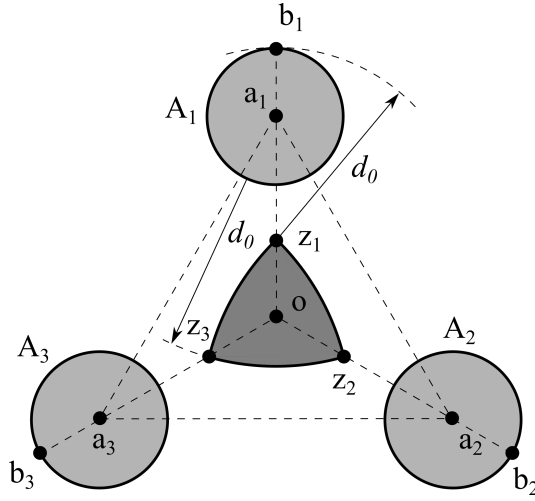


Рис. 12. Граница \mathcal{A}_r° и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

4) $Z_{\max}^r := \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0+r}(a_i)$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $r \in (0, \frac{1}{2})$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z'_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az'_i| = |b_iz'_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $\angle oz_1c_{A_2}(z_1) = \angle oz_1a_2 < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_r° удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$, $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_iA_j| = |z'_ic_{ji}|$. Несложно заметить, что в случае, когда A_j — круги, верно $c_{ji} = \partial A_j \cap [z'_i, a_j]$. Поэтому равенство $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ эквивалентно $|a_iz'_i| + r = |a_jz'_i| - r$, $i \neq j$. Положим $|oz'_i| = x$, тогда $\angle a_ico_i = \frac{2\pi}{3}$ и, по теореме косинусов, равенство $|a_iz'_i| + r = |a_jz'_i| - r$ эквивалентно

$$1 + r - x = \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{3}} - r.$$

Единственным решением этого уравнения относительно x является $x = \frac{4r(1+r)}{3+4r}$. Обозначим $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ через $d_0 = d_0(r)$, тогда $d_0(r) = 1 + r - x(r) = \frac{3(1+r)}{3+4r}$. Следовательно, точки z_i являются искомыми.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^r , множество $\Sigma(\mathcal{A}_r^\circ)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\bar{d} = (d_0, d_0, d_0)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^r) = d_0$ и $S_{\mathcal{A}_r^\circ} = 3d_0 = \frac{9(1+r)}{3+4r}$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\bar{d}}(\mathcal{A}_r^\circ) = \cap_{i=1}^3 B_{d_0}(A_i)$, который совпадает с $\cap_{i=1}^3 B_{d_0+r}(a_i)$. \square

Изучим поведение $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ при деформации $r \in (0, \frac{1}{2})$. Из непрерывности функции $d_0(r)$ непосредственной проверкой получаем следующий результат.

Лемма 26. *Функция $d_0(r) = \frac{3(1+r)}{3+4r}$ строго монотонно убывает при $r \in [0, \frac{1}{2}]$, принимая все значения из отрезка $[\frac{9}{10}, 1]$.*

Следствие 13. *Функция $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ строго монотонно убывает при $r \in (0, \frac{1}{2})$, принимая все значения из отрезка $(\frac{27}{10}, 3)$.*

Теперь изучим возможные деформации границы \mathcal{A}_r° с неувеличением длины минимальной астросети Штейнера относительно астрокомпакта Штейнера Z_{\min}^r . Построим открытые множества $F_i := U_{d_0}(z_i) \setminus (B_{d_0}(z_j) \cup B_{d_0}(z_k))$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. рис. 13). Как показано ранее, для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|b_i z_i| = |c_{ji} z_i| = d_0$.

Лемма 27. *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_r° при $r \in (0, \frac{1}{2})$:*

- 1) *редукцией $R_{Z_{\min}^r}(A_i)$ является $\{c_{ij}, c_{ik}, b_i\}$, а Z_{\min}^r -облаком компакта A_i является F_i , где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$;*
- 2) *граница \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта Z_{\min}^r .*

Доказательство. Для удобства обозначим $K := Z_{\min}^r$. Тогда $\text{to}_{A_i}(K) = \{z_j, z_k\}$, $\text{from}_K(A_i) = \{c_{ij}, c_{ik}\}$ и $\text{to}_K(A_i) = \{b_i\}$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Значит, $R_K(A_i) = \{c_{ij}, c_{ik}, b_i\}$, а множество F_i является K -облаком компакта A_i .

Сравним длины $|z_i c_{ij}|$ и d_0 . Непосредственными вычислениями по теореме косинусов находим $\cos \angle z_j a_i o = \frac{3+6r+2r^2}{3+6r+4r^2}$, откуда

$$|z_i c_{ij}|^2 = \frac{3(1+r)^2(9-18r-36r^2+48r^3+64r^4)}{(3+4r)^2(3+6r+4r^2)}.$$

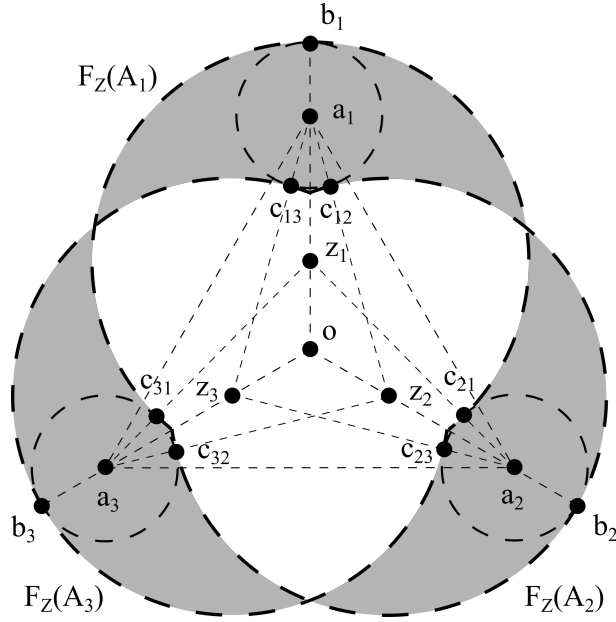


Рис. 13. Z -облака границы \mathcal{A}_r° для $Z = Z_{\min}^r$.

Решая неравенство $|z_i c_{ij}|^2 < d_0^2$ при $r > 0$, получаем, что $r \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Таким образом, при $r \in (0, \frac{1}{2})$ выполняется $|z_i c_{ij}| < d_0$, то есть $\{z_i\} \subset U_{d_0}(\{c_{ij}, c_{ik}\})$. Поскольку к тому же $K \setminus \text{to}_{A_i}(K) = \{z_i\}$, то, по определению, \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта K . \square

Определим границу $\mathcal{B}_r = \{B_1, B_2, B_3\}$ так, что $\{c_{ij}, c_{ik}, b_i\} \subset B_i \subset F_i$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Теорема 9. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_r при $r \in (0, \frac{1}{2})$ выполняется $S_{\mathcal{B}_r} \leq S_{\mathcal{A}_r^\circ}$.

Доказательство. По построению и пункту 1 лемме 27, граница \mathcal{B}_r является Z_{\min}^r -деформацией границы \mathcal{A}_r° . По пункту 2 леммы 27, граница \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта Z_{\min}^r . Значит, согласно теореме 2, выполняется $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{A}_r^\circ}$. \square

Аналогично можно рассмотреть деформации относительно максимального астрокомпакта Штейнера (см. рис. 14) и любого промежуточного; в общем случае деформации, построенные относительно различных астрокомпактов Штейнера, различны.

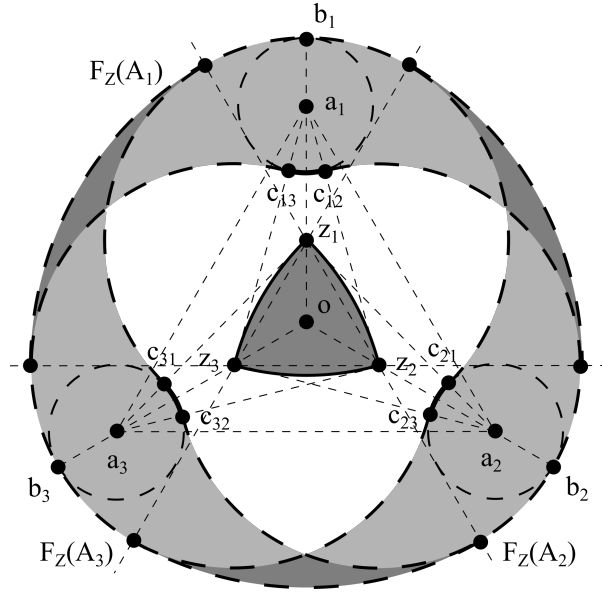


Рис. 14. Z -облака границы \mathcal{A}_r^o для $Z = Z_{\max}^r$.

5.2.2. Растяжение в отрезки вдоль осей симметрии и переход к порождающему подмножеству

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ и продемонстрируем, как работает следствие 4 при переходе к порождающим подмножествам выпуклых граничных элементов. Выпуклая и порождающая границы будут иметь одинаковую длину минимальной астросети и, более того, совпадающие множества астрокомпактов Штейнера.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_t^- = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = [b_i, c_i]$ — отрезок на луче oa_i длины $2t$ с серединой в точке a_i , причем $c_i \in [a_i, o]$, $i = 1, 2, 3$, где $t \in (0, 1)$ — параметр.

Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = \frac{t^2+3}{t+3}$. Положим $Z_{\min}^t := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 15).

Теорема 10. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_t^- при $t \in (0, 1)$:

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_t^-}$ равняется $\frac{3(t^2+3)}{t+3}$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^-)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\bar{d} = (d_0, d_0, d_0)$, где $d_0 = \frac{t^2+3}{t+3}$;

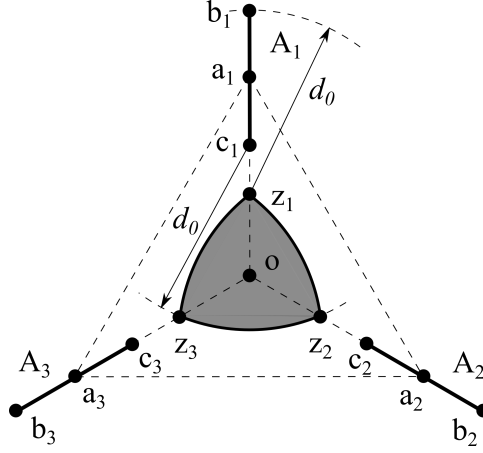


Рис. 15. Граница \mathcal{A}_t^- и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) $Z_{\max}^t := \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(c_i)$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $t \in (0, 1)$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az_i| = |b_iz_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $c_{A_2}(z_1) = c_2$ и $\angle oz_1c_2 < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_t^- удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ (здесь и далее $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$). По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_iA_j| = |z'_ic_{ji}|$. Несложно заметить, что в случае, когда A_j — отрезки, задающие угол $\angle c_joz_i = \angle b_joz_i = \frac{2\pi}{3}$, верно $c_{ji} = c_j$. Поэтому равенство $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ эквивалентно $|a_iz'_i| + t = |c_jz'_i|$. Положим $|oz'_i| = x$, тогда $\angle a_ico_i = \frac{2\pi}{3}$ и, по теореме косинусов, равенство $|a_iz'_i| + t = |c_jz'_i|$ эквивалентно

$$(1 + t - x)^2 = (1 - t)^2 + x^2 - 2(1 - t)x \cos \frac{2\pi}{3}.$$

Единственным решением этого уравнения относительно x является $x(t) = \frac{4t}{3+t}$. Обозначим $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ через $d_0 = d_0(t)$, тогда $d_0(t) = 1 + t - x(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$. Следовательно, точки z_i являются искомыми.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^t , множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^-)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\bar{d} = (d_0, d_0, d_0)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^t) = d_0$ и $S_{\mathcal{A}_t^-} = 3d_0 = \frac{3(t^2+3)}{t+3}$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\bar{d}}(\mathcal{A}_t^-) = \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(A_i)$, который совпадает с $\bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(c_i)$. \square

Изучим поведение $S_{\mathcal{A}_t^-}$ при деформации $t \in (0, 1)$. Из непрерывности функции $d_0(t)$ непосредственной проверкой получаем следующий результат.

Лемма 28. *Функция $d_0(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$ строго монотонно убывает при $t \in [0, 2\sqrt{3} - 3]$ и строго монотонно возрастает при $t \in [2\sqrt{3} - 3, 1]$, принимая все значения из отрезка $[4\sqrt{3} - 6, 1]$.*

Следствие 14. *Функция $S_{\mathcal{A}_t^-}$ строго монотонно убывает при $t \in (0, 2\sqrt{3} - 3]$ и строго монотонно возрастает при $t \in [2\sqrt{3} - 3, 1)$, принимая все значения из отрезка $[12\sqrt{3} - 18, 3)$.*

Рассмотрим границу $\mathcal{B}_t^- = \{B_1, B_2, B_3\}$, где $B_i = \{b_i, c_i\}$, точки взяты из элементов границы \mathcal{A}_t^- .

Теорема 11. *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_t^- при $t \in (0, 1)$ верны равенства $S_{\mathcal{B}_t^-} = S_{\mathcal{A}_t^-}$ и, более того, $\Sigma(\mathcal{B}_t^-) = \Sigma(\mathcal{A}_t^-)$.*

Доказательство. Поскольку $A_i = \text{conv}(B_i)$, то граница \mathcal{B}_t^- является порождающей для \mathcal{A}_t^- . Тогда, по следствию 4, $S_{\mathcal{A}_t^-} \leq S_{\mathcal{B}_t^-}$. Кроме того, заметим, что $S_{\mathcal{B}_t^-}(Z_{\min}^t) = S_{\mathcal{A}_t^-}(Z_{\min}^t)$, поэтому $S_{\mathcal{B}_t^-} = S_{\mathcal{A}_t^-}$ и Z_{\min}^t является астрокомпактом Штейнера для границы \mathcal{B}_t^- . Удаление из Z_{\min}^t хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z_{\min}^t является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{B}_t^- .

Поскольку максимальный астрокомпакт Штейнера для границы \mathcal{A}_t^- задается только точками c_i и расстоянием d_0 , то он является максимальным и для границы \mathcal{B}_t^- , поэтому $\Sigma(\mathcal{B}_t^-) = \Sigma(\mathcal{A}_t^-)$. \square

5.2.3. Раздутие в правильные треугольники и переход к порождающему подмножеству

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ, сохраняющее длину минимальной астросети, и продемонстрируем, как работает следствие 4 при переходе к порождающим подмножествам выпуклых граничных элементов. В отличие от прошлого раздела, множество астрокомпактов Штейнера для порождающей границы строго содержится в множестве астрокомпактов Штейнера для выпуклой границы. Кроме того, максимальный астрокомпакт Штейнера не будет выпуклой оболочкой минимального астрокомпакта Штейнера.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_t^\Delta = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что A_i — это правильный треугольник $\Delta b_i c_{ij} c_{ik}$ радиуса описанной окружности t с центром в точке a_i , причем $a_i \in [b_i, o]$ и $|c_{ij} b_j| < |c_{ik} b_j|$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, где $t \in (0, \frac{1}{2})$ — параметр.

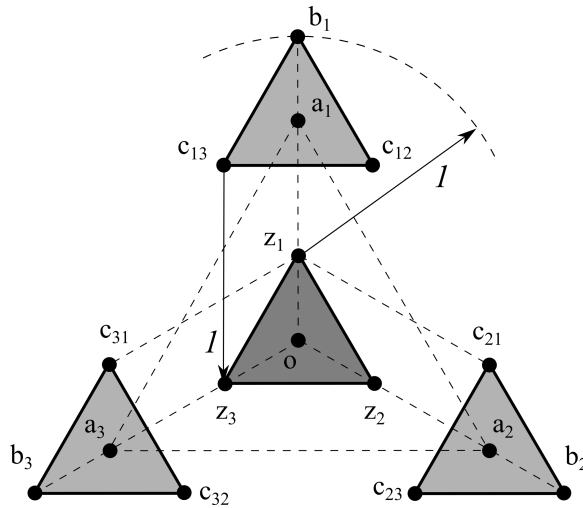


Рис. 16. Граница \mathcal{A}_t^Δ и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = 1$. Положим $Z_{\min}^t := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 16).

Теорема 12. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_t^Δ при $t \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_t^\Delta}$ равняется 3;

- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\bar{d} = (1, 1, 1)$;
- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) $Z_{\max}^t := \Delta z_1 z_2 z_3$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $t \in (0, \frac{1}{2})$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az_i| = |b_i z_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $c_{A_2}(z_1) = c_{21}$ и $\angle oz_1 c_{21} = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_t^Δ удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ (здесь и далее $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$). По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_i A_j| = |z'_i c_{ji}|$. При $z'_i = z_i$ выполняется $|z'_i b_i| = 1 = |z'_i c_{ji}|$, в то время как при $z'_i \in (o, z_i)$ верно $|z'_i b_i| > |z_i b_i| = |z_i c_{ji}| > |z'_i c_{ji}|$, а при $z'_i \in (z_i, b_i)$ верно $|z'_i b_i| < |z_i b_i| = |z_i c_{ji}| < |z'_i c_{ji}|$. Следовательно, точки z_i являются искомыми, и величина $|b_i z_i| = |z_i A_j|$ равна 1.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^t , множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\bar{d} = (1, 1, 1)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^t) = 1$ и $S_{\mathcal{A}_t^\Delta} = 3$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\bar{d}}(\mathcal{A}_t^\Delta) = \bigcap_{i=1}^3 B_1(A_i)$, который совпадает с $\Delta z_1 z_2 z_3$. □

Рассмотрим границу $\mathcal{B}_t^\Delta = \{B_1, B_2, B_3\}$, где $B_i = \{b_i, c_{ij}, c_{ik}\}$, точки взяты из элементов границы \mathcal{A}_t^Δ , $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Построим компакт $Y_{\max}^t := \bigcap_{i=1}^3 B_1(\{c_{ij}, c_{ik}\})$ (см. рис. 17).

Теорема 13. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_t^Δ при $t \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) справедливо $S_{\mathcal{B}_t^\Delta} = S_{\mathcal{A}_t^\Delta} = 3$;

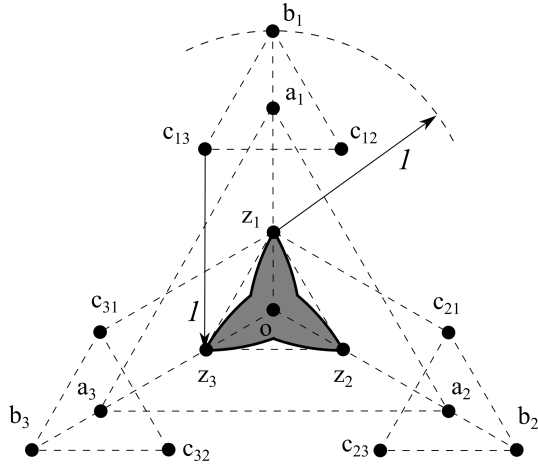


Рис. 17. Граница \mathcal{B}_t^Δ и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный Y_{\max}^t (закрашен темно-серым).

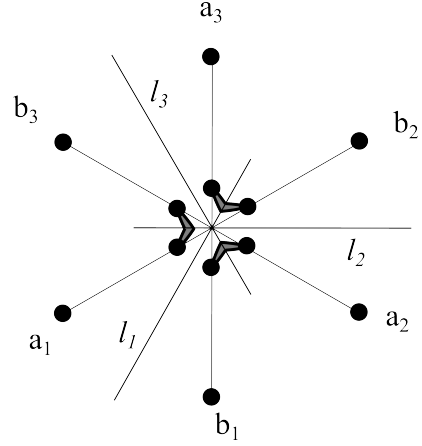


Рис. 18. Граница \mathcal{A}^* .

- 2) множество $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\bar{d} = (1, 1, 1)$, причем $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta) \subsetneq \Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$;
- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) Y_{\max}^t является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Поскольку $A_i = \text{conv}(B_i)$, то граница \mathcal{B}_t^Δ является порождающей для \mathcal{A}_t^Δ . Тогда, по следствию 4, $S_{\mathcal{A}_t^\Delta} \leq S_{\mathcal{B}_t^\Delta}$. Кроме того, заметим, что $S_{\mathcal{B}_t^\Delta}(Z_{\min}^t) = S_{\mathcal{A}_t^\Delta}(Z_{\min}^t)$, поэтому $S_{\mathcal{B}_t^\Delta} = S_{\mathcal{A}_t^\Delta}$ и Z_{\min}^t является астрокомпактом Штейнера для границы \mathcal{B}_t^Δ . Удаление из Z_{\min}^t хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z_{\min}^t является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{B}_t^Δ .

Максимальный астрокомпакт Штейнера Y_{\max}^t для границы \mathcal{B}_r^Δ равен $B_1(B_1) \cap B_1(B_2) \cap B_1(B_3)$ и задается точками c_{ji} , $j \neq i$, в отличие от Z_{\max}^t , поэтому содержится в Z_{\max}^t . При этом $Y_{\max}^t \neq Z_{\max}^t$, поскольку

для любой точки $y \in (z_j, z_k)$ выполняется $|yB_i| = \min\{|yc_{ij}|, |yc_{ik}|\} > 1$. Отсюда верно $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta) \subsetneq \Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$. □

Следствие 15. *Границу \mathcal{B}_t^Δ можно рассматривать как объединение трех дубликатов одноточечной границы $\{a_1, a_2, a_3\}$. В данном случае длина минимальной астросети сохраняется и равна длине минимальной астросети для $\{a_1, a_2, a_3\}$, то есть 3. Однако, как было показано в [2], такое выполняется не всегда: существует граница $\mathcal{A}^* = \{A_1, A_2, A_3\}$, являющаяся объединением двух дубликатов одноточечной границы $\{a_1, a_2, a_3\}$, для которой длина минимальной астросети меньше 3. Для этой границы $A_i = \{a_i, b_i\}$, $i = 1, 2, 3$, точки b_i получены из a_i поворотом вокруг o на $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 18).*

Кроме того, класс $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta)$ инвариантен относительно группы симметрий границы \mathcal{B}_t^Δ , в отличие от каждого отдельного взятого класса решений для границы \mathcal{A}^* .

Список литературы

- [1] Тропин А. М., “Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:2 (2021), 81–107.
- [2] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590.
- [3] Балашов М. В., “Условие Липшица метрической проекции в гильбертовом пространстве”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:1 (2018), 13–29.
- [4] Демьянов В. Ф., Васильев Л. В., *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, Москва, 1981, 384 с.

Sufficient conditions for minimality of star networks in hyperspaces

Tropin A.M.

The Fermat–Steiner problem is to find a point in the metric space Y such that the sum of the distances from it to the points of some finite fixed subset $A \subset Y$, called the boundary, is minimal. We will call the minimal sum of distances the length of the minimum astronnet. We consider this problem in the hyperspace $Y = H(X)$ of nonempty, closed and bounded subsets of the proper metric space X ; moreover, the Hausdorff metric is introduced on $H(X)$. Since X is proper space, all elements of $H(X)$ are compact. Each solution of the Fermat–Steiner problem will be called the Steiner astrocompact; its set is divided into

classes with equal weight, each of which corresponds to its own vector of distances to the boundary compact sets.

In this article, we prove three sufficient conditions for the given compact set to be a Steiner astrocompact for a given boundary. Also, these conditions guarantee the uniqueness of the class of Steiner astrocompact spaces with equal weight. This theory is used to completely solve the Fermat–Steiner problem for some symmetric convex three-element boundaries in \mathbb{R}^2 , and this is demonstrated by examples.

Keywords: Fermat-Steiner problem, star network, minimal astronot, Steiner astrocompact, hyperspace, Hausdorff distance, metric projection, point-to-set distance function, first variation.

References

- [1] Tropin, A. M., “An estimate for the length of a minimal parametric network in hyperspaces under deformation of the boundary set”, *Intelligent Systems*, **25:2** (2021), 81–107 (In Russian)
- [2] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590
- [3] Balashov M. V., “Lipschitz condition for metric projection in Hilbert space”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **22:1** (2018), 13–29 (In Russian)
- [4] Demyanov V. F., Vasilyev L. V., *Non-differentiable optimization*, Science, Moscow, 1981 (In Russian), 384 c.

Часть 2.
Специальные вопросы теории
интеллектуальных систем

Тестирование неповторных функций в элементарном базисе, расширенном всеми поляризуемыми слабоповторными функциями

А. А. Вороненко¹

Д. В. Кафтан²

В работе доказано, что в базисе, состоящем из элементарного и всех поляризуемых слабоповторных функций, функция Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы не превышает $3n - 2$.

Ключевые слова: неповторная функция, проверяющее тестирование, слабоповторные функции.

В статье без определения используются базовые понятия дискретной математики (см., например, [1]) и пионерской работы [2]. В работе [2] был введен аппарат канонических деревьев — однозначное представление неповторных функций для задач тестирования.

Множество n -мерных булевых наборов T называется *тестом относительно неповторной альтернативы* [2] в базисе B для неповторной в том базисе функции $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от всех переменных, если для любой отличной от f неповторной в базисе B функции $h(x_1, \dots, x_n)$ существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in T$, такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

¹Вороненко Андрей Анатольевич — профессор кафедры математической кибернетики ВМК МГУ, д.ф.-м.н., e-mail: dmb@cs.msu.ru.

Voronenko Andrey Anatolievich — professor, DR, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

²Кафтан Дарья Владимировна — инженер 1 категории лаборатории дискретных управляющих систем и их приложений ВМК МГУ, e-mail: blond.programmist@gmail.com.

Kaftan Daria Vladimirovna — first category engineer, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

Слабоповторные функции с точностью до конгруэнтности и взятия отрицаний были описаны в работе [3]:

$$\begin{aligned}
 f_d^s &= x_1(\bar{x}_2 \vee x_3 x_4 \dots x_s) \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_s, & s \geq 3, \\
 f_t^s &= x_1 x_2 \dots x_s \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_s, & s \geq 2, \\
 f_m^s &= x_1(x_2 \vee \dots \vee x_s) \vee x_2 x_3 \dots x_s, & s \geq 3, \\
 f_4 &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_4, \\
 f_5 &= x_1(x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_5(x_2 x_3 \vee x_4).
 \end{aligned}$$

Функция Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы в элементарном базисе, дополненном f_t^s , равна $\Theta(n^s)$ [4]. В работе [5] в теоремах 1 и 2 было доказано, что в любом базисе, получающемся из элементарного добавлением специальной функции, данная функция Шеннона растет линейно. При добавлении функции f_m^s она не превосходит $(s+2)n$. Для элементарного базиса в работе [6] была получена верхняя оценка длины функции Шеннона — $2n+1$.

Назовем для краткости *специальными* функции f_4, f_5 и f_m^s . Через B^+ обозначим базис, получаемый добавлением к конъюнкции и дизъюнкции всех специальных функций. Обозначим $B = B^+ \cup \{\neg\}$. Обозначим через $T(n)$ функцию Шеннона для длины теста относительно неповторной альтернативы в базисе B , а через $T^+(n)$ — для длины проверяющего теста в базисе B^+ .

Лемма 1. *Справедливо неравенство $T(n) \leq T^+(n) + 2n$.*

Доказательство. Задача тестирования относительно неповторной альтернативы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в базисе B сводится к проверяющему тестированию в базисе B^+ функции, получаемой из f заменой антимонотонных переменных на их отрицания. При этом требуется для каждой переменной добавить пару соседних по ней наборов, на которых функция принимает различные значения.

Лемма доказана. □

Каноническим деревом функции $f(x_1, \dots, x_n)$, неповторной в базисе B^+ , назовем [5] помеченное корневое дерево, построенное согласно следующим правилам.

- 1) Листья дерева помечены переменными x_1, \dots, x_n . Разные листья помечены разными переменными.
- 2) Внутренние вершины дерева соответствуют подформулам неповторной формулы и помечены функциями из множества $\{\vee, \&\}$ или специальной функцией.

- 3) Если специальная функция — f_4 , то над вершиной находятся четыре инцидентных ребра, пронумерованных $(1, 2, 3, 4)$. Канонические деревья, получаемые с помощью перестановки ребер $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ над вершинами, помеченными f_4 , считаются эквивалентными.
- 4) Если специальная функция — f_5 , то над вершиной находятся пять инцидентных ребер, пронумерованных $(1, 2, 3, 4, 5)$. Канонические деревья, полученные с помощью группы перестановок, порождаемых перестановками ребер $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ над вершинами, помеченными f_5 , считаются эквивалентными.
- 5) Если специальная функция — f_m^s , то над вершиной находятся s инцидентных ребер с выделенным при $s \geq 4$ первым ребром.
- 6) Над вершиной, помеченной \vee или $\&$, расположено не менее двух смежных вершин.
- 7) Вершины, помеченные функцией \vee ($\&$), не смежны с вершинами, помеченными функцией \vee ($\&$).

Каноническое дерево D реализует функцию f естественным образом. Единственность канонического дерева была обоснована в работах [5, 7].

В работе [5] были доказаны лемма 2 и леммы 4–6. Утверждения были доказаны для базисов, состоящих из конъюнкции, дизъюнкции и одной специальной функции. Дословным повторением этих доказательств с учетом двойственных случаев обосновываются леммы 2 и 3.

Лемма 2. Пусть неповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_2, z_{k+2}, \dots, z_n)$ существенно зависит от $n - k + 1 \geq 2$ переменных ($k \geq 2$), и лист ее канонического дерева, который помечен переменной z_1 , смежен с вершиной u , помеченной конъюнкцией (дизъюнкцией) или специальной функцией, а лист, помеченный z_2 , лежит в каком-то другом поддереве над u . Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1 \vee \dots \vee x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ($h(x_1 \& \dots \& x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$). Пусть $h(z_1, z_2, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = z_1 \& z_2$ ($z_1 \vee z_2$). Тогда тест T' , содержащий наборы теста T функции $f|_{x_k=0}$ ($f|_{x_k=1}$) с добавленными компонентами $x_k = 0$ ($x_k = 1$) и наборами из строки 1 (строки 2) таблицы 1 является проверяющим тестом для функции f на множестве всех неповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.

Лемма 3. Пусть дана специальная функция g размерности s и пусть неповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_{s+1}, \dots, z_n)$ существенно зависит от $n - s + 1$ переменных, где $n > s$, и лист, который помечен переменной z_1 , входит в вершину u , помеченную дизъюнкцией (конъюнкцией) или любой специальной функцией.

Таблица 1. Подстановка $f|_{x_1=\alpha}$ для вершины v

№	Пометка v	α	Изменение дерева	Наборы для теста
1	$x_1 \vee \dots \vee x_k$	0	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(1, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$ $f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$
2	$x_1 \& \dots \& x_k$	1	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(0, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$ $f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$
3	f_4	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_3(x_2 \vee x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 1, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0$
4	f_4	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_3 x_4$	$f(0, 0, 1, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 1, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1$
5	f_5	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_5(x_2 \vee x_3 x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 0, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 1, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 0, 1, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
6	f_5	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_4(x_3 \vee x_5)$	$f(0, 1, 1, 1, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 1, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 0, 0, 1, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
7	f_m^s	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \& \dots \& x_s$	$f(1, 0, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(1, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(1, 0, 1, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $\dots,$ $f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1$
8	f_m^s	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee \dots \vee x_s$	$f(0, 1, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1,$ $f(0, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $f(0, 1, 0, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0,$ $0,$ $\dots,$ $f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0$

Пусть функция f зависит от переменных x_1, \dots, x_n , и для f и h выполнены следующие равенства:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g(x_1, \dots, x_s), x_{s+1}, \dots, x_n),$$

$$h(z_1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = z_1.$$

Тогда тест T' , содержащий наборы теста T функции $f|_{x_1=0}$ ($f|_{x_1=1}$) с добавлением компоненты $x_1 = 0$ ($x_1 = 1$), и наборов из таблицы 1, является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.

Теорема 1. *Справедливо неравенство:*

$$T^+(n) \leq 3n - 4 \text{ при } n \geq 2$$

Доказательство. Мы построим тест T_A для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, применяя последовательно леммы 2 и 3. Длина теста T_A только увеличится, если все пометки f_4 заменить на f_m^4 , а пометки f_5 заменить на f_m^5 в дереве функции f . Поэтому $|T_A(f(x_1, \dots, x_n))| \leq F_A(u_1, \dots, u_l)$, где u_1, \dots, u_l — набор натуральных чисел, определяемый степенями захода вершин дерева. Каждой вершине, помеченной дизъюнкцией или конъюнкцией, соответствует набор из $t - 1$ единиц, где t — степень захода вершины, а каждой вершине, помеченной специальной функцией — число $t - 1$. При этом получается, что $u_1 + \dots + u_l = n - 1$.

Функционал F_A обладает следующими свойствами:

- 1) $F_A(1, u_2, \dots, u_l) = F_A(u_2, u_3, \dots, u_l) + 2$; при этом $F_A(1) = 2$.
- 2) $F_A(u_1, u_2, \dots, u_l) = F_A(\underbrace{1, \dots, 1}_{u_1-1}, u_2, \dots, u_l) + u_1 + 1$.

Из этих свойств следует:

$$F_A(u_1 + u_2, \dots, u_l) = F_A(u_1, u_2, \dots, u_l) + 1.$$

Поэтому

$$\max_{u_1 + \dots + u_l = n-1} F_A(u_1, \dots, u_l) = F_A(n-1),$$

$$F_A(n-1) = n + F_A(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}) \leq n + 2(n-2) = 3n - 4.$$

□

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$T(n) \leq 3n - 2 \text{ при } n \geq 2$$

Таблица 2. Наборы, на которых показывается существенность x_1

№	Значение подфункции $f_{x_1=\alpha}$	Значение из M_n
1	$f(0, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = (0 \vee \dots \vee 0) \& 1 = 0$	$f(1, 0, \dots, 0, 1, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 1$
2	$f(1, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = (1 \& \dots \& 1) \vee 0 = 1$	$f(0, 1, \dots, 1, 0, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n) = 0$
3	$f(0, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = f_4(0, 1, 0, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, 0, \beta_5, \dots, \beta_n) = 1$
4	$f(1, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = f_4(1, 1, 0, 1) = 1$	$f(0, 1, 0, 1, \beta_5, \dots, \beta_n) = 0$
5	$f(0, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = f_5(0, 1, 0, 0, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \dots, \beta_n) = 1$
6	$f(1, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = f_5(1, 1, 0, 0, 1) = 1$	$f(0, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \dots, \beta_n) = 0$
7	$f(0, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n) = f_m^s(0, 1, 0, \dots, 0) = 0$	$f(1, 1, 0, \dots, 0, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 1$
8	$f(1, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n) = f_m^s(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$	$f(0, 0, 1, \dots, 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = 0$

Доказательство. По теореме 1 и лемме 1 при $n \geq 2$ справедливо неравенство $T(n) \leq 5n - 4$.

Не ограничивая общности рассуждений, можем считать тестируемую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ монотонной. При этом обозначим M_n, \dots, M_2 множества наборов, добавляемые на каждом шаге алгоритма теоремы 1 в тест функции f , а через M_1 — полный тест для функции последней переменной. Заметим, что $M_n \cup \dots \cup M_2 = T_A$.

Докажем от противного, что множество $M_n \cup \dots \cup M_1$ — тест относительно неповторной альтернативы для функции f . Предположим, что $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция с минимальным числом аргументов, для которой это не так. Тогда $M_{n-1} \cup \dots \cup M_1$ — тест для $f_{x_1=\alpha}$.

Таблица 2 показывает существенность и монотонность переменной x_1 во всех возможных случаях. Множество наборов $M_n \cup \dots \cup M_1$ содержит по построению T_A — проверяющий тест для функции f в базисе B^+ . Так как $x_1 = \alpha$ — незабывающая подстановка для f , то $M_{n-1} \cup \dots \cup M_1$ показывает существенность оставшихся переменных. То есть $M_n \cup \dots \cup M_1$ является тестом для функции f . Противоречие. При этом

$$|M_n \cup \dots \cup M_1| \leq |T_A| + |M_1| \leq 3n - 2.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

- [1] Алексеев В.Б., *Лекции по дискретной математике*, М.: ИНФРА-М, Москва, 2012.
- [2] Вороненко А.А., “О проверяющих тестах для неповторных функций”, *Математические вопросы кибернетики*, 2002, № 11, 163–176.
- [3] Стеценко В.А., “О предплохих базисах в P_2 ”, *Математические вопросы кибернетики*, 4 (1992), 139–177.
- [4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, 132:1 (2014), 63–77.
- [5] Кафтан Д.В., “Тестирование неповторных функций в некоторых расширенных элементарных базисах”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2021, № 3, 13–19.
- [6] Чистиков Д.В., “Тестирование неповторных функций в элементарном базисе”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2011, № 4, 37–40.
- [7] Кафтан Д.В., “Древесное представление неповторных функций в расширенных элементарных базисах”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, 3:43 (2017), 37–49.

Testing read-once functions in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions Voronenko A.A., Kaftan D.V.

It is proved that the Shannon function for the test length with respect to a read-once alternative in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions does not exceed $3n - 2$.

Keywords: read-once functions, checking test, weakly read-multiple functions.

References

- [1] Alekseev V.B., *Lekcii po diskretnoj matematike*, INFRA-M, Moscow, 2012 (In Russian).
- [2] Voronenko A.A., “O proveryayushchih testah dlya bespovtornyh funkcij”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, 2002, № 11, 165–176 (In Russian).
- [3] Stecenko V.A., “O predplokih bazisah v P_2 ”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, 4 (1992), 139–177 (In Russian).
- [4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, 132:1 (2014), 63–77.
- [5] Kaftan D.V., “Testirovanie bespovtornyh funkcij v nekotoryh rasshirenyh elementarnyh bazisah (to be translated)”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, № 3, 13–19 (In Russian).

- [6] Chistikov D.V., “Testing read-once functions over the elementary basis”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **35**:4 (2011), 189–192.
- [7] Kaftan D.V., “On tree representation of read-once functions in extended elementary bases”, *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki.*, **3**:43 (2017), 37–49.

Проблема типовой встречи для автоматов в лабиринтах

Г. Д. Килибарда¹

В статье рассматривается один специальный тип взаимодействия коллективов автоматов в лабиринтах. Для данного класса лабиринтов решается, относительно всех типов коллективов автоматов, следующая проблема: для каких пар типов существуют коллектив первого типа и коллектив второго типа такие, что если их в начальный момент поместить в любые две вершины любого лабиринта из данного класса лабиринтов, то они обязательно когда-то встретятся. Эту проблему называем проблемой типовой встречи (type meeting) для автоматов в данном классе лабиринтов. Здесь эта задача полностью решена как для случая класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, так и для случая класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов. В случае класса всех (конечных и бесконечных) плоских мозаичных лабиринтов для некоторых пар типов коллективов проблема типовой встречи пока остается открытой, а в случае класса всех плоских прямоугольных лабиринтов она все еще является полностью неисследованной.

Ключевые слова: коллектив автоматов, тип коллектива автоматов, плоский прямоугольный лабиринт, плоский мозаичный лабиринт, типовая встреча.

1. Введение

Рассматриваемые в настоящей статье лабиринты лежат в плоскости, и любой из их “коридоров” параллелен или x -оси, или y -оси; назовем эти лабиринты плоскими прямоугольными лабиринтами. В первой части статьи рассматриваются плоские прямоугольные лабиринты, у которых все “коридоры” (ребра) единичной длины; эти лабиринты назовем плоскими мозаичными лабиринтами. В лабиринтах этих типов будем рассматривать коллективы автоматов с камнями.

Камни являются специальным типом неразрушимых “мобильных” вершинных маркеров. Каждый автомат коллектива видит только камни, располагающиеся в вершине, в которой он оказался в текущий момент времени; он может взять некоторые из этих камней и положить их в вершину, в которой он оказывается в следующий момент дискретного времени. Конечно, такое поведение автомата (то есть, со сколькими и какими

¹ *Килибарда Горан* — доктор математических наук, профессор Факультета бизнеса и права «МБ» университета, e-mail: gkilibar@gmail.com.

Kilibarda Goran — professor, “MB” University, Faculty of Business and Law, Belgrade.

камнями он проделывает эту операцию) зависит от его “входной информации”. Мы также предполагаем, что сами по себе камни не двигаются и что в данный момент любой камень может быть передвинут только одним из видящих его автоматов. Количество камней в таком коллективе конечно и в течение времени не меняется. В настоящей статье камень моделируем специальным типом автомата с одним состоянием. Данный коллектив автоматов является коллективом автоматов типа (r, s) , если содержит r автоматов и s камней.

Любой автомат такого коллектива, оказавшись в момент t в вершине x некоторого прямоугольного лабиринта и находясь в состоянии q , двигается в направлении ω вдоль одного из “коридоров”, выходящих из x (очевидно, для ω возможны только 4 различных значения), и в момент $t + 1$ переходит в состояние q' и в вершину x' , которая является концом выбранного “коридора” (как выше сказано, он также может передвинуть $n \geq 0$ камней из x в x'). Значение ω , q' и проделанная операция с камнями зависит от q и от “входной информации” в момент t для рассматриваемого автомата, которая включает в себя следующую информацию: какие из других автоматов данного коллектива оказались в x в момент t и какие у них состояния в тот момент; какие камни (или как вариант — только количество камней) рассматриваемый автомат видит в момент t и какое есть множество направлений “коридоров”, выходящих из x .

В общем случае, один из вариантов проблемы, которую мы здесь рассматриваем, может быть описан следующим способом. Пусть \mathcal{L} — класс лабиринтов, и (r, s) — некоторый тип коллектива автоматов. Говорим, что тип (r, s) решает проблему типовой встречи для автоматов в классе \mathcal{L} , если существуют коллективы автоматов \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 типа (r, s) такие, что для любого $L \in \mathcal{L}$ и любых вершин x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, лабиринта L , коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , положенные в момент 0 соответственно в вершины x_1 и x_2 (т.е., в момент 0, любой из автоматов коллектива \mathcal{A}_1 помещается в вершину x_1 , а любой из автоматов коллектива \mathcal{A}_1 в вершину x_2), встречаются в какой-то момент t (т.е., в момент t хотя бы один из автоматов коллектива \mathcal{A}_1 и хотя бы один из автоматов коллектива \mathcal{A}_2 оказываются в одной и той же вершине лабиринта \mathcal{L}). Наша задача состоит в том, чтобы для некоторых классов прямоугольных лабиринтов вычислить какие типы коллективов автоматов решают проблему типовой встречи для автоматов в этих классов лабиринтов.

Проблема типовой встречи для автоматов, так как она здесь описана, впервые представлена в [1]. Однако анонсированный там, а потом и в статьях [2] и [3], результат является не совсем точным.

2. Некоторые основные понятия, обозначения и результаты теории автоматов в лабиринтах

Сначала уточним, как мы будем употреблять некоторые обозначения и термины, которыми будем пользоваться.

Множество всех подмножеств [непустых подмножеств] множества X обозначаем через $\mathcal{P}(X)$ [$\mathcal{P}_0(X)$]. Пусть X_1, \dots, X_n — некоторые множества. Для любых $1 \leq i \leq n$, через pr_i обозначим проекцию прямого произведения $X_1 \times \dots \times X_n$ на X_i .

Через A^* обозначим множество всех слов в алфавите A , через A^+ — множество всех непустых слов из A^* и через Λ — пустое слово.

Простым орграфом назовем орграф без петель и кратных дуг. Для любой дуги (x, y) данного простого орграфа, дуга (y, x) , если она существует, называется противоположной для дуги (x, y) , а пара (множество) дуг (x, y) и (y, x) , в обозначении $\langle x, y \rangle$, называется парой противоположных дуг или ребром данного простого орграфа. Простой орграф называется симметричным, если для любой его дуги существует противоположная.

Пусть

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

— ортонормированный базис n -мерного евклидова пространства \mathbf{R}^n . Положим, что

$$\mathfrak{D}_n = \{-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}.$$

В случае, когда $n = 2$, вместо обозначений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_1$ и $-\varepsilon_2$ используем, соответственно, обозначения $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}$ и \mathbf{s} (элементы $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{w}$ и \mathbf{s} множества \mathfrak{D}_2 интерпретируем также как части света: восток, север, запад и юг соответственно).

Определим на \mathfrak{D}_n унарную операцию \cdot^{-1} , такую что $\omega^{-1} = \bar{\omega} = -\omega$ для любого $\omega \in \mathfrak{D}_n$. Расширим область определения операции \cdot^{-1} на множество \mathfrak{D}_n^* следующим способом: если $\alpha = \omega_1 \dots \omega_n \in \mathfrak{D}_n^+$, то $\alpha^{-1} = \omega_n^{-1} \dots \omega_1^{-1}$, а также положим, что $\Lambda^{-1} = \Lambda$.

Связный симметричный простой орграф с разметкой дуг (L, f) , $L = (V, E)$, где V — множество его вершин, E — множество его дуг и $f: E \rightarrow \mathfrak{D}_n$ — разметка дуг орграфа L , называется n -мерным лабиринтом (или просто n -лабиринтом), если $f[(y, x)] = (f[(x, y)])^{-1}$ для любой дуги $(x, y) \in E$, и если $f(u) \neq f(v)$ для любых дуг $u, v \in E$, $u \neq v$, удовлетворяющих условию $\text{pr}_1(u) = \text{pr}_1(v)$.

Пусть $|u|_L = f(u)$ для любого $u \in E$. Также, для любой вершины $x \in V$, пусть $[x]_L = \{|u|_L \mid u \in E \text{ и } \text{pr}_1(u) = x\}$. Когда ясно из контекста, о каком n -лабиринте L идет речь, вместо $|u|_L$ и $[x]_L$ мы пишем $|u|$ и $[x]$

соответственно. Добавим к \mathfrak{D}_n новый элемент, который обозначим через $\mathbf{0}$, и расширим область определения отображения f на упорядоченные пары (x, x) , $x \in V$, таким образом, что $|(x, x)| = \mathbf{0}$ для любого $x \in V$.

Далее, всегда опускаем символ f в обозначении n -лабиринта (L, f) предполагая, что в любом конкретном случае разметка f определена. Иногда множество вершин и множество дуг n -лабиринта L обозначаем через $V(L)$ и $E(L)$ соответственно. Если множество $V(L)$ конечно, то n -лабиринт L называется *конечным*; в противоположном случае L называется *бесконечным*. В дальнейшем все n -лабиринты являются конечными, если не сказано иначе.

Пусть L — некоторый n -лабиринт. Для любого маршрута ρ в L , определим слово $|\rho|$ следующим способом: если $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ для некоторого $n \geq 1$, тогда $|\rho| = |e_1| \dots |e_n|$; если ρ — нуль-маршрут (содержащий только одну вершину), тогда $|\rho| = \Lambda$. Для любых $x \in V(L)$ и $\alpha \in \mathfrak{D}_n^*$, если в L существует маршрут ρ , у которого x начальная вершина и $|\rho| = \alpha$, тогда через $(x\alpha)_L$ или через $x\alpha$ (когда из контекста ясно, о каком n -лабиринте L идет речь) обозначим конечную вершину от ρ . Значит, $x\Lambda = x$ для любого $x \in V(L)$.

Если $\rho_1 = x_0, e_1, x_1, \dots, e_m, x_m$ и $\rho_2 = y_0, e'_1, y_1, \dots, e'_n, y_n$ — два маршрута в L и $y_0 = x_m$, то через $\rho_1 + \rho_2$ обозначим маршрут

$$x_0, e_1, x_1, \dots, e_m, x_m, e'_1, y_1, \dots, e'_n, y_n.$$

Пусть L — некоторый n -лабиринт и x — некоторая его вершина. Для любых слов $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{D}_n^*$, если существует вершина $x\alpha_2$ и существует вершина $x' \in V(L)$ такая, что $x = x'\alpha_1$, тогда через $\overline{\alpha_1 x \alpha_2}$ обозначим маршрут ρ , у которого x' начальная вершина и $|\rho| = \alpha_1 \alpha_2$.

Заменяя любую пару противоположных дуг n -лабиринта L на соответствующее ребро, получим граф $G(L)$; ребро в $G(L)$, соответствующее паре противоположных дуг (x, y) и (y, x) из L , обозначим через $\langle x, y \rangle$ или $\langle y, x \rangle$. n -лабиринт L является *деревом*, если граф $G(L)$ — дерево. n -лабиринт L называется *змеевидным*, если граф $G(L)$ — дерево, у которого все вершины степени ≤ 2 . n -лабиринт L называется *циклическим*, если $G(L)$ — граф, у которого все вершины степени 2.

Пусть ρ — маршрут в n -лабиринте L . Маршрут ρ называется *древовидным*, если подграф графа $G(L)$, определенный всеми вершинами лабиринта L , через которые проходит этот маршрут, и всеми ребрами $\langle x, y \rangle$ такими, что хотя бы одна из дуг (x, y) и (y, x) принадлежит маршруту ρ , является деревом.

В n -лабиринте L можем выделить вершину x' [две различные вершины x' и x''] в роли *входа* [в роли *входа* и *выхода* соответственно]. Обозначим факт, что L является n -лабиринтом с входом x' [с входом x' и выходом x''] через $(L; x')$ (или через $(V(L), E(L); x')$) [$(L; x', x'')$ (или

через $(V(L), E(L); x', x'')$). Назовем n -лабиринт с входом (и возможно с выходом) 1-инициальным n -лабиринтом. Если L — 1-инициальный n -лабиринт с входом x' и выходом x'' , тогда через L^{-1} обозначим тот же самый лабиринт, но с входом x'' и выходом x' .

Обобщим понятие 1-инициального n -лабиринта. Фиксируем целое число $m \geq 1$. Пусть L — некоторый n -лабиринт, пусть $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in [V(L)]^m$, и пусть $x_1 \in V(L)$ — вершина в L такая, что $x_1 \neq x_i^{(0)}$ для всех $1 \leq i \leq m$. Упорядоченная пара $(L; \vec{x}_0)$ [тройка $(L; \vec{x}_0, x_1)$] называется m -инициальным n -лабиринтом L с входом \vec{x}_0 [входом \vec{x}_0 и выходом x_1]. В случае, особенно когда не важно точно указать на вход лабиринта L или если из контекста ясно, какой точно вход у L , мы иногда просто говорим, что L — *инициальный n -лабиринт* (n -лабиринт, имеющий вход) или L — *инициальный n -лабиринт с валентностью m* , где m — длина кортежа, являющегося входом. Из-за краткости иногда обозначаем $(L; \vec{x}_0)$ через $L_{\vec{x}_0}$.

В m -инициальном n -лабиринте L вход и выход (если существует) иногда обозначаем через $x_s(L)$ и $x_f(L)$ соответственно.

Пусть M и N , $M \neq N$, — некоторые точки пространства \mathbf{R}^n . Через \overline{MN} обозначим отрезок, концами которого являются данные точки, а через $|\overline{MN}|$ — длину этого отрезка. Вектор \overrightarrow{MN} идет в направлении ε_i [$-\varepsilon_i$] ($1 \leq i \leq n$), если $\overline{MN} = \alpha \varepsilon_i$ [$\overline{MN} = -\alpha \varepsilon_i$] для некоторого $\alpha > 0$.

Множество отрезков T в плоскости \mathbf{R}^n называется *конфигурацией (отрезков)*, если для любых двух отрезков из T может существовать только одна общая точка, и при этом если она существует, то она является концевой для обоих отрезков.

n -лабиринт $L = (V, E)$, $V \subseteq \mathbf{R}^n$, называется *прямоугольным*, если:

- 1) множество $T = \{\overline{xy} \mid (x, y) \in E\}$ является конфигурацией;
- 2) вектор \overrightarrow{xy} идет в направлении $|(x, y)|$ для любой дуги $(x, y) \in E$;
- 3) $|B \cap V| < +\infty$ для любого открытого шара B в \mathbf{R}^n .

Если L прямоугольный n -лабиринт и при этом $|\overline{xy}| = 1$ для любой дуги $(x, y) \in E(L)$, то L называется *мозаичным n -лабиринтом*. Более того, мозаичный n -лабиринт M является *шахматным n -лабиринтом*, если для любых $x, y \in V(M)$ из $|\overline{xy}| = 1$ следует, что $(x, y) \in E(M)$.

В случае, когда $n = 2$, прямоугольный, мозаичный или шахматный n -лабиринт называем соответственно *плоским прямоугольным*, *плоским мозаичным* или *плоским шахматным лабиринтом*.

Для любого прямоугольного n -лабиринта L , множество

$$\bar{L} = \bigcup_{(x,y) \in E(L)} \overline{xy}$$

является его (геометрической) реализацией. Прямоугольный n -лабиринт L называется *ограниченным*, если $\text{diam } \bar{L} < +\infty$; в противном случае, он называется *неограниченным*. Очевидно, что прямоугольный n -лабиринт L является неограниченным тогда и только тогда, когда он является бесконечным.

n -лабиринты L_1 и L_2 называются *изоморфными*, $L_1 \cong L_2$, если существует биекция $g: V(L_1) \rightarrow V(L_2)$, такая, что:

- (1) g является изоморфизмом L_1 и L_2 как простых орграфов с разметками дуг, т.е. $(x, y) \in E(L_1)$ тогда и только тогда, когда $(g(x), g(y)) \in E(L_2)$ для любых $x, y \in V(L_1)$, и когда $|(x, y)|_{L_1} = |(g(x), g(y))|_{L_2}$ для любых $(x, y) \in E(L_1)$;
- (2) если у одного из n -лабиринтов вход [вход и выход], то и у другого из них вход (вход и выход) и $x_s(L_2) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$ [$x_s(L_2) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$ и $x_f(L_2) = g[x_f(L_1)]$], где $x_s(L_1) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция g называется *изоморфизмом* лабиринтов L_1 и L_2 . Множество всех n -лабиринтов изоморфных n -лабиринту L обозначается через $[L]$.

Прямоугольный [мозаичный] m -инициальный n -лабиринт L , $m \geq 1$, с выходом $x_1 \in V(L)$ называется *регулярным* [правильным], если существует неограниченный прямоугольный [мозаичный] n -лабиринт L_1 такой, что $\bar{L} \cap \bar{L}_1 = \{x_1\}$ и $x_1 \in V(L_1)$. Рис. 1 дает реализацию некоторого правильного мозаичного 2-лабиринта с входом x_0 и выходом x_1 .

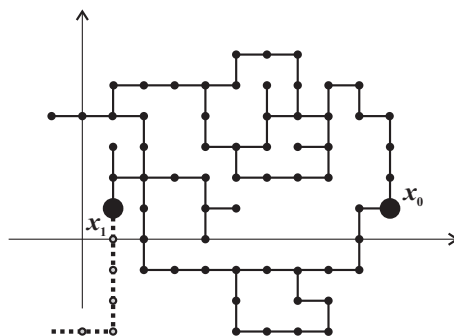


Рис. 1.

Поскольку в последующем мы в основном будем иметь дело с 2-лабиринтами, то из-за краткости в изложении, под лабиринтом, прямоугольным лабиринтом, мозаичным лабиринтом и шахматным лабиринтом мы подразумеваем 2-лабиринт, прямоугольный 2-лабиринт, мозаичный 2-лабиринт и шахматный 2-лабиринт соответственно. Также через \mathfrak{D} обозначим множество \mathfrak{D}_2 . Заметим, что некоторые понятия, которые

в последующем вводим для 2-мерных лабиринтов только что указанных типов, можно легко обобщить на случай размерности n .

Под (конечным) автоматом подразумеваем набор $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где конечные непустые множества A , Q и B являются множествами входов, состояний и выходов автомата \mathfrak{A} соответственно; $\psi: Q \times A \rightarrow B$ — его функция выходов и $\varphi: Q \times A \rightarrow Q$ его функция переходов. Если выделим какое-то состояние q_0 автомата \mathfrak{A} , то набор $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ назовем инициальным автоматом. Для данного инициального или неинициального автомата \mathfrak{A} через $A_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$, $B_{\mathfrak{A}}$, $\psi_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi_{\mathfrak{A}}$ обозначаем множества его входов, состояний и выходов, а также его функции выходов и переходов соответственно.

Автомат (инициальный или неинициальный) \mathfrak{A} называется *допустимым*, если $A_{\mathfrak{A}} = \mathcal{P}(\mathfrak{D})$, $B_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi_{\mathfrak{A}}(q, a) \in a \cup \{\mathbf{0}\}$ для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $a \in A_{\mathfrak{A}}$. Если \mathfrak{A} [\mathfrak{A}_{q_0}] — допустимый автомат, то для краткости пишем $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ [$\mathfrak{A}_{q_0} = (Q, \varphi, \psi, q_0)$] вместо $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ [$\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$].

Допустимый (инициальный или неинициальный) автомат \mathfrak{A} называется *тривиальным*, если $\psi_{\mathfrak{A}}(q, a) = \mathbf{0}$ для любых $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$.

Пусть A — некоторое непустое множество, пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n$ — некоторый упорядоченный набор элементов множества A длины n и пусть $\beta \in A$ — некоторый элемент из A . Для любого $1 \leq i \leq n$ через $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \downarrow (\beta; i)$ обозначим упорядоченный набор $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ такой, что $\alpha'_i = \beta$ и $\alpha'_j = \alpha_j$ для любого $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Для любых $1 \leq i \leq j \leq n$, через $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|_i^j$ обозначим упорядоченный $j - i + 1$ -набор $(\alpha_i, \dots, \alpha_j)$.

В дальнейшем предполагаем, что ни одно состояние автоматов, о которых идет речь, не обозначено символом $\mathbf{0}$.

Упорядоченный n -набор $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$ — автомат для любого $1 \leq i \leq n$, называется *допустимым коллективом автоматов* (или просто *коллективом автоматов*), если для любого $1 \leq i \leq n$,

$$A_i = \{a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \times \hat{Q}_1 \times \dots \times \hat{Q}_n \mid \text{pr}_{i+1}(a) = \mathbf{0}\},$$

где $\hat{Q}_j = Q_j \cup \{\mathbf{0}\}$ для любого $1 \leq j \leq n$, $B_i = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi_i(q, a) \in \text{pr}_1(a) \cup \{\mathbf{0}\}$ для любых $q \in Q_i$ и $a \in A_i$. Обозначим число автоматов в коллективе \mathcal{A} , т.е., число n , через $|\mathcal{A}|$. Также, пусть $\hat{Q}_{\mathcal{A}} = \hat{Q}_1 \times \dots \times \hat{Q}_n$.

Если для некоторых $1 \leq i \leq n$, $a \in A_i$ и $q \in Q_i$ имеет место $\varphi_i(q, a) = q$ [$\psi_i(q, a) = \mathbf{0}$], тогда говорим, что функция φ_i [ψ_i] является *тривиально определенной* в точке (q, a) .

Поскольку множества Q_j , $1 \leq j \leq n$, и $B_1 = \dots = B_n = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ единственным образом определяют множества A_i , $1 \leq i \leq n$, то для любого $1 \leq i \leq n$ в обозначениях для автоматов из \mathcal{A} для краткости пишем

(Q_i, φ_i, ψ_i) вместо $(A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$. Также, для любого $1 \leq i \leq n$ через $A_{\mathfrak{A}_i}$ обозначим множество A_i .

Множество $Q_{\mathcal{A}} = Q_1 \times \dots \times Q_n$ есть *множество состояний* коллектива \mathcal{A} , и любой его элемент называется *состоянием* коллектива \mathcal{A} . Если выделенно некоторое $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in Q_{\mathcal{A}}$, то получаем *коллектив инициальных автоматов* $\mathcal{A}_{\vec{q}}$; это состояние \vec{q} называется *инициальным состоянием* коллектива \mathcal{A} . Иногда вместо $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ пишем $((\mathfrak{A}_1)_{q_1}, \dots, (\mathfrak{A}_n)_{q_n})$. Для любого $1 \leq i \leq n$, через $\mathcal{A}^{(i)}$ обозначим автомат \mathfrak{A}_i .

Коллектив автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$, называется *тривиальным* если $\psi_i(q, a) = \mathbf{0}$ для любых $q \in Q_i, a \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \leq i \leq n$.

Путь L — лабиринт и $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$ — коллектив автоматов. Для любых $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [V(L)]^n, \vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in Q_{\mathcal{A}}$ и $1 \leq i \leq n$, через $a_i(\vec{q}, \vec{x})$ обозначим упорядоченный $n + 1$ -набор $([x_i]_L, a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$, где

$$a_j^{(i)} = \begin{cases} q_j, & \text{если } x_j = x_i \text{ и } j \neq i; \\ 0, & \text{если } x_j \neq x_i \text{ или } j = i \end{cases}$$

для любого $1 \leq j \leq n$. Заметим, что всегда $a_i(\vec{q}, \vec{x}) \in A_{\mathfrak{A}_i}$.

Пусть $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ — два упорядоченных n -набора из $[V(L)]^n$, а $\vec{q}_1 = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})$ и $\vec{q}_2 = (q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)})$ — два упорядоченных n -набора из $Q_{\mathcal{A}}$. Пишем $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \models (\vec{q}_2, \vec{x}_2)$, если для любого $1 \leq i \leq n$ имеет место: $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}) \in E(L)$ или $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}, q_i^{(2)} = \varphi_i(q_i^{(1)}, a_i(\vec{q}_1, \vec{x}_1))$ и $\psi_i(q_i^{(1)}, a_i(\vec{q}_1, \vec{x}_1)) = |(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})|$.

Пусть $L_{\vec{x}_0}$ — n -инициальный лабиринт и $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив из n инициальных автоматов. *Поведением* коллектива $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ в лабиринте $L_{\vec{x}_0}$ называется последовательность

$$\pi(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = (\vec{q}_0, \vec{x}_0), \dots, (\vec{q}_t, \vec{x}_t), \dots$$

такая, что $\vec{q}_t = (q_1^{(t)}, \dots, q_n^{(t)}) \in Q_{\mathcal{A}}, \vec{x}_t = (x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}) \in [V(L)]^n$ и $(\vec{q}_t, \vec{x}_t) \models (\vec{q}_{t+1}, \vec{x}_{t+1})$ для любых $t \geq 0$. Последовательность $\tau(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots$ называется *траекторией* коллектива $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ в лабиринте $L_{\vec{x}_0}$. Пусть $\tau_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \vec{x}_i$ и $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = (\vec{q}_i, \vec{x}_i)$ для любого $i \geq 0$. Также, для любого $1 \leq i \leq n$, пусть $\text{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \{x_i^{(j)} \mid j \geq 0\}$ и

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \bigcup_{i=1}^n \text{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}).$$

В последующем под поведением коллектива инициальных автоматов \mathcal{A} в 1-инициальном лабиринте $L_{x_0}, x_0 \in V(L)$, мы подразумеваем поведение коллектива \mathcal{A} в $|\mathcal{A}|$ -инициальном лабиринте $L_{\vec{y}_0}$, где \vec{y}_0 является упорядоченным $|\mathcal{A}|$ -набором (x_0, x_0, \dots, x_0) .

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$, — коллектив (инициальных или неинициальных) автоматов.

Для произвольного $1 \leq i \leq n$, возьмем любое $q \in Q_i$, а также любые $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \leq j \leq n, j \neq i$. Пусть

$$\text{inr}_{i \rightarrow j}(q, \vec{a}) = [(a_0, a_1, \dots, a_n) \downarrow (q; i + 1)] \downarrow (0; j + 1).$$

Заметим, что $\text{inr}_{i \rightarrow j}(q, \vec{a}) \in A_{\mathfrak{A}_j}$.

Множество автоматов $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \dots, \mathfrak{A}_{i_m}\}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ и $1 \leq m < n$, называется *множеством камней* для \mathcal{A} , если:

- 1) $|Q_{i_j}| = 1$ для любого $1 \leq j \leq m$;
- 2) для любых $1 \leq j \leq m$ и $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in A_{\mathfrak{A}_{i_j}}$ удовлетворяющих условию $\psi_{i_j}(\hat{q}_j, \vec{a}) = \omega \neq \mathbf{0}$, где \hat{q}_j единственное состояние автомата \mathfrak{A}_{i_j} , существует $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$ такое, что $a_k \neq 0$ и $\psi_k(a_k, \text{inr}_{i_j \rightarrow k}(\hat{q}_j, \vec{a})) = \omega$.

Элементы множества \mathcal{K} называются *камями*. Таким образом, если некоторый автомат коллектива \mathcal{A} является камнем и если в какой-то момент он перемещается в некотором направлении из текущей вершины, то существует по крайней мере один автомат не являющийся камнем, который в тот же момент из той же вершины перемещается в том же направлении.

Пусть $(\{q\}, \varphi, \psi)$ — камень некоторого коллектива \mathcal{A} . В дальнейшем его единственное состояние q обозначим символом 1, а поскольку функция φ определяется “тривиальным” образом, то такой автомат-камень будем обозначать через (ψ) . Также, для любого входа a этого камня значение $\psi(q, a)$, т.е., $\psi(1, a)$, обозначим короче через $\psi(a)$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$ — коллектив автоматов и \mathcal{K} — некоторое множество камней для \mathcal{A} . Упорядоченную пару $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ называем *коллективом автоматов с выделенным множеством камней*. Если $|\mathcal{K}| = m$, то пару $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ называем коллективом автоматов *типа* $(n - m, m)$; допускаем и случай, когда $m = 0$, и в таком случае считаем, что множество камней не выделено. Ясно, что без ограничения общности, можно предположить, что этими выделенными m камнями являются камни $\mathfrak{A}_{n-m+1}, \dots, \mathfrak{A}_n$, так что в последующем коллектив автоматов с выделенным множеством камней $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ типа $(n - m, m)$ обозначим через

$$(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{n-m} \mid \mathfrak{A}_{n-m+1}, \dots, \mathfrak{A}_n),$$

где $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}_{n-m+1}, \dots, \mathfrak{A}_n\}$; часть в этом наборе до знака $|$ называется *активной частью* коллектива \mathcal{A} , а любой из первых $n - m$ автоматов называется *представителем* активной части.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r \mid \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_s)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq r$ и $\mathfrak{K}_j = (\hat{\psi}_j)$ для любого $1 \leq j \leq s$, — коллектив (инициальных или неинициальных) автоматов типа (r, s) . Пусть, также, $\mathcal{K}_0 = \{\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_k}\}$ некоторое подмножество множества $\mathcal{K} = \{\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_s\}$; $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s$. Далее, пусть $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_{r+s}^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, \dots, x_{r+s}^{(2)})$ — два упорядоченных $r+s$ -набора из $[V(L)]^{r+s}$, а \vec{q}_1 и \vec{q}_2 — два упорядоченных $(r+s)$ -набора из $Q_{\mathcal{A}}$. Пишем $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2, \vec{x}_2)$, если $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$, и если k -выборки $x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(1)}$ и $x_{j_1}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(2)}$ являются одинаковыми сочетаниями элементов из множества $V(L)$ и $x_j^{(1)} = x_j^{(2)}$ для любого $1 \leq j \leq r+s$ такого, что $j \neq j_t$ для всех $1 \leq t \leq k$.

Говорим, что \mathcal{K}_0 является множеством камней одного цвета для коллектива \mathcal{A} , если для любых $(\vec{q}_1, \vec{x}_1), (\vec{q}_2, \vec{x}_2) \in Q_{\mathcal{A}} \times [V(L)]^{r+s}$ из

$$(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2, \vec{x}_2) \text{ следует, что } (\vec{q}_1^*, \vec{x}_1^*) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2^*, \vec{x}_2^*),$$

где $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \models (\vec{q}_1^*, \vec{x}_1^*)$ и $(\vec{q}_2, \vec{x}_2) \models (\vec{q}_2^*, \vec{x}_2^*)$.

Если в коллективе автоматов с выделенными камнями $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ множество \mathcal{K} является множеством камней одного цвета, то такой коллектив называется коллективом автоматов с камнями одного цвета; в противном случае, он называется коллективом автоматов с камнями разного цвета. В последующем, если не сказано иначе, каждый коллектив автоматов с камнями будет коллективом с камнями одного цвета.

Некоторый n -инициальный лабиринт $L_{\vec{x}_0}$ называется *ловушкой* для коллектива из n инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$, если имеет место

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) \neq V(L).$$

В дальнейшем нам потребуются не любые ловушки для данного коллектива, но ловушки специального типа.

Правильный мозаичный n -инициальный лабиринт $(L; \vec{x}_0, x_1)$ называется *правильной ловушкой* для данного коллектива из n инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$, если $x_1 \notin \text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, (L; \vec{x}_0, x_1))$.

В последующем введем некоторые частично определенные бинарные операции на лабиринтах, которые будут удовлетворять следующему условию: если $*$ — одна из тех операций, а L_1 и L_2 — некоторые лабиринты, тогда лабиринт [орграф с разметкой дуг] $L * L'$, если он определен, принадлежит одному и тому же классу изоморфных лабиринтов [орграфов с разметкой дуг] $[L_1 * L_2]$ для любых $L \in [L_1]$ и $L' \in [L_2]$. На самом деле, мы смотрим на эти операции как на операции, которые определены на множестве классов изоморфных лабиринтов, и когда мы говорим, что ‘дан лабиринт [орграф с разметкой дуг] $L_1 * L_2$ ’ мы на самом деле считаем, что дан некоторый лабиринт [орграф с разметкой дуг] класса $[L_1 * L_2]$, и, следовательно, результат применения операции $*$ может существовать даже в том случае, когда $L_1 * L_2$ не существует.

Если при применении некоторой операции над лабиринтами не появляются новые дуги и мы не меняем метки оставшихся дуг, мы, из-за краткости, не описываем разметку дуг лабиринта [орграфа с разметкой дуг], который получен в результате применения этой операции, считая, что отметки дуг остались прежними.

Пусть $L_1 = (V_1, E_1)$ и $L_2 = (V_2, E_2)$ — произвольная пара лабиринтов такая, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Через $L_1 \dot{\cup} L_2$ обозначим (*дизъюнктное объединение*) лабиринтов L_1 и L_2 , т.е., $L_1 \dot{\cup} L_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Пусть L — лабиринт, и пусть x и y , $x \neq y$, — две его вершины (необязательно смежные). Через $L - \langle x, y \rangle$ обозначим оргграф с разметкой дуг $(V(L), E(L) \setminus \{(x, y), (y, x)\})$.

Пусть x и y , $x \neq y$, — несмежные вершины лабиринта L , которые удовлетворяют условиям, что $[x] \cap [y] = \emptyset$ и $x\omega_1 \neq y\omega_2$ для любых $\omega_1 \in [x]$ и $\omega_2 \in [y]$. Через $\text{vi}(L, x, y)$ обозначим лабиринт

$$(V \setminus \{y\}, [E \setminus (\{y\} \times V) \cup (V \times \{y\})]) \cup \overleftarrow{E}(x, y) \cup \overrightarrow{E}(x, y),$$

где

$$\overleftarrow{E}(x, y) = \{(y\omega, x) \mid \omega \in [y]\}, \quad \overrightarrow{E}(x, y) = \{(x, y\omega) \mid \omega \in [y]\},$$

и $|(x, y\omega)| = \omega$ и $|(y\omega, x)| = \bar{\omega}$ для любого $\omega \in [y]$ (метки остальных дуг не меняем).

Пусть $(L_1; x'_1, x''_1)$ и $(L_2; x'_2, x''_2)$ — лабиринты такие, что

$$V(L_1) \cap V(L_2) = \emptyset \quad \text{и} \quad [x''_1]_{L_1} \cap [x'_2]_{L_2} = \emptyset.$$

Обозначим лабиринт $(\text{vi}(L_1 \dot{\cup} L_2, x''_1, x'_2); x'_1, x''_2)$ через $L_1 L_2$. Для данных лабиринтов $(L_i; x'_i, x''_i)$, $1 \leq i \leq n$, через $L_1 \dots L_n$ обозначим лабиринт $(\dots ((L_1 L_2) L_3) \dots L_{n-1}) L_n$. Обозначим вход x'_1 [выход x''_n] этого лабиринта через $(L_1 \dots L_n; 0)$ [$(L_1 \dots L_n; n)$], и для любого $1 \leq i \leq n - 1$, через $(L_1 \dots L_n; i)$ обозначим, теперь в $L_1 \dots L_n$, вершину x''_i . Если $L_1 \cong \dots \cong L_n \cong L$, то пишем L^n вместо $L_1 \dots L_n$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, (x, y) — его некоторая дуга и z — произвольная внутренняя точка отрезка \overline{xy} . Тогда через $L \oplus z$ обозначим прямоугольный лабиринт такой, что $V(L \oplus z) = V(L - \langle x, y \rangle) \cup \{z\}$, $E(L \oplus z) = E(L - \langle x, y \rangle) \cup \{(x, z), (z, y), (y, z), (z, x)\}$, $|(x, z)|_{L \oplus z} = |(z, y)|_{L \oplus z} = |(x, y)|_L$ и $|(y, z)|_{L \oplus z} = |(z, x)|_{L \oplus z} = |(y, x)|_L$ (также, как и выше, предполагаем, что $|e|_{L \oplus z} = |e|_L$ для всех $e \in E(L - \langle x, y \rangle)$).

Имеет место следующее фундаментальное утверждение в теории автоматов в лабиринтах.

Теорема 1. *Для любого коллектива типа $(1, 1)$ существует правильная ловушка.*

Сначала в [4] (см. также [5]) доказано, что для любого коллектива типа $(1, 0)$ существует правильная ловушка, а потом в [6] (см. также [7]) доказано, что то же самое имеет место для коллектива типа $(1, 1)$.

Коллектив инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\bar{q}_0}$ называется *универсальным обходчиком* для множества лабиринтов \mathfrak{L} , если $\text{Int}(\mathcal{A}_{\bar{q}_0}, L_x) = V(L)$ для любых $L \in \mathfrak{L}$ и $x \in V(L)$.

Пусть σ_+ и σ_- — циклические перестановки $(\mathbf{e n w s})$ и $(\mathbf{e s w n})$ множества \mathfrak{D} соответственно. Для любых $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, пусть $\omega^+(a)$ — первый элемент в последовательности $\sigma_+(\omega), \sigma_+^2(\omega), \sigma_+^3(\omega), \sigma_+^4(\omega)$ принадлежащий множеству a . Подобным образом, определим $\omega^-(a)$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$.

Заметим, что любой коллектив типа $(1, 0)$ можно рассматривать как (допустимый) автомат и, наоборот, любой автомат можно рассматривать как коллектив типа $(1, 0)$. Имеет место следующее утверждение (например, см. [8]).

Теорема 2. *Существует универсальный обходчик типа $(1, 0)$ для класса всех конечных лабиринтов, являющихся деревьями.*

Доказательство. Определим допустимые автоматы $\mathfrak{A}^- = (Q, \varphi^-, \psi^-)$ и $\mathfrak{A}^+ = (Q, \varphi^+, \psi^+)$, где $Q = \{q_e, q_n, q_w, q_s\}$, следующим образом. Для любых $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, пусть $\varphi^-(q_\omega, a) = q_{\bar{\omega}^-(a)}$, $\psi^-(q_\omega, a) = \bar{\omega}^-(a)$, $\varphi^+(q_\omega, a) = q_{\bar{\omega}^+(a)}$, и $\psi^+(q_\omega, a) = \bar{\omega}^+(a)$; также пусть

$$\varphi^-(q_\omega, \emptyset) = \varphi^+(q_\omega, \emptyset) = q_\omega \quad \text{и} \quad \psi^-(q_\omega, \emptyset) = \psi^+(q_\omega, \emptyset) = \mathbf{0}$$

для любого $\omega \in \mathfrak{D}$. Нетрудно увидеть, что для любого $q \in Q$, автоматы \mathfrak{A}_q^- и \mathfrak{A}_q^+ являются универсальными обходчиками для класса всех конечных лабиринтов, являющихся деревьями. \square

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ — допустимый автомат. Для любого $n \geq 2$ определим коллектив автоматов $\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n) = (\mathfrak{A}^* | \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{n-1})$ типа $(1, n-1)$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}^* = (Q, \varphi^*, \psi^*)$ и $\mathfrak{K}_i = (\psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. Для любых $q \in Q$, $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$ и $1 \leq i \leq n$, через $\alpha_i(q, a)$ обозначим $(n+1)$ -набор $(a, q, 1, \dots, 1) \downarrow (0; i+1)$. Тогда, для любых $q \in Q$ и $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$ положим, что $\varphi^*(q, \alpha_1(q, a)) = \varphi(q, a)$ и $\psi^*(q, \alpha_1(q, a)) = \psi(q, a)$, и что $\psi_i(\alpha_{i+1}(q, a)) = \psi(q, a)$ для любого $1 \leq i \leq n-1$; функции φ^* и ψ^* , а также ψ_i для любого $1 \leq i \leq n-1$, тривиально определены во всех остальных точках. В дальнейшем, для любого $q \in Q$, через \bar{q} обозначим состояние $(q, 1, \dots, 1)$ коллектива $\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n)$. Нетрудно увидеть, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{A}_{\bar{q}_0}$ — некоторый универсальный обходчик для класса лабиринтов \mathfrak{L} , то для любого $n \geq 2$, коллектив $[\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n)]_{\bar{q}_0}$ также является универсальным обходчиком для \mathfrak{L} .*

Фиксируем целые числа $r \geq 1$ и $s \geq 0$. Пусть

$$\mathcal{A}_k = (\mathfrak{A}_1^{(k)}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(k)} \mid \mathfrak{K}_1^{(k)}, \dots, \mathfrak{K}_s^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

— некоторые коллективы типа (r, s) , где $\mathfrak{A}_i^{(k)} = (Q_i^{(k)}, \varphi_i^{(k)}, \psi_i^{(k)})$ для любых $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq k \leq n$, и $\mathfrak{K}_j^{(k)} = (\hat{\psi}_j^{(k)})$ для любых $1 \leq j \leq s$ и $1 \leq k \leq n$. Не теряя общности, предположим, что $Q_i^{(k_1)} \cap Q_i^{(k_2)} = \emptyset$ для любых $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$ (заметим, что даже когда это условие не выполнено, мы всегда можем взять подходящие коллективы, изоморфные данным, и таким способом обеспечить его выполнение).

Мультиорграф (без петель) G порядка n называется *комбинирующей диаграммой* для данных коллективов автоматов, если:

- 1) его вершины помечены символами \mathcal{A}_i , $1 \leq i \leq n$, таким образом, что метки любых двух различных вершин различные;
- 2) его дуги помечены упорядоченными 3-наборами $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, A)$ таким образом, что если метка начальной вершины некоторой дуги \mathcal{A}_i , а метка ее конечной вершины \mathcal{A}_j , тогда $\vec{q}_1 \in Q_{\mathcal{A}_i}$, $\vec{q}_2 \in Q_{\mathcal{A}_j}$ и $A \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{D})$;
- 3) $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, A')$ и $(\vec{q}_1', \vec{q}_2', A'')$ — метки дуг, имеющих в качестве начальной одну и ту же самую вершину, то $\vec{q}_1 \neq \vec{q}_1'$.

Пусть \mathbb{D} — некоторая комбинирующая диаграмма для коллективов \mathcal{A}_i , $1 \leq i \leq n$, имеющая m дуг, и пусть $(\kappa_1^1, \kappa_2^1, A_1), \dots, (\kappa_1^m, \kappa_2^m, A_m)$ — метки этих дуг. Определим \mathbb{D} -композицию данных коллективов

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}_i / \mathbb{D} = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r \mid \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_s),$$

где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq r$ и $\mathfrak{K}_j = (\hat{\psi}_j)$ для любого $1 \leq j \leq s$, следующим образом. Пусть $t = r + s + 1$ и $Q_i = \bigcup_{j=1}^n Q_i^{(j)}$ для любого $1 \leq i \leq r$, и пусть

$$\varphi_i(q, \vec{a}) = \begin{cases} \text{pr}_i(\kappa_2^j), & \text{если } \vec{a}|_2^t \downarrow (q; i) = \kappa_1^j \text{ и } \text{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \text{некоторого } 1 \leq j \leq m; \\ \varphi_i^{(j)}(q, \vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \vec{a}|_2^t \downarrow (q; i) \in \hat{Q}_{\mathcal{A}_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1, n}; \\ q & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\psi_i(q, \vec{a}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \vec{a}|_2^t \downarrow (q; i) = \kappa_1^j \text{ and } \text{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \text{некоторого } 1 \leq j \leq m; \\ \psi_i^{(j)}(q, \vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \vec{a}|_2^t \downarrow (q; i) \in \hat{Q}_{\mathcal{A}_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1, n}; \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любых $q \in Q_i$, $\vec{a} \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \leq i \leq r$. Также пусть

$$\hat{\psi}_i(\vec{a}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \vec{a}|_2^t \downarrow (1; r+i) = \kappa_1^j \text{ and } \text{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \text{некоторого } 1 \leq j \leq m; \\ \hat{\psi}_i^{(j)}(\vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \vec{a}|_2^t \downarrow (1; r+i) \in \hat{Q}_{A_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1, n}; \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любых $\vec{a} \in A_{\mathfrak{R}_i}$ и $1 \leq i \leq s$.

В последующем, когда приводим некоторую комбинирующую диаграмму, мы часто оставляем дуги, определяющие переходы из одного “режима работы” коллектива в другой, без отметок, а только их нумеруем, объясняя в сопутствующем тексте смысл соответствующих переходов. Также, если в некоторой комбинирующей диаграмме отметка дуги, связывающей вершину с отметкой A_i с вершиной с отметкой A_j , имеет вид $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, A)$, то в последующем, когда пишем такую отметку, A будем опускать, если $A = \mathcal{P}(\mathfrak{D})$, а \vec{q}_2 будем опускать, если \vec{q}_2 является начальным состоянием коллектива A_j . Таким образом, в частных случаях эта отметка может приобрести вид (\vec{q}_1, \vec{q}_2) , (\vec{q}_1, A) , или даже (\vec{q}_1) .

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ — автомат и $W \subseteq Q$. Определим *простое W -расширение* автомата \mathfrak{A} , в обозначении $\mathfrak{A} \uparrow W$, следующим образом. Пусть W° — множество удовлетворяющее условиям $|W^\circ| = |W|$ и $W^\circ \cap Q = \emptyset$, и пусть $f: W \rightarrow W^\circ$ — некоторая биекция. Через q° обозначим $f(q)$ для любого $q \in W$. Теперь определим $\mathfrak{A} \uparrow W = (Q \cup W^\circ, \varphi^\circ, \psi^\circ)$ так, что $\varphi^\circ(q, a) = \varphi(q, a)$ и $\psi^\circ(q, a) = \psi(q, a)$ для любого $(q, a) \in Q \times A_{\mathfrak{A}}$, и $\varphi^\circ(q^\circ, a) = \varphi(q, a)$ и $\psi^\circ(q^\circ, a) = \psi(q, a)$ для любого $(q, a) \in W \times A_{\mathfrak{A}}$.

Пусть L — некоторый прямоугольный лабиринт. Любая компонента связности множества $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}$ называется *гранью* лабиринта L . Если L конечен (а мы всегда предполагаем, что это так, если не оговорено иное), то он имеет только одну *неограниченную грань* (которая называется также и его *внешней гранью*) и $k \geq 0$ *ограниченных* (или *внутренних*) *граней*. Через $f_\infty(L)$ обозначим внешнюю грань лабиринта L . Пусть f — некоторая грань (ограниченная или неограниченная) лабиринта L . Множество $b(f) = \bar{f} \cap V(L)$ назовем *вершинной границей* грани f (здесь \bar{f} — замыкание множества f относительно стандартной топологии в \mathbf{R}^2).

Введем на \mathbf{R}^2 отношение порядка \leq следующим образом:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} y_1 < y_2 \vee (y_1 = y_2 \wedge x_1 \leq x_2)$$

для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Поскольку для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ имеет место $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ или $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$, то существует $\max b(f)$ для любой грани f конечного прямоугольного лабиринта L ; для данной грани f вершина $\max b(f)$ называется его *сингулярной вершиной*.

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив инициальных автоматов, $\vec{q}_1 \neq \vec{q}_0$ и $\vec{q}_2 \neq \vec{q}_0$ — два различных состояния коллектива \mathcal{A} , L_{x_0} — некоторый лабиринт и \mathfrak{p} — некоторое лабиринтное свойство (свойство, которым в общем случае может обладать некоторый лабиринт). Через $(x_0; n)$ обозначим упорядоченный n -набор, у которого все координаты равны x_0 . Говорим, что $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ *сильно распознает* свойство \mathfrak{p} в L_{x_0} , если существует $t \geq 1$ такое, что $\text{rg}_1(\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0})) \neq \vec{q}_j$ для любых $0 \leq i \leq t-1$ и $1 \leq j \leq 2$, и такое, что:

или $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}_1, (x_0, |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$, если L_{x_0} обладает свойством \mathfrak{p} ,

или $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}_2, (x_0, |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$, если L_{x_0} не обладает свойством \mathfrak{p} .

Обозначим состояния \vec{q}_1 и \vec{q}_2 через $\vec{q}_\top(\mathcal{A}_{\vec{q}_0})$ и $\vec{q}_\perp(\mathcal{A}_{\vec{q}_0})$ соответственно.

Пусть L — конечный прямоугольный лабиринт. Вершина $v \in V(L)$ является *квазисингулярной вершиной* грани $f_\infty(L)$, если $v \in b(f_\infty(L))$ и если или $[v] = \{\mathbf{w}, \mathbf{s}\}$ и $f_\infty(L)$ лежит слева от маршрута $\overline{e\mathbf{v}\mathbf{s}}$, или $[v] \in \{\{\mathbf{w}\}, \{\mathbf{s}\}\}$. Вершина $v \in V(L)$ является *квазисингулярной вершиной* ограниченной грани f лабиринта L , если $v \in b(f)$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{s}\} \subseteq [v]$ и f лежит справа от маршрута $\overline{e\mathbf{v}\mathbf{s}}$. Имеют место следующие четыре утверждения (см., например, [8] и [9]).

Теорема 4. *Существует коллектив инициальных автоматов \mathcal{B}_2 типа (1, 2), который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно распознает свойство, является ли вершина x_0 квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$.*

Теорема 5. *Существует коллектив инициальных автоматов \mathcal{B}_4 типа (1, 2), который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно распознает свойство, является ли вершина x_0 квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L .*

Теорема 6. *Существует коллектив инициальных автоматов \mathcal{B}_3 типа (1, 2), который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} , где x_0 — квазисингулярная вершина грани $f_\infty(L)$, сильно распознает свойство, является ли x_0 сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$.*

Теорема 7. *Существует коллектив инициальных автоматов \mathcal{B}_5 типа (1, 2), который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} , где x_0 — квазисингулярная вершина ограниченной грани f лабиринта L , сильно распознает свойство, является ли x_0 сингулярной вершиной грани f .*

3. Проблема типовой встречи для автоматов

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив инициальных автоматов и L_{x_0} — некоторый лабиринт. Также пусть W — фиксированное множество состояний коллектива

\mathcal{A} ; назовем элементы множества W *финишными состояниями*. Предположим, что дано некоторое свойство \mathfrak{p} , которым могут обладать некоторые вершины лабиринта L ; назовем такие вершины \mathfrak{p} -*вершинами* и через $V_{\mathfrak{p}}(L)$ обозначим множество всех \mathfrak{p} -вершин лабиринта L . Говорим, что $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ *сильно находит* \mathfrak{p} -вершины в L_{x_0} , если:

- или существуют момент $t \geq 0$, состояние $\vec{q} \in W$, и вершина $x \in V_{\mathfrak{p}}(L)$ такие, что $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}, (x; |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$,
- или $V_{\mathfrak{p}}(L) = \emptyset$ и $\text{pr}_1(\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0})) \notin W$ для любого $i \geq 0$.

Имеет место следующая теорема (см., например, [8] и [9]).

Теорема 8. *Существует коллектив инициальных автоматов \mathcal{A} типа (1, 2), который в любом конечном мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно находит сингулярную вершину грани $f_{\infty}(L)$.*

Доказательство. Рассмотрим комбинирующую диаграмму \mathbb{D} , данную на рис. 2 (но без дуг с метками 4° и 13° , и без их соответствующих конечных вершин), где $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}(\mathfrak{A}^+ \uparrow \{q_e, q_n\}; 3)$, коллективы \mathcal{B}_i , $2 \leq i \leq 5$, являются коллективами, определенными в последних четырех теоремах, и \mathcal{B}'_i — коллектив изоморфный \mathcal{B}_i для любого $2 \leq i \leq 5$. Также, введем множества $A_e^{(1)} = \{\{\mathbf{w}\}\} \cup A^{(2)}$ и $A_n^{(1)} = \{\{\mathbf{s}\}\} \cup A^{(2)}$, где $A^{(2)} = \{a \in \mathcal{P}(\mathcal{D}) \mid \{\mathbf{w}, \mathbf{s}\} \subseteq a\}$. Значения меток диаграммы определим ниже.

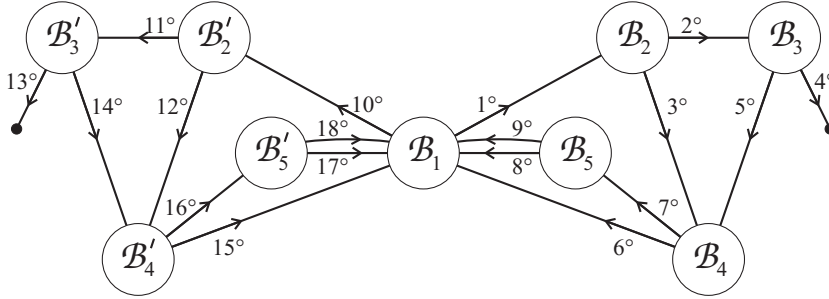


Рис. 2.

Теперь определим \mathcal{A} как \mathbb{D} -композицию данных коллективов автоматов. Пусть в начальный момент все автоматы коллектива \mathcal{A} находятся в некоторой вершине x конечного мозаичного лабиринта L , и коллектив \mathcal{A} находится в некотором состоянии $\vec{q} \in Q_{\mathcal{B}_1}$. В целом коллектив \mathcal{A} будет “вести себя” как автомат \mathfrak{A}^+ , но при этом он “работает” по следующей “программе”:

- 1: Если $\vec{q} = \vec{q}_e$ и $[x] \in A_e^{(1)}$, то \mathcal{A} переходит к шагу 2 (переход $1^\circ: (\vec{q}_e, A_e^{(1)})$); если $\vec{q} = \vec{q}_n$ и $[x] \in A_n^{(1)}$, то \mathcal{A} переходит к шагу 6 (переход $10^\circ: (\vec{q}_n, A_n^{(1)})$); в противном случае, используя “программу” для \mathcal{B}_1 ,

коллектив \mathcal{A} переходит в состояние \vec{q}' , и все автоматы коллектива \mathcal{A} переходят в вершину x' . Пусть $x := x'$ и $\vec{q} := \vec{q}'$, и пусть коллектив \mathcal{A} переходит снова к шагу 1.

2: Используя “программу” для \mathcal{B}_2 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_2)$, то он переходит к шагу 3 (переход $2^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}_2))$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_2)$, то он переходит к шагу 4 (переход $3^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_2))$).

3: Используя “программу” для \mathcal{B}_3 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_3)$, то он оказался в своем финишном состоянии (переход 4°), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_3)$, то он переходит к шагу 4 (переход $5^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_3))$).

4: Используя “программу” для \mathcal{B}_4 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L . Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_4)$, то он переходит к шагу 5 (переход $7^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}_4))$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_4)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_e^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу 1 (переход $6^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_4), \vec{q}_e^\circ)$).

5: Используя “программу” для \mathcal{B}_5 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной ограниченной грани f . Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_5)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_n^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу 1 (переход $9^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}_5), \vec{q}_n^\circ)$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_5)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_e^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу 1 (переход $8^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_5), \vec{q}_e^\circ)$).

6: Используя “программу” для \mathcal{B}'_2 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_2)$, то он переходит к шагу 7 (переход $11^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_2))$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_2)$, то он переходит к шагу 8 (переход $12^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_2))$).

7: Используя “программу” для \mathcal{B}'_3 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_3)$, то он оказался в своем финишном состоянии (переход 13°), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_3)$, то он переходит к шагу 8 (переход $14^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_3))$).

8: Используя “программу” для \mathcal{B}'_4 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L . Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_4)$, то он переходит к шагу 9 (переход $16^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_4))$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_4)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_n^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу 1 (переход $15^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_4), \vec{q}_n^\circ)$).

9: Используя “программу” для \mathcal{B}'_5 , коллектив \mathcal{A} проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной ограниченной грани f . Если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_5)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_e^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу

1 (переход $17^\circ: (\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_5), \vec{q}_n^\circ)$), а если \mathcal{A} окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_5)$, то пусть $\vec{q} := \vec{q}_n^\circ$, и пусть \mathcal{A} переходит к шагу 1 (переход $18^\circ: (\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_5), \vec{q}_e^\circ)$).

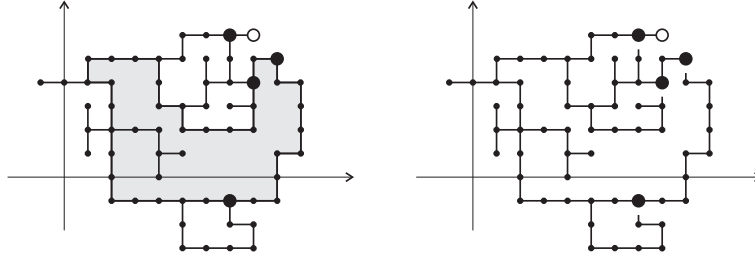


Рис. 3.

Покажем, что таким образом определенный коллектив автоматов \mathcal{A} удовлетворяет условию данной теоремы. Благодаря шагам 1, 4, 5, 8 и 9, и поскольку “глобально” коллектив \mathcal{A} ведет себя как коллектив \mathcal{A}_1 , то лабиринт, который он “видит”, является деревом: любой простой цикл графа $G(L)$ содержит как сингулярную вершину $x(f)$, так и вершины $x(f)\mathbf{e}$ и $x(f)\mathbf{s}$ хотя бы одной внутренней грани f лабиринта L , и этот цикл “срезается” вышедшей программой хотя бы по ребру $\langle x(f), x(f)\mathbf{s} \rangle$. Например, слева на рис. 3 дан мозаичный лабиринт, в котором с помощью символа \bullet обозначены сингулярные вершины его ограниченных граней, а с помощью символа \circ обозначена сингулярная вершина его внешней грани; справа на рис. 3 дано дерево, полученное соответствующей трансформацией из данного лабиринта. Из утверждения 3 следует, что \mathcal{A} обходит L и таким образом обязательно посещает сингулярную вершину внешней грани $f_\infty(L)$, а благодаря шагам 1, 3 и 7 переходит в финишное состояние. \square

Заменяя в последних пяти теоремах тип коллектива $(1, 2)$ на тип $(2, 0)$, получаются опять точные утверждения. Также, с помощью небольшой модификации “программы” для коллектива \mathcal{A} , из предыдущей теоремы получаем следующее утверждение (впервые доказанное в [9], смотри также [8]).

Теорема 9. *Существуют универсальные обходчики типов $(1, 2)$ и $(2, 0)$ для класса всех конечных мозаичных лабиринтов.*

Пусть L — некоторый лабиринт, и пусть x_0 и y_0 , $x_0 \neq y_0$, — две различные вершины лабиринта L . Предположим, что \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — два коллектива инициальных автоматов. Пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0) -встречу в L , если существует $t > 0$, такое что $\text{pr}_i(\tau_t(\mathcal{A}_1, L_{x_0})) = \text{pr}_j(\tau_t(\mathcal{A}_2, L_{y_0}))$ для некоторых $1 \leq i \leq |\mathcal{A}_1|$ и $1 \leq j \leq |\mathcal{A}_2|$. Другими словами, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

имеет (x_0, y_0) -встречу в L , если существуют автомат коллектива \mathcal{A}_1 и автомат коллектива \mathcal{A}_2 , которые оказываются в некотором моменте $t > 0$, после того как в начальный момент все автоматы коллектива \mathcal{A}_1 положены в x_0 и все автоматы коллектива \mathcal{A}_2 положены в y_0 , в одной и той же вершине лабиринта L .

Кроме приведенного варианта встречи для двух коллективов автоматов возможны и другие варианты. В случае, когда оба коллектива имеют выделенные активные части, описанный выше вариант встречи происходит, если существует представитель активной части одного коллектива, который встречается с хотя бы одним из автоматов (в том числе и с камнем) другого коллектива. Также возможен вариант, когда встреча коллективов осуществляется только при условии, если встретились представители активных частей данных коллективов. Возможны и такие варианты, когда один или оба коллектива не распознают правильно некоторые элементы другого коллектива: они или их не видят, или их не отличают от автоматов своего коллектива. Как и выше, встреча в таких случаях осуществляется, если в какой-то вершине имеет место событие, которое “не предусматривается” хотя бы одной из “программ” для данных коллективов.

Пусть \mathfrak{L} — некоторый класс лабиринтов. Для любых двух типов коллективов $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема типовой встречи* в классе \mathfrak{L} состоит в определении того, существуют ли коллективы \mathcal{A}_1 типа (i_1, j_1) и \mathcal{A}_2 типа (i_2, j_2) такие, что для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0) -встречу в L . Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^0$ на множестве $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0)^2$ следующим образом: $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^0(i_1, j_1, i_2, j_2) = 1$, если такие коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 существуют, и $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^0(i_1, j_1, i_2, j_2) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Подобным образом, для любого класса лабиринтов \mathfrak{L} и любого типа коллективов $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема типовой встречи* в классе \mathfrak{L} состоит в определении того, существуют ли коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 типа (i, j) такие, что для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0) -встречу в L . Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^1$ на множестве $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ следующим образом: $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^1(i, j) = 1$, если такие коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 существуют, и $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^1(i, j) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Также, для любого класса лабиринтов \mathfrak{L} и любого типа коллективов $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема сильной типовой встречи* в классе \mathfrak{L} состоит в определении того, существуют ли коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 типа (i, j) такие, что они являются двумя копиями одного и того же коллектива и для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0) -встречу в L . Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^2$ на множестве

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ следующим образом: $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2(i, j) = 1$, если такие коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 существуют, и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2(i, j) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Как уже сказано, впервые проблема встречи коллективов автоматов в изложенном здесь виде была представлена в работе [1], но некоторые частные результаты по этой проблеме имелись и раньше. Например, если $\mathcal{L} = \{Z^2\}$, где Z^2 — бесконечный шахматный лабиринт, имеющий в качестве своих вершин множество всех целочисленных точек плоскости, тогда $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1(1, 2) = 1$ ([10]).

Пусть $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$, где $Z_i \subseteq \mathbf{N}_0$ для любого $1 \leq i \leq m$. Определим частичный порядок \leq на Z следующим образом: для любых упорядоченных m -наборов $\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)$ и $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$ множества Z имеет место $\vec{z} \leq \vec{w}$, если $z_i \leq w_i$ для любого $1 \leq i \leq m$. Предикаты $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^0$, $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ монотонны по отношению к введенному частичному порядку на соответствующих им доменах. Следовательно, предикаты $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^0$, $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ могут быть описаны с помощью множеств их нижних единиц. В дальнейшем для монотонного предиката \mathbf{M} соответствующее множество его нижних единиц обозначим через $\mathbf{U}(\mathbf{M})$.

Через \mathcal{L}_{fm} обозначим класс всех конечных мозаичных лабиринтов, через \mathcal{L}_{m} — класс всех мозаичных лабиринтов, через \mathcal{L}_{fr} — класс всех конечных прямоугольных лабиринтов и через \mathcal{L}_{r} — класс всех прямоугольных лабиринтов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. $\mathbf{U}(\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0) = \{(1, 2, 1, 0), (2, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 0, 2, 0)\}$ и $\mathbf{U}(\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1) = \mathbf{U}(\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2) = \{(1, 2), (2, 0)\}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим предикат $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2$ и найдем значение $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(1, 2)$. Из теоремы 8 следует, что существует коллектив \mathcal{A} типа $(1, 2)$, сильно находящий сингулярную вершину грани $f_{\infty}(L)$ в любом конечном мозаичном лабиринте L . Возьмем две копии \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 коллектива \mathcal{A} .

Пусть L — произвольный конечный мозаичный лабиринт, и пусть x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, — произвольные вершины лабиринта L . Поскольку \mathcal{A}_1 в L_{x_1} и \mathcal{A}_2 в L_{x_2} сильно находят сингулярную вершину грани $f_{\infty}(L)$, то коллективы \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 имеют (x_1, x_2) -встречу в L (на рис. 4 справа, с помощью символа \circ обозначена сингулярная вершина внешней грани данного лабиринта). Поскольку x_1 и x_2 — две произвольные вершины лабиринта L , то получаем $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(1, 2) = 1$. Подобным образом можно показать, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(2, 0) = 1$. Ясно, что из полученного результата следует, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(1, 2) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(2, 0) = 1$.

Далее покажем, что для любых двух коллективов \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 типа $(1, 1)$ можно найти конечный мозаичный лабиринт L и его вершины x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$ такие, что пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ не имеет (x_1, x_2) -встречу в L . Из теоремы 1 следует, что для \mathcal{A}_1 существует правильная ловушка

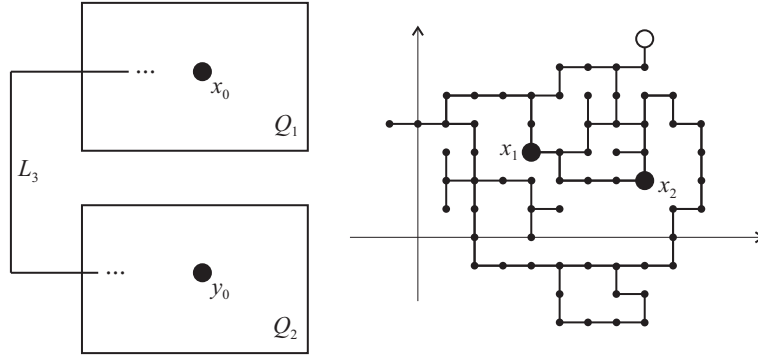


Рис. 4.

$(L_1; x_0, x_1)$ и для \mathcal{A}_2 существует правильная ловушка $(L_2; y_0, y_1)$. Очевидно, что существует мозаичный змеевидный лабиринт L_3 такой, что лабиринт $L_1 L_3 L_2^{-1}$ определен. На рис. 4 слева, $(L_1; x_0, x_1)$ и $(L_2; y_0, y_1)$ расположены внутри прямоугольников Q_1 и Q_2 соответственно, и для L_3 единственные две вершины, имеющие в $G(L_3)$ степень 1, выбраны в качестве его входа и выхода. Заметим, что любой параллельный перенос правильной ловушки для данного коллектива опять порождает правильную ловушку для него. Очевидно, что пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ не имеет (x_0, y_0) -встречу в L . Следовательно, $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(1, 1) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(1, 1) = 0$, что вместе с $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(1, 2) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(2, 0) = 1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(1, 2) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2(2, 0) = 1$ дает $\mathbf{U}(\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1) = \mathbf{U}(\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2) = \{(1, 2), (2, 0)\}$.

Теперь покажем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 2, r, s) = 1$ для любых $r \geq 1$ и $s \geq 0$. Из теоремы 9 следует, что существует коллектив \mathcal{A} типа $(1, 2)$, который обходит любой конечный мозаичный лабиринт. Также, возьмем тривиальный коллектив $\mathcal{B}_0(r, s)$ типа (r, s) . Пусть L — произвольный конечный мозаичный лабиринт, и пусть x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, — две различные вершины лабиринта L . Из теоремы 9 следует, что коллективы \mathcal{A} и $\mathcal{B}_0(r, s)$ имеют (x_1, x_2) -встречу в L . Поскольку x_1 и x_2 — произвольные вершины лабиринта L , получаем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 2, r, s) = 1$. Но, из $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 2, r, s) = 1$ следует, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 2, 1, 0) = 1$, а также, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 0, 1, 2) = 1$. Подобным образом получаем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(2, 0, 1, 0) = \mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 0, 2, 0) = 1$. Также, из $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1(1, 1) = 0$ получаем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0(1, 1, 1, 1) = 0$, и наше утверждение относительно предиката $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0$ верно. \square

Теперь предикаты $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0$, $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2$ полностью описаны. На рис. 5 символом \bullet отмечены точки (целочисленные), в которых предикаты $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2$ принимают значение 0, а серая закрытая неограниченная область содержит точки, в которых они принимают значение 1.

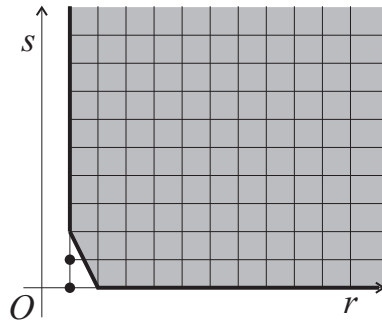


Рис. 5.

Проблема описания предикатов $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^2$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^1$ открыта. На рис. 6 а) данно все, что мы знаем о $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^2$, а на рис. 6 б) — все, что мы знаем о $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^1$ (с помощью \bullet отмечены все вершины, в которых данные предикаты принимают значение 0, с помощью \circ — все точки, в которых значение этих предикатов неизвестно, а серая закрытая неограниченная область содержит все точки, в которых они принимают значение 1).

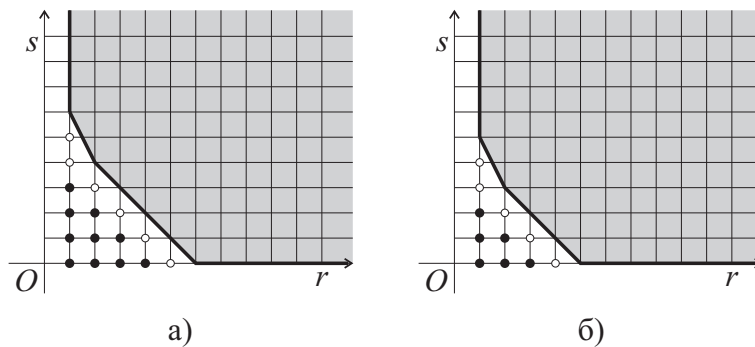


Рис. 6.

Кроме этого, мы не можем полностью описать предикат $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^0$. Мы знаем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^0(r_1, s_1, r_2, s_2) = 1$, или если $r_1 = 1$ и $s_1 \geq 5$, или если $r_1 \geq 2$ и $r_1 + s_1 \geq 5$. Также, мы знаем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{L}_m}^0(r_1, s_1, r_2, s_2) = 0$, если $r_1 + s_1 \leq 3$ и $r_2 + s_2 \leq 3$.

Все приведенные результаты для предикатов $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^0$, $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$, когда \mathcal{L} является классом всех мозаичных лабиринтов, следуют из результатов, представленных в работах [11, 12, 13]. Также заметим, что все приведенные результаты (как в конечном, так и в произвольном случае) остаются в силе, если вместо мозаичных рассматриваем шахматные лабиринты.

Интересно заметить, что если переходим из двухмерного в трехмерное евклидовое пространство, тогда положение дел радикально меняет-

ся. В [14] доказано, что не существует коллектив автоматов, который является универсальным обходчиком для класса всех конечных мозаичных 3-лабиринтов толщины 2. Здесь под *толщиной* конечного мозаичного 3-лабиринта L подразумеваем минимальное число горизонтальных плоскостей, содержащих все множество $V(L)$. Имея в распоряжении этот результат, можно, подобно тому как мы это делали при доказательстве теоремы 10, построить, для любых двух коллективов автоматов, конечный мозаичный 3-лабиринт, в котором эти коллективы не решают проблему встречи. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 11. *Если \mathcal{L} — класс всех конечных мозаичных 3-лабиринтов, то $M_{\mathcal{L}}^i = 0$ для любого $0 \leq i \leq 2$.*

4. Проблема типовой встречи в прямоугольных лабиринтах

Интересно также исследовать предикаты $M_{\mathcal{L}}^0$, $M_{\mathcal{L}}^1$ и $M_{\mathcal{L}}^2$, когда \mathcal{L} является классом всех конечных прямоугольных лабиринтов или классом всех прямоугольных лабиринтов, т.е. когда мы отбрасываем условие одинаковой длины всех ребер. Поскольку множество всех конечных мозаичных лабиринтов \mathcal{L}_{fm} является подмножеством множества всех конечных прямоугольных лабиринтов \mathcal{L}_{fr} , предикаты $M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^0$, $M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^1$ и $M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^2$ берут значение 0 там, где соответственно предикаты $M_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^0$, $M_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^1$ и $M_{\mathcal{L}_{\text{fm}}}^2$ берут значение 0. Также, в [15] показано, что существует универсальный обходчик типа (1, 2) и универсальный обходчик типа (2, 0) для класса всех конечных прямоугольных лабиринтов. Отсюда следует, что имеет место утверждение аналогичное теореме 9 и для случая всех конечных прямоугольных лабиринтов.

Теорема 12. $U(M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^0) = \{(1, 2, 1, 0), (2, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (1, 2, 1, 0)\}$ и $U(M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^1) = U(M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^2) = \{(1, 2), (2, 0)\}$.

Доказательство этой теоремы можем провести таким же способом, как и в случае конечных мозаичных лабиринтов (см. теорему 10). Однако, когда рассматриваем предикаты $M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^1$ и $M_{\mathcal{L}_{\text{fr}}}^2$ в точках (1, 2) и (2, 0), любой из двух соответствующих коллективов автоматов ведет себя следующим образом: сначала он работает как универсальный обходчик класса всех конечных прямоугольных лабиринтов, пока не окажется в вершине, которая принадлежит границе внешней грани данного лабиринта, а потом все его автоматы кроме того, который движется вдоль положительной границы внешней грани, остаются в этой вершине.

Пусть \mathcal{L} — некоторый класс прямоугольных лабиринтов. Если M — один из предикатов $M_{\mathcal{L}}^1$ и $M_{\mathcal{L}}^2$, и значение его в точке (i, j) равно 1, то

говорим, что *сложность* предиката \mathbf{M} в точке (i, j) есть $O(f(n))$, где $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ данная натуральная функция натурального переменного, если существует положительная константа C и существуют соответствующие коллективы типа (i, j) , которые решают проблему встречи в любом лабиринте из \mathcal{L} , имеющем n вершин за время, не превышающее значения $Cf(n)$. Подобным образом можно ввести сложность предиката $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^0$.

Из того, как мы устанавливали значения предикатов $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ в случае, когда \mathcal{L} — класс конечных мозаичных лабиринтов, и из оценки сложности соответствующего алгоритма обхода этого класса лабиринтов, данной в работе [9], нетрудно убедиться, что в точке $(1, 2)$ сложность этих предикатов есть $O(n^3)$ а в точке $(2, 0)$ — $O(n^2)$.

Также из того, как мы устанавливали значения предикатов $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ в случае, когда \mathcal{L} — класс конечных прямоугольных лабиринтов, и из оценки сложности соответствующего алгоритма обхода этого класса лабиринтов, данной в работе [15], нетрудно убедиться, что в точке $(1, 2)$ сложность этих предикатов есть $O(n^4)$, а в точке $(2, 0)$ — $O(n^3)$.

Данные оценки сложности можно улучшить, даже сделать их на порядок лучше. Покажем это на примере конечных прямоугольных лабиринтов.

Симметричный орграф $G = (V, E)$ является *прямолинейным плоским*, если $V \subseteq \mathbf{R}^2$ и множество $T = \{\overline{xy} \mid (x, y) \in E\}$ является конфигурацией (напомним, что существует так называемая теорема Фари о распрямлении графа, согласно которой любой простой планарный граф имеет плоское представление, в котором все ребра изображены в виде отрезков прямых).

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$, где $x_n = x_0$, — некоторый его замкнутый маршрут.

Конечную последовательность x_i, x_{i+n}, \dots, x_j вершин маршрута ρ , где $0 \leq i < n$ и $j = i + n k$ для некоторого $0 \leq k < n$, назовем ρ -*интервалом* и обозначим через $[x_i, x_j]$; вершины x_i и x_j называются *концами* этого ρ -интервала, а все остальные его вершины являются его *внутренними вершинами* (через $-_n$ и $+_n$ обозначаем соответственно операции вычитания и суммирования по модулю n). Если все вершины ρ -интервала $[x_i, x_j]$ различные, то назовем его *простым ρ -интервалом*.

Пусть $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ — два ρ -интервала, и пусть a_1 и a_2 , $0 \leq a_1, a_2 < n$, — такие числа, что $l_1 = k_1 +_n a_1$ и $l_2 = k_2 +_n a_2$.

Пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \cap [x_{k_2}, x_{l_2}] = \emptyset$ и говорим, что ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ *дизъюнктные*, если существует натуральное число b такое, что $k_2 = l_1 +_n b$ и $0 < a_1 + b + a_2 < n$. Пишем $[x_{k_2}, x_{l_2}] \subseteq [x_{k_1}, x_{l_1}]$, если $k_2 = k_1 +_n b_1$ и $l_1 = l_2 +_n b_2$ для некоторых $0 \leq b_1, b_2 \leq a_1$.

Говорим, что простые ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ являются *противоположными*, и пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \Downarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]$, если $1 \leq a_1 = a_2 = a \leq n/2$ и если или $l_1 = k_2$ и $x_{l_1-nm} = x_{k_2+nm}$, или $l_2 = k_1$ и $x_{l_2-nm} = x_{k_1+nm}$ для любого $0 \leq m \leq a$. Без ограничения общности, в будущем, когда пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \Downarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]$, считаем, что $l_1 = k_2$; вершину $x_{l_1} = x_{k_2}$ назовем *пиковой* для ρ . Пиковая вершина y маршрута ρ называется *настоящей*, если существуют простые ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ такие, что $[x_{k_1+n1}, x_{l_1}] \Downarrow [x_{k_2}, x_{l_2-n1}]$, $x_{l_1} = x_{k_2} = y$, $x_{k_1} \neq x_{l_2}$ и $\angle x_{k_1}x_{k_1+n1}x_{l_2} > 0$, где $\angle x_{k_1}x_{k_1+n1}x_{l_2}$ — тот из двух возможных углов, который не содержит вершину x_{k_1+n2} . ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ называются ρ -интервалами, *определяющими* настоящую пиковую вершину y .

Пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \Uparrow [x_{k_2}, x_{l_2}]$ $[[x_{k_1}, x_{l_1}] \Downarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]]$, если ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ дизъюнктивные, $a_1 = a_2 = a$ и

$$x_{k_1+nm} = x_{k_2+nm} \quad [x_{k_1+nm} = x_{l_2-nm}]$$

для любого $0 \leq m \leq a$.

Пусть x, y, z и w — четыре точки плоскости такие, что векторы $\vec{x}y$, $\vec{x}z$ и $\vec{x}w$ являются ненулевыми и векторы $\vec{x}z$ и $\vec{x}w$ являются неколлинеарными. Тогда пусть $-2\pi \leq \alpha_1 < 0$ [$-2\pi \leq \alpha_2 < 0$] — отрицательный угол поворота вокруг точки x , который переводит вектор $\vec{x}y$ в вектор коллинеарный вектору $\vec{x}z$ [$\vec{x}w$]. Пусть $\alpha_x(y, z, w) = \alpha_2 - \alpha_1$.

Пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \parallel [x_{k_2}, x_{l_2}]$ и говорим, что дизъюнктивные ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ находятся в *правильном соотношении*, если $a_1 = a_2 = a \geq 2$ и если удовлетворено одно из следующих трех условий:

- 1) $a = 2$ и ни одна из вершин x_{k_1} и x_{l_1} не совпадает ни с одной из вершин x_{k_2} и x_{l_2} (случай 1);
- 2) $a \geq 3$, и при этом $[x_{k_1+n1}, x_{l_1-n1}] \Uparrow [x_{k_2+n1}, x_{l_2-n1}]$, $x_{k_1} \neq x_{l_2}$ и $x_{l_1} \neq x_{k_2}$ (случай 2);
- 3) $a \geq 3$, и при этом $[x_{k_1+n1}, x_{l_1-n1}] \Uparrow [x_{k_2+n1}, x_{l_2-n1}]$, $x_{k_1} \neq x_{k_2}$ и $x_{l_1} \neq x_{l_2}$ (случай 3).

Обозначим через $\alpha([x_{k_1}, x_{l_1}], [x_{k_2}, x_{l_2}])$ значение

$$\alpha_{x_{k_1+n1}}(x_{k_1+n2}, x_{k_1}, x_{l_2})\alpha_{x_{l_1-n1}}(x_{l_1-n2}, x_{l_1}, x_{k_2}),$$

если имеет место случай 2, или значение

$$\alpha_{x_{k_1+n1}}(x_{k_1+n2}, x_{k_1}, x_{k_2})\alpha_{x_{l_1-n1}}(x_{l_1-n2}, x_{l_1}, x_{l_2})$$

если имеет место случай 3.

Пару вершин (x_i, x_j) , $0 < i < j \leq n$, маршрута ρ называем его *квазипересечением*, если $x_i = x_j$. Квазипересечение (x_i, x_j) назовем *настоящим*, если существуют ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ такие, что:

- 1) вершина x_i является внутренней вершиной ρ -интервала $[x_{k_1}, x_{l_1}]$,
- 2) вершина x_j является внутренней вершиной ρ -интервала $[x_{k_2}, x_{l_2}]$,
- 3) или ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ определяют настоящую пиковую вершину, или они находятся в правильном соотношении.

Настоящее квазипересечение (x_i, x_j) является *касанием*, если имеет место одно из следующих условий:

- 1) ρ -интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ определяют настоящую пиковую вершину;
- 2) имеет место или случай 2, или случай 3, и $\alpha(x_{k_1}, x_{l_1}; x_{k_2}, x_{l_2}) < 0$;
- 3) имеет место случай 1 и угол $\angle x_{k_1} x_{k_1+n} x_{l_1}$ (любой из двух возможных) или содержит обе вершины x_{k_2} и x_{l_2} , или не содержит ни одну из них.

Если настоящее квазипересечение (x_i, x_j) не является *касанием*, то его назовем *самопересечением*.

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф. Нетривиальный замкнутый маршрут орграфа G называется *регулярным*, если все его квазипересечения настоящие. Регулярный замкнутый маршрут орграфа G называется *квазипростым контуром*, если все его квазипересечения являются касаниями.

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ — некоторый его нетривиальный регулярный замкнутый маршрут. Каждой вершине x_i , $1 \leq i \leq n$, маршрута ρ присоединим число $\alpha(x_i)$ следующим способом. Если x_i — настоящая пиковая вершина маршрута ρ , то $\alpha(x_i) = -\pi/2$; в противном случае переведем точку x_{i-n} в точку x'_{i-n} с помощью центральной симметрией относительно точки x_i , и положим, что $\alpha(x_i)$ — угловая мера со знаком угла $\angle x'_{i-n} x_i x_{i+n}$ (меньшего из двух возможных); положительным направлением отсчета углов считается направление против часовой стрелки (см. рис. 7). *Поворотом* вдоль маршрута ρ называем число

$$\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i).$$

Ясно, что повороты вдоль двух циклически одинаковых нетривиальных регулярных замкнутых маршрутов одинаковые.

Пусть $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$, $n \geq 3$, — простой контур в G . Поскольку тогда замкнутая ломаная линия без самопересечения $x_0 x_1 \dots x_n$ является контуром многоугольника (в общем случае невыпуклого), то имеет место следующее утверждение.

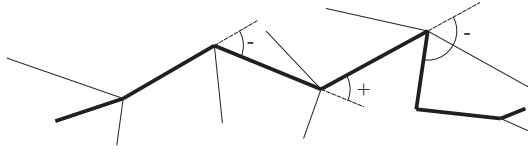


Рис. 7.

Теорема 13. Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и ρ — некоторый его простой контур длины ≥ 3 . Тогда $\alpha_{\circ}(\rho) = -2\pi$ или $\alpha_{\circ}(\rho) = 2\pi$.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф, и $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ — некоторый его замкнутый маршрут.

Маршрут ρ *проходит* по некоторому ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$ орграфа G , если или $[y_1, y_2]$, или $[y_2, y_1]$ является ρ -интервалом. Маршрут ρ *проходит* через некоторую вершину y орграфа G , если $y = x_i$ для некоторого $0 \leq i \leq n - 1$.

Пусть y_1 и y_2 — две смежные вершины орграфа G (смежные в соответствующем простом графе), и положим, что маршрут ρ проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$. Пусть $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, — все вхождения дуг (y_1, y_2) и (y_2, y_1) в маршрут ρ ; любую из дуг e_{i_j} , $1 \leq j \leq k$, назовем *вхождением* ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ в ρ . Назовем число k *кратностью маршрута ρ вдоль ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$* .

Для любых двух смежных вершин y_1 и y_2 орграфа G введем число $\|\rho\|_{\langle y_1, y_2 \rangle}$ следующим образом. Пусть $\|\rho\|_{\langle y_1, y_2 \rangle} = 0$, если маршрут ρ не проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$, и $\|\rho\|_{\langle y_1, y_2 \rangle} = k - 1$, если маршрут ρ проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$, и его кратность вдоль ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ равна k . *Мерой дублирования по дугам* маршрута ρ в орграфе G назовем число

$$\|\rho\| = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} \|\rho\|_{\langle x,y \rangle}.$$

Пусть y — вершина орграфа G , и положим, что маршрут ρ проходит через вершину y . Пусть $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, $1 \leq k < n$, — все *вхождения* вершины y в маршрут ρ . Назовем число k *кратностью маршрута ρ в вершине y* .

Для любой вершины y орграфа G введем число $\|\rho\|_y$ следующим образом. Пусть $\|\rho\|_y = 0$, если маршрут ρ не проходит через вершину y , и $\|\rho\|_y = k - 1$, если маршрут ρ проходит через вершину y , и его кратность в вершине y равна k . *Мерой дублирования по вершинам* маршрута ρ в

орграфе G назовем число

$$\|\rho\|_0 = \sum_{v \in V} \|\rho\|_v.$$

Теорема 14. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ — некоторый его квазипростой контур. Тогда, $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = \pm 2\pi$.

Доказательство. Пусть $\sigma = x'_0, e'_1, x'_1, \dots, e'_m, x'_m$ — некоторый замкнутый маршрут орграфа G , проходящий по некоторому ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$ орграфа G (см. рис. 8), и предположим, что $\|\sigma\|_{\langle y_1, y_2 \rangle} = 0$. Пусть e'_i — единственное вхождение ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ в σ . Ясно, что к орграфу G можно добавить точку $z \in \mathbf{R}^2$ в качестве его новой вершины, и пары (z, y_1) , (y_1, z) , (z, y_2) и (y_2, z) в качестве его новых дуг, чтобы таким образом полученный орграф G' являлся также прямолинейным плоским симметричным орграфом. Замкнутый маршрут

$$\sigma' = \dots, e'_{i-m-1}, x'_{i-m-1}, (x'_{i-m-1}, z), z, (z, x_i), e'_{i+m-1}, \dots$$

очевидно удовлетворяет свойству $\alpha_{\circlearrowleft}(\sigma') = \alpha_{\circlearrowleft}(\sigma)$ (см. рис. 8). То, что пара (G', σ') таким образом получена из пары (G, σ) , обозначим через $(G, \sigma) \mapsto_z^{e'_i} (G', \sigma')$.

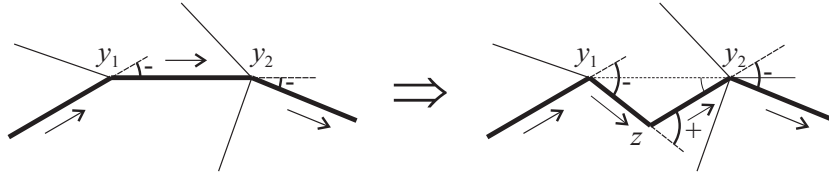


Рис. 8.

Сейчас предположим, что для некоторого ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ орграфа G имеет место $\|\rho\|_{\langle y_1, y_2 \rangle} = k - 1 \geq 1$ (на рис. 9 изображен случай, когда $\|\rho\|_{\langle y_1, y_2 \rangle} = 2$; на этом рисунке представлена только та часть орграфа G , которая содержит ребро $\langle y_1, y_2 \rangle$, и те части маршрута ρ , которые проходят вдоль этого ребра, причем эти части, из-за наглядности, немного отделены). Пусть $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ — все вхождения ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ в ρ . Пусть $x_{i'_1}, x_{i'_2}, \dots, x_{i'_k}$ — вершины соответственно дуг $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ такие, что $x_{i'_j} = x_{i_1}$ для любого $1 \leq j \leq k$ (значит, $i'_j = i_j$ или $i'_j = i_j - n - 1$ для любого $1 \leq j \leq k$). Поскольку для любых $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$ пара $(x_{i'_{j_1}}, x_{i'_{j_2}})$ является касанием, очевидно, что существуют точки плоскости z_j , $1 \leq j \leq k$, такие, что последовательность пар (G_j, ρ_j) , $1 \leq j \leq k$, удовлетворяет условиям $(G_{j-1}, \rho_{j-1}) \mapsto_{z_j}^{e_{i'_j}} (G_j, \rho_j)$ для любого $1 \leq j \leq k$,

где $(G_0, \rho_0) = (G, \rho)$. Тогда пара $(G', \rho') = (G_k, \rho_k)$ является такой, что G' — прямолинейный плоский симметричный орграф, а ρ' — квазипростой контур орграфа G' (на рис. 9 к G добавляем три вершины z_1, z_2 и z_3). Ясно, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $\|\rho'\| < \|\rho\|$. Следовательно можно предположить, что $\|\rho\| = 0$.

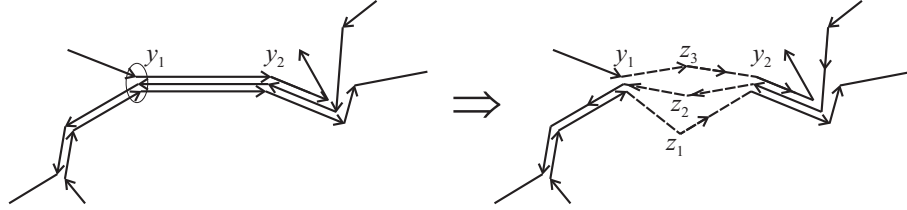


Рис. 9.

Пусть $\|\rho\|_y \geq 1$ для некоторой вершины y орграфа G , и пусть x_i и x_j , $0 < i < j \leq n$, два различных вхождения вершины y в ρ . Ясно, что можно в качестве вершин добавить точки $y_i, z_i, y_j, z_j \notin V(G)$, и убрать вершины x_i и x_j , проделывая с данным орграфом G и данным маршрутом ρ то, что указано на рис. 10, и при этом получить прямолинейный плоский симметричный орграф G' и маршрут ρ' , являющийся квазипростым контуром. Ясно, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $\|\rho'\|_0 < \|\rho\|_0$.

Продельвая описанную операцию пока это возможно, мы можем орграф G и квазипростой контур ρ “превратить” в прямолинейный плоский симметричный орграф G' и квазипростой контур ρ' такой, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $\|\rho'\|_0 = 0$.

Значит, мы можем предположить, что для данного маршрута ρ имеет место $\|\rho\| = 0$ и $\|\rho\|_0 = 0$. Но тогда, очевидно, из теоремы 13 следует, что данное утверждение верно. \square

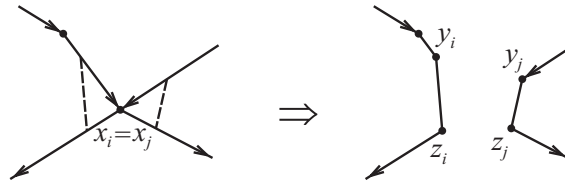


Рис. 10.

Вернемся теперь к прямоугольным лабиринтам и сначала введем некоторые необходимые понятия и обозначения.

Пусть $\alpha = \omega_1 \dots \omega_n \in \mathfrak{D}^+$ — произвольное слово из \mathfrak{D}^+ . Через $f(\alpha)$ и $l(\alpha)$ обозначим соответственно первую и последнюю его букву, т.е., $f(\alpha) = \omega_1$ и $l(\alpha) = \omega_n$. Через $\alpha|_i^j$, где $1 \leq i \leq j \leq n$, обозначим подслово

$\omega_i \dots \omega_j$ слова α . Говорим, что слово $\beta \in \mathfrak{D}^*$ является началом [концом] слова α , если существует слово $\gamma \in \mathfrak{D}^*$, такое, что $\alpha = \beta\gamma$ [$\alpha = \gamma\beta$]; β является собственным началом [концом] слова α , если β является началом [концом] слова α и $\beta \neq \alpha$.

Для любого слова $\alpha \in \mathfrak{D}^*$ через $\nu(\alpha)$ обозначим слово, полученное из α , когда в нем заменим, пока это возможно, любое вхождение подслов $\omega\omega^{-1}$, $\omega \in \mathfrak{D}$, на пустое слово Λ , или, как мы еще будем говорить, $\nu(\alpha)$ получается из α *исчерпывающим применением* правил редукции $\omega\omega^{-1} \rightarrow \Lambda$, $\omega \in \mathfrak{D}$ (например, если $\alpha = \mathbf{wwnsesnn}$, то $\nu(\alpha) = \mathbf{wn}$). Легко убедиться, что невзирая на порядок выполнения этих правил редукции над словом α , результатом их исчерпывающего применения является то же самое слово, которое мы и обозначаем через $\nu(\alpha)$. Непустое слово $\alpha \in \mathfrak{D}^+$ является *простым словом* над \mathfrak{D} , если $\alpha = \nu(\alpha)$; через $\text{Sim}(\mathfrak{D})$ обозначим множество всех простых слов над \mathfrak{D} .

Теперь над словами множества $\text{Sim}(\mathfrak{D})$ будем применять правила редукции $\omega\omega \rightarrow \omega$ и $\omega\omega'\omega \rightarrow \omega$, где ω и ω' , $\omega \neq \omega'$, — произвольные элементы множества \mathfrak{D} . Нетрудно удостовериться, что исчерпывающее применение этих правил редукции, в любом порядке, над любым словом $\alpha \in \text{Sim}(\mathfrak{D})$ дает в качестве результата всегда одно и то же слово, которое мы обозначим через $[\alpha]$ (это можно сделать, например, применением математической индукции к длине слова α).

Введем подмножество $\text{Sim}_0(\mathfrak{D}) \subseteq \text{Sim}(\mathfrak{D})$ следующим образом: слово $\alpha = \omega_1 \dots \omega_n \in \text{Sim}(\mathfrak{D})$ принадлежит $\text{Sim}_0(\mathfrak{D})$ тогда и только тогда, когда $\omega_1 \neq \omega_n^{-1}$.

На множестве $\text{Sim}_0(\mathfrak{D})$ введем отношение эквивалентности \sim следующим образом: для любых $\alpha', \alpha \in \text{Sim}_0(\mathfrak{D})$, имеет место $\alpha' \sim \alpha$, если существуют слова $\beta, \beta' \in \mathfrak{D}^*$ такие, что $\alpha = \beta\beta'$ и $\alpha' = \beta'\beta$. Классы эквивалентности отношения \sim называются (*простыми*) *циклическими словами* над \mathfrak{D} ; каждый из этих классов будем обозначать просто любым его представителем с \circlearrowleft в индексе. Через K^+ обозначим циклическое слово $\mathbf{enws}_{\circlearrowleft}$, а через K^- обозначим циклическое слово $\mathbf{eswn}_{\circlearrowleft}$.

Возьмем произвольное слово $\alpha \in \text{Sim}(\mathfrak{D})$. Очевидно, что $f([\alpha]) = f(\alpha)$ и $l([\alpha]) = l(\alpha)$. В [16] показано (в чем нетрудно убедиться), что существуют $\beta \in K^- \cup K^+$, $n \in \mathbf{N}_0$ и некоторое собственное начало β' слова β такие, что $[\alpha] = \beta^n \beta'$; здесь полагаем, что $\beta^0 = \Lambda$.

Пусть $\alpha = \omega_1 \dots \omega_n \in \mathfrak{D}^+$ — произвольное слово. Применим над словом α всевозможные замены вида $\omega\omega^{-1} \rightarrow \omega\sigma_-(\omega)\omega^{-1}$, $\omega \in \mathfrak{D}$. Полученное слово обозначим через $|\alpha|$. Очевидно, что $f(|\alpha|) = f(\alpha)$ и $l(|\alpha|) = l(\alpha)$. Обозначим через $|\alpha|^\circ$ слово $|\alpha|\sigma_-(\omega_n)$, если $\omega_1 = \omega_n^{-1}$; в противном случае положим, что $|\alpha|^\circ = |\alpha|$. Заметим, что $|\alpha| \in \text{Sim}(\mathfrak{D})$ и $|\alpha|^\circ \in \text{Sim}_0(\mathfrak{D})$ для любого $\alpha \in \mathfrak{D}^+$.

Пусть M_1, \dots, M_n — различные точки плоскости, такие что $M_i \neq M_{i+1}$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. Ломаной $M_1 \dots M_n$ будем считать ориентированную кривую, для которой стандартным представлением является непрерывная функция $r : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, линейно отображающая каждый отрезок $[i/n, (i+1)/n]$ ($0 \leq i \leq n-1$) на отрезок $\overline{M_i M_{i+1}}$. Отрезки $\overline{M_i M_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n-1$, называются звеньями ломаной. Из данного определения следует, что два звена ломаной могут пересекаться, могут содержаться одно в другом и даже совпадать.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и

$$x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, e_n, x_n \quad (1)$$

— некоторый его маршрут. Ломаную $x_0 x_1 x_2 \dots x_n$, определенную вершинами маршрута (1), назовем его *прямоугольным следом*. Маршрут (1) называется *f-маршрутом*, если $x_i \in b(f)$ для любого $0 \leq i \leq n$. Маршрут (1) называется *положительным* [отрицательным] *f-маршрутом*, если он является *f-маршрутом*, если

$$|e_{i+1}| = (|e_i|^{-1})^-([x_i]) \quad [|e_{i+1}| = (|e_i|^{-1})^+([x_i])]$$

для любого $0 \leq i \leq n-1$ и если f находится слева [справа] от дуги e_1 . Заметим, что если маршрут (1) является положительным [отрицательным] *f-маршрутом*, то грань f находится слева [справа] от дуги e_i для любого $1 \leq i \leq n$.

Маршрут (1) называется *○-границей* грани f (с вершиной привязки x_0), если он положительный *f-маршрут*, если он замкнут, т.е. $x_0 = x_n$, и если $|e_1| = (|e_n|^{-1})^-([x_n])$. Очевидно, что все *○-границы* грани f “циклически одинаковы” и отличаются только своими точками привязки.

Пусть L — прямоугольный лабиринт. Для любого $x \in V(L)$ пару $(x, \overleftarrow{\omega})$ [$(x, \overrightarrow{\omega})$] назовем *←-точкой* [*→-точкой*] лабиринта L , если $\overleftarrow{\omega} \in [x]$ [$\overrightarrow{\omega} \in [x]$]. Вершина x называется *носителем* ←-точки $(x, \overleftarrow{\omega})$ [*→-точки* $(x, \overrightarrow{\omega})$] лабиринта L . В дальнейшем, пару $(x, \overleftarrow{\omega})$ [$(x, \overrightarrow{\omega})$] обозначим через $x|_{\overleftarrow{\omega}}$ [$x|_{\overrightarrow{\omega}}$] и, если не акцентируем ее тип, назовем *орточкой* лабиринта L . Орточку лабиринта L назовем *внутренней*, если лабиринт L конечен и носитель этой орточки не принадлежит множеству $b(f_\infty(L))$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт и f — некоторая его грань. Пусть маршрут (1) является *○-границей* грани f . Орточку $(x, \overleftarrow{\omega})$ [$(x, \overrightarrow{\omega})$] лабиринта L назовем *←-точкой* [*→-точкой*] грани f , если $x = x_i$ [$x = x_{i-1}$] и $\omega = |e_i|$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Ясно, что если $(x, \overleftarrow{\omega})$ [$(x, \overrightarrow{\omega})$] является ←-точкой [*→-точкой*] грани f , то она является такой при любом выборе вершины привязки для *○-границы* грани f , и существует только одно значение i , удовлетворяющее верхнему условию. Из-за предыдущего замечания вершину x_i [x_{i-1}] будем иногда называть *←-точкой* [*→-точкой*]

точкой] грани f . Также ясно, что некоторая вершина $x \in b(f)$ может быть носителем нескольких $\overleftarrow{\omega}$ -точек [$\overrightarrow{\omega}$ -точек] грани f .

Предположим опять, что маршрут (1) является \circlearrowleft -границей грани f . Выделим n точек $x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}$ множества f , а также, для любого $0 \leq i \leq n-1$, выделим точку x''_i множества f , если x_i является висячей вершиной в L . Все эти точки выбираем так, чтобы они между собой различались. Несложно убедиться (см. рис. 11), что эти точки можно выбрать таким образом, что они будут определять прямоугольный циклический лабиринт, в котором для любого $0 \leq i \leq n-1$:

если x_i является висячей вершиной в L , то вершины x'_i и x''_i , а также вершины x''_i и x'_{i+n1} , являются смежными, $|(x'_i, x''_i)| = \sigma_- |e_i|$ и $|(x''_i, x'_{i+n1})| = |(x_i, x_{i+n1})|$;

если x_i не является висячей вершиной в L , то вершины x'_i и x'_{i+n1} являются смежными и $|(x'_i, x'_{i+n1})| = |(x_i, x_{i+n1})|$.

Ясно (см. рис. 11), что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно предположить, что расстояние (в евклидовой плоскости) между точками x_i и x'_i , а также между точками x_i и x''_i (если такие пары существуют) меньше ε . Обозначим через $L_\varepsilon(f)$ лабиринт такого типа. Также пусть $\overline{x'_i} = x_i$ и $\overline{x''_i} = x_i$ (если определено x''_i) для любого $0 \leq i \leq n-1$. На рис. 11 прерывистой линией представлен лабиринт $L_\varepsilon(f)$ для выделенной грани f изображенного прямоугольного лабиринта L .

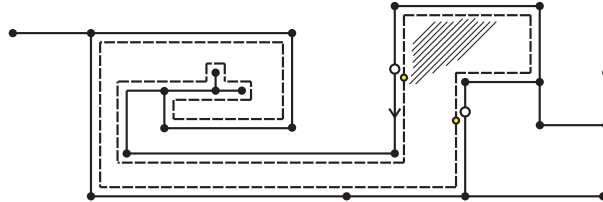


Рис. 11.

\circlearrowleft -границу единственной ограниченной грани \hat{f}_ε лабиринта $L_\varepsilon(f)$ назовем *расширенной \circlearrowleft -границей* грани f ; дуги этой границы типа (x'_i, x''_i) назовем *виртуальными*, а остальные — *реальными дугами* грани f . Дуга грани f , соответствующая реальным дугам (x'_i, x'_{i+n1}) и (x''_i, x'_{i+n1}) , есть дуга (x_i, x_{i+n1}) . Если маршрут (1) является \circlearrowleft -границей грани f с вершиной привязки x_0 , то сопряженной с ней расширенной \circlearrowleft -границей является расширенная \circlearrowleft -граница грани f с вершиной привязки x''_0 , если x_0 является висячей вершиной, или с вершиной привязки x'_0 , если x_0 не является висячей вершиной.

Все орточка грани \hat{f}_ε в $L_\varepsilon(f)$ являются *виртуальными орточками* грани f в L . *Реальным носителем* виртуальной орточки любого типа с носителем x'_i или x''_i , если x''_i существует для данного i , назовем вершину

x_i ; $0 \leq i \leq n - 1$. В последующем, виртуальную орточку всегда будем представлять в виде пары, первый компонент у которой — ее реальный носитель, а второй — ее тип, поскольку эти два элемента полностью определяют данную виртуальную точку. С любой орточкой $x|_{\overrightarrow{\omega}}$ $[x|_{\overleftarrow{\omega}}]$ грани f сопряжена виртуальная орточка $x|_{\overrightarrow{\omega}}$ $[x|_{\overleftarrow{\omega}}]$ грани f .

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань, и $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$ — две орточки [виртуальные орточки] грани f . Пусть

$$x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_n, x_n$$

есть \cup -граница [расширенная \cup -граница] грани f такая, что $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = x_0|_{\overrightarrow{e_1}}$ $[v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = \bar{x}_0|_{\overrightarrow{e_1}}]$. Тогда $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = x_i|_{\overleftarrow{e_i}}$ $[v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = \bar{x}_i|_{\overleftarrow{e_i}}]$ для некоторого $0 < i \leq n$. Обозначим через

$$\rho_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) \quad [\hat{\rho}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})]$$

маршрут $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_i, x_i$ и назовем его *частью \cup -границы* [расширенной \cup -границы] грани f в L между орточками [виртуальными орточками] $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$, а через

$$\alpha_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) \quad [\hat{\alpha}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})]$$

обозначим слово $|e_1||e_2| \dots |e_i|$ и назовем его словом, *соответствующим* этой части. Словом *соответствующим \cup -границе* [расширенной \cup -границе] грани f (с вершиной привязки x_0) является слово $|e_1||e_2| \dots |e_n|$ $[|e_1||e_2| \dots |e_n|]$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань, $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$ — две орточки грани f , и $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_n, x_n$ — \cup -граница грани f такая, что $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = x_0|_{\overrightarrow{e_1}}$. Тогда, как и выше, $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = x_i|_{\overleftarrow{e_i}}$ для некоторого $0 < i \leq n$. Пусть

$$\alpha_f^\circ(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) = |e_1||e_2| \dots |e_i|.$$

Заметим, что $\alpha_f^\circ(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) = \hat{\alpha}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})$, когда $i < n$ (см. вышеданный договор о написании виртуальных орточек).

Число $\kappa_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})$ назовем *кручением \cup -границы* грани f между орточками $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$, если

$$[\alpha_f^\circ(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})] = \beta^{\kappa_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})} \beta'$$

для некоторого слова $\beta \in K^- \cup K^+$ и некоторого настоящего начала β' слова β . Из вышесказанного следует, что кручение границы данной грани между любыми ее орточками всегда определено.

Пусть $\alpha_\cup \in \text{Sim}_0(\mathfrak{D}) / \sim$ — произвольное циклическое слово. Рассмотрим правила редукции $\omega\omega \rightarrow \omega$ и $\omega\omega'\omega \rightarrow \omega$, где ω и ω' , $\omega \neq \omega'$, —

произвольные элементы множества \mathfrak{D} , а также правило циклического сдвига $\alpha\beta \rightarrow \beta\alpha$, где α и β произвольные слова из \mathfrak{D}^+ . Нетрудно удостовериться, что применяя эти правила, в любой последовательности, до тех пор, пока можно получить новый результат, из слова $\alpha_{\circlearrowleft}$ получим одно и то же циклическое слово, которое обозначим через $[\alpha]_{\circlearrowleft}$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и $x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ — \circlearrowleft -граница грани f . Пусть $[f] = [1|e_1||e_2|\dots|e_n||^{\circlearrowleft}]_{\circlearrowleft}$. Из результатов работ [16] и [17] имеем следующее утверждение.

Теорема 15. Пусть L — прямоугольный лабиринт и f — некоторая его грань. Тогда $[f] = \mathbf{enws}_{\circlearrowleft}$, если f — внутренняя грань лабиринта L и $[f] = \mathbf{eswn}_{\circlearrowleft}$, если f — его внешняя грань.

Для любого замкнутого маршрута ρ прямоугольный лабиринт L обозначим через $[\rho]$ слово $[1|\rho||^{\circlearrowleft}]_{\circlearrowleft}$. Нетрудно убедиться, что также имеет место следующее утверждение (см. теорему 14).

Теорема 16. Для любого нетривиального квазипростого контура ρ прямоугольного лабиринта L имеет место, что $[\rho] = \mathbf{enws}_{\circlearrowleft}$ $[[\rho] = \mathbf{eswn}_{\circlearrowleft}]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = 2\pi$ $[\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = -2\pi]$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, и пусть p — некоторая прямая. Говорим, что прямая p пересекается с некоторой дугой (x, y) лабиринта L , если p содержит только одну внутреннюю точку отрезка \overline{xy} .

В последующем тексте, для любых целых чисел i и j , $i \leq j$, иногда будем обозначать через $\overline{i, j}$ множество всех целых чисел n , удовлетворяющих условию $i \leq n \leq j$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{s}}$ — его произвольная \overrightarrow{s} -точка, f — грань лабиринта L , находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(vs)}$, и $b_{\overleftarrow{n}}(f)$ — множество всех \overleftarrow{n} -точек грани f . Множество всех орточек $x|_{\overleftarrow{n}} \in b_{\overleftarrow{n}}(f)$ таких, что $\alpha_f^{\circlearrowleft}(v|_{\overrightarrow{s}}, x|_{\overleftarrow{n}}) = \mathbf{sen}$ назовем 0 -классом орточки $v|_{\overrightarrow{s}}$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 17. 0 -класс любой внутренней орточки прямоугольного лабиринта является непустым.

Доказательство. Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{s}}$ — его произвольная внутренняя \overrightarrow{s} -точка, f — внутренняя грань лабиринта L , находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(vs)}$, и $x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$, где $(x_0, |e_1|) = v|_{\overrightarrow{s}}$, — \circlearrowleft -граница грани f .

Проложим прямую p параллельную x -оси через некоторую внутреннюю точку w_1 отрезка $\overline{v(vs)}$ так, чтобы она не содержала ни одну вершину лабиринта L . Ясно, что можно выбрать достаточно малое $\varepsilon > 0$ так, что прямая p не пересекается ни с одной виртуальной дугой грани f .

Пусть T — первая, лежащая на прямой p справа от w_1 , точка множества $\overline{L_\varepsilon(f)}$, и пусть e — реальная дуга грани f , пересекающаяся с прямой p именно в точке T . Очевидно, что $|e| = \mathbf{n}$. Пусть (x_{i-1}, x_i) ($0 < i < n$) дуга лабиринта L соответствующая ее реальной дуге e . Обозначим через w_2 точку пересечения прямой p с отрезком $\overline{x_{i-1}x_i}$. Рассмотрим лабиринт $(L \oplus w_1) \oplus w_2$ и добавим к нему в качестве новых дуг пары (w_1, w_2) и (w_2, w_1) . Положим, что $(w_1, w_2) = \mathbf{e}$ и $(w_2, w_1) = \mathbf{w}$. Обозначим таким способом полученный лабиринт через L' . Тогда маршрут

$$w_1, (w_1, x_1), x_1, e_2, x_2, \dots, x_{i-2}, e_{i-1}, x_{i-1}, (x_{i-1}, w_2), w_2, (w_2, w_1), w_1$$

является \circlearrowleft -границей некоторой ограниченной грани f' лабиринта L' . Поскольку $[f'] = \mathbf{senw}$ (см. теорему 15), а также вершины w_1 и w_2 являются вершинами степени 2, то

$$[|(w_1, x_1)||e_2| \dots |e_{i-1}||x_{i-1}, w_2|] = \mathbf{sen}.$$

Отсюда следует, что орточка $x_i|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ принадлежит 0-классу орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, и наша теорема верна. \square

Теорема 18. Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его внутренняя грань, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ -точка грани f и $x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$ — расширенная \circlearrowleft -граница грани f , где $\overline{x_0}|_{\overrightarrow{e_1}}$ — виртуальная орточка, которая сопряжена с орточкой $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Если i_0 — минимальное число среди чисел $\overline{1, n}$ такое, что $[|e_1||e_2| \dots |e_{i_0}|] = \mathbf{sen}$, то e_{i_0} — реальная дуга грани f , и, следовательно, $\overline{x_{i_0}}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ является орточкой грани f , которая принадлежит 0-классу орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$.

Доказательство. Заметим сначала, что из теоремы 17 следует, что упомянутое в условиях теоремы число i_0 существует.

Предположим, что имеет место обратное, т.е. дуга e_{i_0} является виртуальной дугой грани f . Но тогда $[|e_1||e_2| \dots |e_{i_0-1}|] = \mathbf{s} \dots \mathbf{w}$ и, следовательно, $[|e_1||e_2| \dots |e_{i_0-1}|] = \mathbf{senw}$. Значит, i_0 не является минимальным числом среди чисел $\overline{1, n}$ таким, что $[|e_1||e_2| \dots |e_{i_0}|] = \mathbf{sen}$. Из полученного противоречия следует утверждение теоремы. \square

Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — некоторая его $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ -точка, f — грань лабиринта L , находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(\mathbf{vs})}$, и

$$x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n,$$

где $(x_0, \overline{e_1}) = v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — \circlearrowleft -граница грани f . Предположим, что существует $1 \leq i_0 < n$ такое, что орточка $x_{i_0}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ принадлежит 0-классу орточки

$v|_{\vec{s}} = x_0|_{\vec{s}}$, а для любого $1 \leq i < i_0$ орточка $(x_i, \overleftarrow{e_i})$ не принадлежит ему. Орточку $x_{i_0}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ назовем *дочерней орточкой* орточки $v|_{\vec{s}}$. Маршрут $x_0, e_1, x_1, \dots, e_{i_0}, x_{i_0}$ назовем *шагом (f -шагом)* с началом v и концом x_{i_0} ; вершины $x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}$ называются *внутренними вершинами* этого шага. Из теоремы 18 следует, что в случае, когда f — ограниченная грань лабиринта L , то f -шаг с началом v и, следовательно, соответствующая дочерняя орточка орточки $v|_{\vec{s}}$ всегда существуют.

Пусть L — конечный прямоугольный лабиринт, $v_1|_{\vec{s}}$ — некоторая его \vec{s} -точка, f_1 — грань лабиринта L , находящаяся слева от вектора $v_1(v_1\mathbf{s})$. Если $f_1 \neq f_\infty(L)$, то пусть $v_2|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ — дочерняя орточка орточки $v_1|_{\vec{s}}$, а f_2 — грань, которая находится справа от вектора $v_2(v_2\mathbf{s})$ (не исключаем случай, когда $f_2 = f_1$). Пусть $\rho_1 = \rho'_1$ — f_1 -шаг с началом v_1 и с концом v_2 . Если $f_2 \neq f_\infty(L)$, то пусть $v_3|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ — дочерняя орточка \vec{s} -точки $v_2|_{\vec{s}}$, а f_3 — грань, которая находится справа от вектора $v_3(v_3\mathbf{s})$. Пусть ρ'_2 — f_2 -шаг с началом v_2 и с концом v_3 и пусть $\rho_2 = \rho_1 + \rho'_2$. Продолжаем эту процедуру очевидным образом до тех пор, пока для некоторого достаточно большого $k \geq 1$ орточка $v_{k+1}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ не станет орточкой грани $f_\infty(L)$. Если такое k существует, то маршрут $\rho_k = \rho_{k-1} + \rho'_k$ называется *маршрутом свободы* из орточки $v_1|_{\vec{s}}$. Из определения ясно, что маршрутом свободы может быть и нуль-маршрут.

Введенные здесь понятия шага и маршрута свободы практически отвечают понятиям, которые в [15] названы соответственно регулярный взмах (regular swing) и регулярная волна (regular wave), и которые были впервые определены в [18]. Дадим новое доказательство теоремы, которая впервые была доказана в [18] в формулировке, несущественным образом отличающейся от данной ниже.

Теорема 19. *Если L — конечный прямоугольный лабиринт, то для любой \vec{s} -точки $v|_{\vec{s}}$ лабиринта L существует маршрут свободы из нее.*

Доказательство. Будем свободно пользоваться выше данными обозначениями не меняя их смысла. Предположим противное — предположим, что вышеописанная процедура никогда не заканчивается. Маршрут ρ'_i назовем i -шагом (из орточки $v_1|_{\vec{s}} = v|_{\vec{s}}$) для любого $i \geq 1$. Через y_i и z_i обозначим, соответственно, начало и конец i -шага.

Очевидно, что существует минимальное $t_2 > 1$, для которого существует $t_1 \geq 1$ такое, что $t_1 < t_2$ и что конец t_2 -шага тождественно равен началу t_1 -шага. Через ρ обозначим замкнутый маршрут $\rho'_{t_1} + \dots + \rho'_{t_2}$. Если ρ является древовидным, то нетрудно удостовериться, что $[\rho] = (\mathbf{swne}^\lambda)_\circ$, где $\lambda \geq 1$. С другой стороны, поскольку

$$[\rho] = [1\mathbf{sensen} \dots \mathbf{sen}]^\circ_\circ = \mathbf{se}_\circ,$$

этот случай невозможен. Таким образом, можем предположить, что ρ не является древовидным. Покажем, что ρ является квазипростым контуром.

Пусть $\rho = x_0, e_1, x_1, \dots, e_n, x_n$; здесь $x_0 = y_{t_1} = z_{t_2} = x_n$. Предположим, что маршрут ρ не является квазипростым контуром. Тогда существует $4 \leq j < n$ такое, что j является первым таким числом среди чисел $4, n-1$, для которого существует $0 \leq i < j$ такое, что пара (x_i, x_j) является самопересечением и часть $\varepsilon = x_i, e_{i+1}, x_{i+1}, \dots, e_j, x_j$ маршрута ρ является квазипростым контуром. Пусть x_i принадлежит m_1 -шагу, а x_j принадлежит m_2 -шагу, и пусть $x_{i'} = y_{m_1}$, $x_{i''} = z_{m_1}$, $x_{j'} = y_{m_2}$ и $x_{j''} = z_{m_2}$. Нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть следующие два случая (рис. 12):



Рис. 12.

1) x_j является внутренней вершиной m_2 -шага, $x_i = x_{i'}$ является началом m_1 -шага (см. рис. 12 а)), $\alpha_{x_i}(x_{i+n1}, x_{i-n1}, x_{j-n1}) < 0$, а также существует $m \geq 1$ такое, что $x_{j+n} = x_{i+n}$ для любого $1 \leq n \leq m$, вершина x_{j+m} является внутренней вершиной m_1 -шага и $x_{j+m} = x_{j''}$.

Пусть $\alpha = |x_{j'}, e_{j'+1}, \dots, e_j, x_j|$, $\beta = |x_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+m}, x_{i+m}|$ и $\gamma = |x_{i+m}, e_{i+m+1}, \dots, e_{j''}, x_{j''}|$. Заметим, что замкнутый маршрут

$$x_{i+m}, e_{i+m+1}, \dots, e_{j''}, x_{j''}$$

является квазипростым контуром. Возможны два подслучая.

Предположим сначала, что $[1\gamma]^\circ = \mathbf{swne} | \mathbf{eswn} | \mathbf{neswn} | \mathbf{wneswn}$ (заметим, что $l(\gamma) = \mathbf{n}$); здесь с помощью символа $|$ разделяем все возможные значения для $[1\gamma]^\circ$. Поскольку $[1\beta\gamma]^\circ = \mathbf{se}$ и $f(\beta) = \mathbf{s}$, то $[1\beta] = \mathbf{sen} \dots$. Отсюда следует, что m_1 -шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

Предположим сейчас, что $[1\gamma]^\circ = \mathbf{wsen} | \mathbf{senwse} | \mathbf{enwsen} | \mathbf{nwsen}$. Поскольку $[1\beta\gamma]^\circ = \mathbf{se}$, $f(\beta) = \mathbf{s}$ и $l(\beta) = \mathbf{n}$, то $[1\beta] = \mathbf{swn}$, и, следовательно, $[1\alpha] = \mathbf{sen} \dots$, так как $[1\alpha\beta] = \mathbf{sen}$. Отсюда следует, что m_2 -шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

2) $x_j = x_{j''}$ и x_i является внутренней вершиной m_1 -шага (см. рис. 12б)) и $\alpha_{x_i}(x_{i+n1}, x_{i-n1}, x_{j-n1}) > 0$. Очевидно, что существует $m \geq 1$ такое, что $x_{j+n} = x_{i+n}$ для любого $1 \leq n \leq m$, и или $x_{j+m} = z_{m_2+k_0}$ и вершина x_{i+m} является внутренней вершиной m_1 -шага, или $x_{i+m} = x_{i''}$ и вершина x_{j+m} является внутренней вершиной (m_2+k_0) -шага. Пусть $\alpha = |x_{i'}, e_{i'+1}, \dots, e_i, x_i|$, $\beta = |x_i, e_{i+1}, \dots, e_{i''}, x_{i''}|$ и $\gamma = |x_i, e_{i+1}, \dots, e_j, x_j|$. Возможны следующие случаи.

Предположим сначала, что $[1\gamma\downarrow^\circ] = \mathbf{swne}$ (заметим, что $f(\gamma) = \mathbf{s}$ и $l(\gamma) = \mathbf{n}$). Поскольку $[1\alpha\gamma\downarrow^\circ] = \mathbf{se}$ и $f(\alpha) = \mathbf{s}$, то $[1\alpha\downarrow] = \mathbf{sen} \dots$. Следовательно, m_1 -шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

Предположим сейчас, что $[1\gamma\downarrow^\circ] = \mathbf{senwse}$. Поскольку $[1\alpha\gamma\downarrow^\circ] = \mathbf{se}$ и $f(\alpha) = \mathbf{s}$, то $[1\alpha\downarrow] = \mathbf{swn} \dots$, и, следовательно, $[1\beta\downarrow] = \mathbf{senw} \dots$, так как $[1\alpha\beta\downarrow] = \mathbf{sen}$ (заметим, что $f(\beta) = \mathbf{s}$). Отсюда следует, что $x_{j+m} = z_{m_2+k_0}$ и вершина x_{i+m} является внутренней вершиной m_1 -шага. Но тогда $|e_{j+m+1}| = \mathbf{s}$ и $|e_{i+m+1}| \neq \mathbf{s}$, и пара (x_i, x_j) не является самопересечением.

Значит, в любом случае получаем, что (x_i, x_j) не является самопересечением. Из полученного противоречия следует, что маршрут ρ является квазипростым контуром. Из теорем 14 и 16 получаем, что $[\rho] = \mathbf{enws} \circlearrowleft | \mathbf{eswn} \circlearrowleft$. Поскольку это невозможно, то теорема верна. \square

Пусть L - прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и

$$\rho = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, e_n, x_n$$

— \circlearrowleft -граница [расширенная \circlearrowleft -граница] грани f . Также положим, что в текущий момент автомат \mathfrak{A} находится в орточке [виртуальной орточке] $(x_i, \overleftarrow{e}_i)$ грани f ; $1 \leq i \leq n$. Заметим, что в действительности это значит, что автомат находится в вершине лабиринта L , которая является носителем [реальным носителем] данной орточки [виртуальной орточки]. Автомат \mathfrak{A} *передвигается вперед* вдоль ρ на одну позицию, если в следующий момент он оказывается в орточке [виртуальной орточке] $(x_{i+n1}, \overleftarrow{e}_{i+n1})$. Автомат \mathfrak{A} *передвигается назад* вдоль ρ на одну позицию, если в следующий момент он оказывается в орточке [виртуальной орточке] $(x_{i-n1}, \overleftarrow{e}_{i-n1})$. *Следующей орточкой* [виртуальной орточкой] относительно орточки [виртуальной орточки] $(x_i, \overleftarrow{e}_i)$ грани f является орточка [виртуальная орточка] $(x_{i+n1}, \overleftarrow{e}_{i+n1})$.

Наша главная задача сейчас — построить коллектив автоматов, который из любой \overrightarrow{s} -точки любой внутренней грани любого конечного прямоугольного лабиринта L , двигаясь по маршруту свободы этой орточки, выходит на границу грани $f_\infty(L)$ (т.е. все автоматы этого коллектива в некоторый момент оказываются в некоторой \overrightarrow{s} -точке грани $f_\infty(L)$).

Чтобы это сделать, построим сначала коллектив $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{A}_1 | \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, задача которого — организовать работу своеобразного счетчика C , назначение которого объясним ниже. В нем будет храниться неотрицательное число, представленное как “расстояние” между камнями \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 вдоль расширенной \circ -границы текущей грани f данного лабиринта L . Иными словами, число, хранящееся в C в текущий момент, есть число $|\hat{\alpha}_f(v(\mathfrak{K}_1)|_{\vec{\omega}_1}, v(\mathfrak{K}_2)|_{\vec{\omega}_2})|$, где для любого $1 \leq i \leq 2$ через $v(\mathfrak{K}_i)|_{\vec{\omega}_i}$ обозначаем виртуальную орточку грани f , в которой в текущий момент оказался камень \mathfrak{K}_i . Коллектив \mathcal{B}_1 передвигает счетчик C вперед вдоль расширенной \circ -границы грани f , а также увеличивает или уменьшает его значения на 1, когда это требуется “режимом” работы этого коллектива (режим определяется значением целочисленной переменной r).

Опишем программу, по которой “работает” коллектив \mathcal{B}_1 в любом конечном прямоугольном лабиринте L . Местом нахождения (*базовой точкой*) счетчика C считаем виртуальную точку грани f , в которой находится камень \mathfrak{K}_1 . Положим, что в начальный момент имеет место $-1 \leq r \leq 1$, и при этом: счетчик C передвигается и уменьшается на 1, если $r = -1$; счетчик C только передвигается, если $r = 0$; счетчик C передвигается и увеличивается на 1, если $r = 1$. Также положим, что в начальный момент автомат \mathcal{A}_1 и камень \mathfrak{K}_1 находятся в одной и той же виртуальной орточке некоторой грани f лабиринта L . Конец выполнения программы отмечаем присвоением переменной r значения -2 . Выполнив некоторый шаг программы, коллектив \mathcal{B}_1 всегда переходит к следующему шагу, если не сказано иначе. Тогда выполняем следующие шаги (программа Π_1):

1: Если $C = 0$ (все автоматы коллектива \mathcal{B}_1 находятся в одной и той же виртуальной орточке грани f), то автомат \mathcal{A}_1 передвигает оба камня вдоль расширенной \circ -границы грани f на одну позицию вперед.

2: Если $r = 0$ (счетчик C только передвигается), то процедура заканчивается ($r := -2$); в противном случае, если $r = 1$ (счетчик C передвигается и увеличивается на 1), то автомат \mathcal{A}_1 передвигает только камень \mathfrak{K}_2 вдоль расширенной \circ -границы грани f на одну позицию вперед.

3: Если все автоматы коллектива \mathcal{B}_1 оказались в одной и той же вершине, то $r := -2$, а если нет, то автомат \mathcal{A}_1 передвигается вдоль \circ -границы грани f на одну позицию назад и $r := -2$.

4: Если $C \neq 0$, то автомат \mathcal{A}_1 передвигает камень \mathfrak{K}_1 на одну позицию вперед вдоль расширенной \circ -границы грани f ; если $r = -1$, то $r := -2$.

5: Автомат \mathcal{A}_1 проверяет, находится ли камень \mathfrak{K}_2 в текущей вершине (в вершине, в которой он оказался в данный момент) грани f ; если нет, он переходит к следующему шагу программы, а если да, то переходит к шагу 7.

6: Автомат \mathfrak{A}_1 передвигается на одну позицию вперед вдоль \circ -границы грани f и переходит к шагу 5.

7: Если $r = 0$, то автомат \mathfrak{A}_1 передвигает камень \mathfrak{K}_2 на одну позицию вперед вдоль расширенной \circ -границы грани f ; если $r = 1$, то автомат \mathfrak{A}_1 передвигает камень \mathfrak{K}_2 два раза подряд на одну позицию вперед вдоль расширенной \circ -границы грани f .

8: Автомат \mathfrak{A}_1 проверяет, находится ли камень \mathfrak{K}_1 в вершине, в которой он оказался; если нет, он переходит к шагу 9, а если да, то $r = -2$.

9: Автомат \mathfrak{A} передвигается на одну позицию назад вдоль \circ -границы грани f и переходит к шагу 8.

Опишем сейчас более подробно коллектив $\mathcal{B}_1 = (\mathfrak{A}_1 | \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$. Сначала введем некоторые новые обозначения.

Для любого $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$ пусть $v^*(\omega, a) = \alpha^*(\omega, a) = (\bar{\omega})^-(a)$, если $a \neq \{\bar{\omega}\}$, и пусть $v^*(\omega, a) = \omega^-(\mathfrak{D})$ и $\alpha^*(\omega, a) = \mathbf{0}$, если $a = \{\bar{\omega}\}$. Смысл данных обозначений состоит в следующем. Если $(x, \overleftarrow{\omega_x})$ — некоторая виртуальная орточка грани f , то пара $(x\alpha^*(\omega_x, [x]), v^*(\omega_x, [x]))$ является следующей виртуальной орточкой вдоль расширенной \circ -границы грани f относительно $(x, \overleftarrow{\omega_x})$.

Также, для любого $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$ пусть $\vartheta(a) = \{\bar{\omega} | \omega \in a\}$, если $|a| > 1$, и пусть $\vartheta(a) = \{\bar{\omega}, (\bar{\omega})^-(\mathfrak{D})\}$, если $a = \{\omega\}$ для некоторого $\omega \in \mathfrak{D}$. Смысл данного обозначения состоит в следующем. Если L — прямоугольный лабиринт, x — некоторая его вершина, и если $\omega \in \vartheta([x])$ для некоторого $\omega \in \mathfrak{D}$, то пара $(x, \overleftarrow{\omega})$ является виртуальной орточкой грани f , где f — грань лабиринта L , которая находится слева от вектора $x(x(\bar{\omega})^-([x]))$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1 | \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_s)$ — коллектив автоматов типа $(1, s)$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_k})-\omega \rightarrow$, где $\omega \in \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s$, тот факт, что в данный момент в данном лабиринте L автомат \mathfrak{A}_1 находится в текущей вершине x хотя бы с камнями $\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_k}$, и в следующий момент оказывается в вершине $x\omega$, передвигая в эту вершину только камни $\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_k}$ (если $\omega = \mathbf{0}$, то в действительности \mathfrak{A}_1 остается на месте и ни один камень не передвигает). Если $\omega \in \mathfrak{D}$ и \mathfrak{A}_1 переходит из вершины x в вершину $x\omega$ и при этом не передвигает ни один из камней, находящихся в x , то пишем только $\mathfrak{A}_1-\omega \rightarrow$.

Если в текущий момент в вершине x лабиринта L оказались только автомат \mathfrak{A}_1 и камни $\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_k}$, где $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s$, то этот факт обозначим через $\mathfrak{A}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_{j_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathfrak{K}_{j_k}$. Если в текущий момент в вершине x лабиринта L , в которой оказался автомат \mathfrak{A}_1 , не находится камень \mathfrak{K}_i ($1 \leq i \leq s$), то этот факт обозначим через $\mathfrak{A}_1 \not\leftrightarrow \mathfrak{K}_i$.

Память автомата \mathfrak{A}_1 дана в виде “регистра” $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3, \hat{r})$, где переменные $\hat{\omega}_i$, $1 \leq i \leq 3$, принимают любые значения из множества \mathfrak{D} , а переменная \hat{r} — любое значение из множества $\overline{-3, 7}$. Значения перемен-

ной \hat{r} определяют режим работы данного коллектива и, кроме значения -3 , имеют описанный выше смысл. Через $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ обозначим автомат \mathfrak{A}_1 , у которого $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ — значение “регистра” памяти, т.е. автомат \mathfrak{A}_1 , у которого состояние $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$. Состояние $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ “говорит” автомату $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$, что камень \mathfrak{K}_1 находится в виртуальной $\hat{\omega}_1$ -точке текущей грани f , а камень \mathfrak{K}_2 — в виртуальной $\hat{\omega}_2$ -точке этой же грани. Начальным состоянием автомата \mathfrak{A}_1 является упорядоченный набор $(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$.

Тогда, если на вход автомата $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ поступает входной символ $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, “реакция” коллектива “вычисляется” с помощью следующих правил (выполняется то правило из ниже данных, для которого удовлетворено условие для применения):

- 1) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) = (\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$ и $\mathbf{s} \in a$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := \hat{\omega}_3 := v^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := -2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \mathbf{s} \rightarrow$.
- 2) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 0$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := v^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := -2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 3) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := v^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := 5$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 4) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 5$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := \hat{\omega}_3 := v^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} = 6$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 5) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $r = 6$, то $\hat{r} = -2$.
- 6) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 6$ и $\omega_3 \in \vartheta(a)$, то $\hat{r} = -2$ и $\mathfrak{A}_1 - \bar{\omega}_3 \rightarrow$.
- 7) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = -1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := v^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := -2$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 8) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = 0$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_3 := v^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := 3$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 9) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = 1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_3 := v^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := 4$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.
- 10) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \not\leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, и если $3 \leq r \leq 4$ и $\omega_3 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_3 := (\bar{\omega}_3)^-(a)$ и $\mathfrak{A}_1 - (\bar{\omega}_3)^-(a) \rightarrow$.
- 11) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 3$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := v^*(\omega_2, a)$, $\hat{\omega}_3 := \sigma_-(v^*(\omega_2, a))$, $\hat{r} := 2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.
- 12) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 4$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := v^*(\omega_2, a)$, $\hat{r} := 7$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.
- 13) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 7$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := v^*(\omega_2, a)$, $\hat{\omega}_3 := \sigma_-(v^*(\omega_2, a))$, $\hat{r} := 2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.

14) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$ и $\hat{r} := 2$, то $\hat{r} := -2$.

15) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \not\leftrightarrow \mathfrak{K}_1$ и если при этом $\hat{r} := 2$, то $\hat{\omega}_3 := (\bar{\omega}_3)^+(a)$ и $\mathfrak{A}_1 - (\bar{\omega}_3)^+(a) \rightarrow$.

16) Во всех остальных случаях коллектив \mathcal{B}_1 определен тривиальным способом.

Нетрудно убедиться, что если в начальный момент времени автомат $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ вместе с камнем \mathfrak{K}_1 помещен в произвольную виртуальную орточку $(x_0, \bar{\omega}_1)$, а камень \mathfrak{K}_2 — в произвольную виртуальную орточку $(y_0, \bar{\omega}_2)$ некоторой грани f некоторого прямоугольного лабиринта L , то коллектив \mathcal{B}_1 будет вести себя по выше данной программе Π_1 .

Пусть α — произвольное слово из \mathfrak{D}^+ такое, что $f(\alpha) = \mathbf{s}$. Также, пусть $|\alpha| = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$, и пусть $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k < n$ — все числа такие, что $\omega_{i_j} = \mathbf{s}$ для любого $1 \leq j \leq k$. Далее, пусть $\delta^{(-1)} = \mathbf{swnes}$, $\delta^{(0)} = \mathbf{s}$ и $\delta^{(+1)} = \mathbf{senws}$. Для любого $1 \leq j < k$, пусть a_j — число такое, что $[|\alpha|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(a_j)}$. Подслово $|\alpha|_{i_j}^{i_{j+1}}$ слова $|\alpha|$ называется *отрицательным s-витком*, *нулевым s-витком* или *положительным s-витком* слова α , если, соответственно, $[|\alpha|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(-1)}$, $[|\alpha|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(0)}$ или $[|\alpha|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(+1)}$. Обозначим через $a(\alpha)$ число $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$, если $k > 1$, и положим, что $a(\alpha) = 0$, если $k = 1$. Назовем число $a(\alpha)$ *алгебраической суммой* всех *s-витков* слова α . Нетрудно удостовериться, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 20. *Если α — произвольное слово из \mathfrak{D}^+ такое, что $f(\alpha) = \mathbf{s}$ и $l(\alpha) = \mathbf{n}$, то $a(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $[|\alpha|] = \mathbf{sen|swn}$.*

Опишем теперь следующую процедуру. Входом для процедуры будет произвольное слово из \mathfrak{D}^+ , начинающееся на букву \mathbf{s} , а ее единственными переменными будут a , i и β . При этом, если $\alpha = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$, $n \geq 1$, — произвольное слово из \mathfrak{D}^+ такое, что $\omega_1 = \mathbf{s}$, то выполняем следующие шаги (программа Π_2):

1: Пусть $a := 0$, $i := 2$ и $\beta := \omega_1$. Если $i \leq n$, то переходим к следующему шагу, а если нет, то останавливаемся (выход 1).

2: Если $\omega_i = [l(\beta)]^{-1}$ и $l(\beta) \neq \mathbf{e}$, то пусть $\beta := [\beta\sigma_-(\omega_i)]$ и переходим к шагу 4, а если нет, то переходим к следующему шагу.

3: Если $\omega_i = [l(\beta)]^{-1}$ и $l(\beta) = \mathbf{e}$, и если $b \in \overline{-1, 1}$ такое, что $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b)}$, то $a := a + b$ и $\beta := \mathbf{s}$, и мы переходим к следующему шагу, а если нет, то сразу переходим к следующему шагу.

4: Если $\omega_i \neq \mathbf{s}$, то пусть $\beta := [\beta\omega_i]$ и $i := i + 1$, и переходим к шагу 6, а если нет, то переходим к следующему шагу.

5: Если $\omega_i = \mathbf{s}$ и $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b)}$, где $-1 \leq b \leq 1$, то $a := a + b$, $\beta := \mathbf{s}$ и $i := i + 1$. Если $i \leq n$, то переходим к шагу 2, а если нет, то останавливаемся (выход 1).

6: Если $a = 0$ и $\beta = \mathbf{sen}$, то останавливаемся (выход 2), а если $i > n$, то останавливаемся (выход 1); в противном случае переходим к шагу 2.

Благодаря шагам 2 и 3 данная процедура перерабатывает не слово α , а слово $\lfloor \alpha \rfloor$. Нетрудно удостовериться, что заключительное значение переменной a есть значение $a(\lfloor \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{i-1} \rfloor)$. При этом, если процедура заканчивается через выход 1, то целое входное слово является “переработанным”, а если через выход 2, то процедура “перерабатывает” только его часть, а именно слово $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_i$, где i первое такое число среди чисел $\overline{1, n}$, для которого $\omega_i = \mathbf{n}$ и $\lfloor \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i \rfloor = \mathbf{sen}$.

Построим сейчас автомат \mathfrak{A}_2 , который в сочетании с коллективом \mathcal{B}_1 будет выполнять программу Π_2 по отношению к любому слову α , которое соответствует, начинающейся с некоторой \mathbf{s} -точки, \odot -границе некоторой внутренней грани f некоторого прямоугольного лабиринта L . Этот новый коллектив будет, по существу, перерабатывать любое такое “входное слово” α в слово $\lfloor \alpha \rfloor$, соответствующее расширенной \odot -границе сопряженной с \odot -границей, определяющей слово α . Теперь роль автомата \mathfrak{A}_2 в этом сочетании состоит в том, чтобы реагировать на каждый очередной значимый \mathbf{s} -виток слова $\lfloor \alpha \rfloor$: на выходе автомата \mathfrak{A}_2 “практически всегда” находится число 0, а если появляется число -1 [1], то только что “завершившийся” \mathbf{s} -виток был отрицательным [положительным], а роль коллектива \mathcal{B}_1 , который управляет работой счетчика C , состоит в подсчете этих \mathbf{s} -витков. В нашей реализации C хранит значение, противоположное значению переменной a , т.е. всегда $C = -a$.

Опишем автомат \mathfrak{A}_2 более подробно. Состояниями автомата \mathfrak{A}_2 являются все элементы множества $W_4(\mathbf{s}) \cup \{\Lambda\}$, где

$$W_4(\mathbf{s}) = \{\alpha \in \text{Sim}(\mathfrak{D}) \mid [\alpha] = \alpha, |\alpha| \leq 4 \text{ и } f(\alpha) = \mathbf{s}\},$$

его входом является любое $\omega \in \mathfrak{D}$, а выходом — любое число $b \in \overline{-1, +1}$. Тогда, если на вход автомата \mathfrak{A}_2 поступает входной символ $\omega \in \mathfrak{D}$, его “реакция вычисляется” с помощью следующих правил:

- 1) Если $\beta = \Lambda$ и $\omega = \mathbf{s}$, то $\beta := \mathbf{s}$ и $b := 0$.
- 2) Если $\beta = \Lambda$ и $\omega \neq \mathbf{s}$, то $\beta := \Lambda$ и $b := 0$.
- 3) Если $\beta \neq \Lambda$, $\omega = (l(\beta))^{-1}$ и $l(\beta) \neq \mathbf{e}$, то пусть $\beta := [\beta \sigma_-(\omega)]$ и $b := 0$.
- 4) Если $\beta \neq \Lambda$, $\omega = (l(\beta))^{-1}$, $l(\beta) = \mathbf{e}$ и $[\beta \mathbf{s}] = \delta^{(b')} \mathbf{s}$ для некоторого $-1 \leq b' \leq 1$, то пусть $\beta := \mathbf{s}$ и $b := b'$.
- 5) Если $\beta \neq \Lambda$, $\omega \neq (l(\beta))^{-1}$ и $\omega \neq \mathbf{s}$, то пусть $\beta := [\beta \omega]$ и $b := 0$.
- 6) Если $\beta \neq \Lambda$, $\omega \neq (l(\beta))^{-1}$, $\omega = \mathbf{s}$ и $[\beta \mathbf{s}] = \delta^{(b')} \mathbf{s}$ для некоторого $-1 \leq b' \leq 1$, то пусть $\beta := \mathbf{s}$ и $b := b'$.

Пусть $\mathcal{B}_1 = (\mathfrak{A}_1 \mid \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, где $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $\mathfrak{K}_i = (\hat{\psi}_i)$ для любого $1 \leq i \leq 2$, — описанный выше коллектив, и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ —

описанный выше автомат. Построим новый коллектив $\mathcal{B}_2 = (\mathcal{A}_3 | \mathcal{K}'_1, \mathcal{K}'_2)$ типа (1, 2), где $\mathcal{A}_3 = (Q_3, \varphi_3, \psi_3)$ и $\mathcal{K}_i = (\hat{\psi}'_i)$ для любого $1 \leq i \leq 2$, следующим образом. Множеством состояний автомата \mathcal{A}_3 будет множество $Q_2 \times Q_1$, т.е. состояние автомата \mathcal{A}_3 есть любая 5-ка $(\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$, где $\beta \in W_4(\mathbf{s}) \cup \{\Lambda\}$, значения ω_i , $1 \leq i \leq 3$, являются любыми элементами множества \mathcal{D} , а r является любым числом из множества $\overline{-3, 7}$. Положим, что начальное состояние коллектива \mathcal{B}_2 будет 5-ка $(\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$. Далее положим, что для любых $(\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \in Q_3$ и $(a, 0, \alpha_1, \alpha_2) \in A_{\mathcal{A}_3}$ имеет место:

$$1) \varphi_3((\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = (\mathbf{s}; \mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{s}, -2),$$

$$\psi_3((\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = \mathbf{s}$$

и

$$\hat{\psi}'_1((a, (\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), 0, \alpha_2)) = \hat{\psi}'_2((a, (\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), \alpha_1, 0)) = \mathbf{s},$$

если $\mathbf{s} \in a$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$;

$$2) \varphi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) =$$

$$= (\beta; \varphi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)))$$

и

$$\psi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = \psi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)),$$

а также

$$\hat{\psi}'_1((a, (\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2)) = \hat{\psi}'_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2))$$

и

$$\hat{\psi}'_2((a, (\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)) = \hat{\psi}'_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)),$$

если $r \neq -2$ и $r \neq -3$ (другими словами, до тех пор, пока условие $r \neq -2$ выполнено, и при этом коллектив \mathcal{B}_2 не находится в начальном состоянии, то он ведет себя как коллектив \mathcal{B}_1);

$$3) \varphi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = (\varphi_2(\beta, (\bar{\omega}_1)^-(a));$$

$$\varphi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\bar{\omega}_1)^-(a))), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2))),$$

и

$$\psi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) =$$

$$= \psi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\bar{\omega}_1)^-(a))), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)),$$

а также

$$\hat{\psi}'_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2)) =$$

$$= \hat{\psi}'_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\bar{\omega}_1)^-(a))), 0, \alpha_2))$$

и

$$\hat{\psi}'_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)) =$$

$$= \hat{\psi}'_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\bar{\omega}_1)^-(a))), \alpha_1, 0)),$$

если $r = -2$ и $\alpha_1 = 1$ (в тот момент, когда выполнено условие

$r = -2$, сначала, с помощью программы автомата \mathfrak{A}_2 , определяется основной режим работы, т.е. какое значение из множества $\overline{-1, 1}$ принимает переменная \hat{r} , а потом коллектив \mathfrak{B}_2 делает “ход” как коллектив \mathfrak{B}_1);

- 4) переход автомата \mathfrak{A}_3 в финишное состояние q^* , если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = \mathbf{sen}$, $\omega_1 = \omega_2 = \mathbf{n}$ и $r = -2$;
- 5) во всех остальных случаях коллектив \mathfrak{B}_2 определен тривиальным способом.

(конечно, описывая выше коллектив \mathfrak{B}_2 , мы как всегда подразумеваем, что любой камень этого коллектива всегда остается на месте, если в вершине, в которой он находится, нет автомата \mathfrak{A}_3).

Предположим сейчас, что в начальный момент коллектив \mathfrak{B}_2 помещен в некоторую орточку $x|_{\overline{\mathfrak{S}}}$ некоторой внутренней грани f произвольного прямоугольного лабиринта L (все автоматы коллектива \mathfrak{B}_2 помещены в вершину x лабиринта L). Из определения коллектива \mathfrak{B}_2 , следует, что базовая точка счетчика C за время между двумя последующими моментами, в которых выполнено условие $r = -2$, передвигается на одну позицию вперед вдоль расширенной \odot -границы грани f , начиная с виртуальной орточки $x|_{\overline{\mathfrak{S}}}$ грани f . Также из определения и теоремы 18 следует, что коллектив \mathfrak{B}_2 переходит обязательно в финишное состояние и что тогда все автоматы этого коллектива оказываются в дочерней орточке орточки $x|_{\overline{\mathfrak{S}}}$. Заметим, что всегда $C = -a$, где a — алгебраическая сумма всех \mathbf{s} -витков подслово слова, которое соответствует расширенной \odot -границе грани f : от виртуальной орточки $x|_{\overline{\mathfrak{S}}}$ до виртуальной орточки этой же грани, в которой оказалась в данный момент базовая точка счетчика C . Из теоремы 18 следует, что число $-a$, хранящееся в C , всегда ≥ 0 .

Значит, назначение коллектива \mathfrak{B}_2 следующее: найти дочернюю орточку данной орточки $x|_{\overline{\mathfrak{S}}}$ данной внутренней грани f данного конечного прямоугольного лабиринта L . Можно показать, подобно тому как мы это сделали выше, что существует и коллектив типа $(2, 0)$, который справляется с этой задачей.

Обозначим через \mathfrak{B}_3 коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в любом конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} проверяет условие $x_0 \in b(f_\infty(L))$. Нетрудно убедиться, что существуют коллективы автоматов как типа $(2, 0)$, так и типа $(1, 1)$, которые справляются с этой задачей.

Обозначим через \mathfrak{B}_4 коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в любом конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} для грани f , находящейся в L слева от вектора $\overrightarrow{x_0(x_0\omega)}$, где $\omega = \mathbf{e}^-([x_0])$, находит первую $\overleftarrow{\mathbf{n}}$ -точку грани f , которая находится вдоль \odot -границы грани f после ее орточ-

ки $x_0|_{\vec{w}}$, Легко убедиться, что с этой задачей справляется даже один автомат.

Пусть L_{x_0} — произвольный конечный прямоугольный лабиринт такой, что $x_0 \in b(f_\infty(L))$. Обозначим через $\mathcal{B}_5 = (\mathfrak{A}_5 | \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в L_{x_0} ведет себя следующим образом: камни \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 остаются все время в вершине x_0 , а автомат \mathfrak{A}_5 за каждый момент времени передвигается на одну позицию вперед вдоль \circlearrowleft -границы грани $f_\infty(L)$. Подобное поведение коллектива в таком лабиринте можно осуществить и с помощью коллектива типа $(2, 0)$, а именно: один из автоматов такого коллектива остается в вершине x_0 , а второй ведет себя как автомат \mathfrak{A}_5 .

Теорема 21. Пусть \mathcal{L} — класс всех конечных прямоугольных лабиринтов. Тогда сложность предикатов $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ в точке $(1, 2)$ $[(2, 0)]$ есть $O(n^3)$ $[O(n^2)]$.

Доказательство. Очевидно, что утверждение верно, если оно верно для предиката $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$. Покажем, что утверждение для этого предиката в точке $(1, 2)$ верно (аналогичным образом разбирается и случай предиката $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2$ в точке $(2, 0)$).

Рассмотрим комбинирующую диаграмму \mathbb{D} , данную на рис. 13, где коллективы $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ и \mathcal{B}_5 являются только что определенными коллективами, а \mathcal{B}'_3 — коллектив изоморфный \mathcal{B}_3 . Значения меток диаграммы \mathbb{D} будут следовать неявно из ниже данного описания.

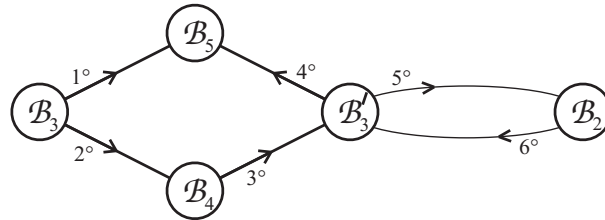


Рис. 13.

Определим коллектив \mathcal{A} как \mathbb{D} -композицию данных коллективов автоматов; в качестве начального состояния коллектива \mathcal{A} выберем начальное состояние коллектива \mathcal{B}_4 . Коллектив \mathcal{A} будет “вести себя” в произвольном конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} в соответствии со следующей программой:

1: Коллектив \mathcal{A} работает по программе коллектива \mathcal{B}_3 , а именно проверяет, принадлежит или нет вершина x_0 границе грани $f_\infty(L)$: если да, то переходит к шагу 5 (переход 1°), а если нет переходит к следующему шагу (переход 2°).

2: Коллектив \mathcal{A} работает по программе коллектива \mathcal{B}_4 , а именно в L_{x_0} находит первую $\overleftarrow{\mathbf{n}}$ -точку грани f , которая находится вдоль \circ -границы грани f после ее орточки $x_0|_{\overrightarrow{\omega}}$, где $\omega = \mathbf{e}^-([x_0])$ и f — грань лабиринта L находящаяся слева от вектора $x_0(x_0\omega)$. Обозначим через x носитель этой орточки (x будет единственной “переменной” для программы). Коллектив \mathcal{A} переходит к следующему шагу (переход 3°).

3: Коллектив \mathcal{A} работает по программе коллектива \mathcal{B}'_3 , а именно проверяет, принадлежит или нет вершина x границе грани $f_\infty(L)$: если да, то переходит к шагу 5 (переход 4°), а если нет переходит к следующему шагу (переход 5°).

4: Коллектив \mathcal{A} работает по программе коллектива \mathcal{B}_2 , т.е. находит дочернюю орточку для $x|_{\overrightarrow{\mathfrak{z}}}$, берет ее носитель как новое значение для x , и переходит к шагу 3 (переход 6°).

5: Коллектив \mathcal{A} работает по программе коллектива \mathcal{B}_5 , т.е. ведет себя следующим образом: оба камня \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 “покоятся” все время в вершине x , а автомат \mathfrak{A}_5 “непрерывно” двигается вперед вдоль \circ -границы грани $f_\infty(L)$.

Теперь нетрудно убедиться, что если \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — две копии коллектива \mathcal{A} , L — произвольный конечный прямоугольный лабиринт, и x_0 и y_0 , $x_0 \neq y_0$, — две произвольные его вершины, то пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0) -встречу в L . Следовательно, $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^2(1, 2) = 1$.

Данная в теореме оценка сложности предиката $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^2$ в точке $(1, 2)$ следует из факта, что для любой грани f лабиринта L число $\overrightarrow{\mathfrak{s}}$ -точек грани f не более, чем $|b(f)|$, а чтобы найти дочернюю орточку любой $\overrightarrow{\mathfrak{s}}$ -точки грани f коллектив \mathcal{A}_2 “тратит” не более, чем $3|b(f)|^2$ моментов времени. \square

Напомним, что в основе алгоритма обхода конечных прямоугольных лабиринтов ([15]) лежит теорема 19 (впервые доказанная в [18]) и изложенный в [18] алгоритм выхода автомата (в широком понимании этого слова) из любой внутренней вершины любого конечного прямоугольного лабиринта на границу его внешней грани. Таким образом коллектив автоматов, даже по алгоритму, изложенному в [15], оказывается значительно быстрее на границе внешней грани данного конечного прямоугольного лабиринта, чем это кажется на первый взгляд. Но не вдаваясь в подробности алгоритма обхода конечных прямоугольных лабиринтов из [15], и используя теорему 19, мы доказали теорему 21 и достигли нами обозначенную цель.

В заключение заметим, что проблема описания предикатов $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^0$, $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^1$ и $\mathbf{M}_{\mathfrak{L}}^2$, когда \mathfrak{L} является классом всех прямоугольных лабиринтов, остается полностью открытой.

Список литературы

- [1] Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., Kilibarda G., “On behaviour of automata in labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:1 (1993), 1–28.
- [2] Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М., “Системы автоматов в лабиринтах”, Математические вопросы кибернетики, **14**, ed. Лупанов О.Б, Физматлит, Москва, 2005, 93–160.
- [3] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **13**:5 (2003), 429–466.
- [4] Budach L., “Automata and labirinths”, *Math. Nachrichten*, **86** (1978), 195–282.
- [5] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш.М., *Введение в теорию абстрактных автоматов*, Изд-во МГУ, Москва, 1985.
- [6] Hoffmann F., “One pebble does not suffice to search plane labyrinths”, *Lecture Notes in Computer Science*, **117**, 1981, 433–444.
- [7] Hoffman F., *1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen*, Report R-Math-06/82, AdW der DDR, Berlin, 1982.
- [8] Килибарда Г., “Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов”, *Дискретная математика*, **2**:2 (1990), 71–81.
- [9] Blum M., Kozen D., “On the power of the compass”, *Proc. 19th IEEE FOCS Conf. (Ann Arbor)*, 1978, 132–142.
- [10] Pultr A., Úlehla J., “On two problems of mice”, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **31**:2 (1982), 249–262.
- [11] Szepietowski A., “A finite 5-pebble-automaton can search every maze”, *Information Processing Letters*, **15**:5 (1982), 199–204.
- [12] Kilibarda G., “On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:6 (1993), 555–586.
- [13] Kilibarda G., “On Reduction of Automata in Labyrinths”, *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.*, **101 (115)** (2017), 47–63.
- [14] Hemmerling A., “Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata”, *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **28**:8/9 (1987), 453–470.
- [15] Hemmerling, A., “Remark on the power of compas”, *Lecture Notes in Computer Science*, **233** (1986), 405–413.
- [16] Vijayan G., Wigderson A., “Rectilinear graphs and their embeddings”, *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 355–372.
- [17] Hoffman F., Kriegel K., *Quasiplane labyrinths*, Preprint P-Math-20/83, AdW der DDR, Berlin, 1983.
- [18] Asser G., “Bemerkungen zum Labyrinth-Problem”, *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **13**:4/5 (1977), 203–216.

Type meeting problem for automata in labyrinths Kilibarda G.

The paper studies one special type of interaction of automata collectives in labyrinths. The following problem is considered for a given class of labyrinths: for which pairs of collective types there is a collective of the first type and a collective of the second type that will certainly meet, if at the starting moment they are placed in any two vertices

of any labyrinth of the given class. We call this the problem of the ‘type meeting’ for automata in the given class of labyrinths. Here the problem is completely solved both for the case of the class of all finite plane mosaic labyrinths and for the case of the class of all finite plane rectangular labyrinths. The problem remains unsolved so far for the case of all (finite and non finite) mosaic labyrinths for some pairs of collective types, whereas for the case of the class of all plane rectangular labyrinths, the problem of type meeting is completely unexplored.

Keywords: collective of automata, collective type, plane rectangular labyrinth, plane mosaic labyrinth, type meeting.

References

- [1] Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., Kilibarda G., “On behaviour of automata in labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:1 (1993), 1–28.
- [2] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., “Sistemy avtomatov v labirintah [Systems of automata in labyrinths]”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, **14**, ed. Lupanov O.B., Fizmatlit, Moscow, 2005, 93–160 (In Russian).
- [3] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **13**:5 (2003), 429–466.
- [4] Budach L., “Automata and labirintah”, *Math. Nachrichten*, **86** (1978), 195–282.
- [5] Kudryavtsev V.B., Podkolzin A.S., Uščumlić Š.M., *Vvedenie v teoriyu abstraktnykh avtomatov [Introduction to Abstract Automata Theory]*, Izd-vo MGU, Moscow, 1985 (In Russian).
- [6] Hoffmann F., “One pebble does not suffice to search plane labyrinths”, *Lecture Notes in Computer Science*, **117**, 1981, 433–444.
- [7] Hoffman F., *1-Kiesel-Automaten in Labyrinth*, Report R-Math-06/82, AdW der DDR, Berlin, 1982.
- [8] Kilibarda G., “Ob obhode konechnykh labirintov sistemami avtomatov [On traversing finite labyrinths by systems of automata]”, *Diskretnaya matematika*, **2**:2 (1990), 71–81 (In Russian).
- [9] Blum M., Kozen D., “On the power of the compass”, *Proc. 19th IEEE FOCS Conf. (Ann Arbor)*, 1978, 132–142.
- [10] Pultr A., Úlehla J., “On two problems of mice”, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **31**:2 (1982), 249–262.
- [11] Szepietowski A., “A finite 5-pebble-automaton can search every maze”, *Information Processing Letters*, **15**:5 (1982), 199–204.
- [12] Kilibarda G., “On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:6 (1993), 555–586.
- [13] Kilibarda G., “On Reduction of Automata in Labyrinths”, *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.*, **101 (115)** (2017), 47–63.
- [14] Hemmerling A., “Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata”, *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **28**:8/9 (1987), 453–470.
- [15] Hemmerling, A., “Remark on the power of compass”, *Lecture Notes in Computer Science*, **233** (1986), 405–413.

- [16] Vijayan G., Wigderson A., “Rectilinear graphs and their embeddings”, *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 355–372.
- [17] Hoffman F., Kriegel K., *Quasiplane labyrinths*, Preprint P-Math-20/83, AdW der DDR, Berlin, 1983.
- [18] Asser G., “Bemerkungen zum Labyrinth-Problem”, *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **13**:4/5 (1977), 203–216.

О формульном представлении характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами

М. В. Носов¹

В работе представлен ряд формул характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами. Аргументами функции выступают двоичные разложения этих коэффициентов.

Ключевые слова: линейное уравнение, булевское решение, характеристическая функция.

Дано линейное уравнение с целыми коэффициентами от n переменных, которые принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Заменой переменных t на $1 - t$ можно добиться того, что коэффициенты уравнения будут натуральными числами. Таким образом, рассматривается уравнение следующего вида

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a_0, \\ a_1, \dots, a_n, a_0 \in N.$$

Все коэффициенты m -разрядные двоичные числа

$$a_i = \sum_{j=0}^{m-1} 2^j a_{ij},$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Ниже представлены формулы $\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0)$ - характеристической функции решения уравнения на множестве $\{0, 1\}^n$. Далее используется известное равенство

$$\int_0^1 \exp\{2\pi ikt\} dt = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases}$$

¹Носов Михаил Васильевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@mail.ru.

Nosov Michail Vasilevich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Следовательно, если $x = (x_1, \dots, x_n)$, то выражение

$$\sum_{x \in E_2^n} \int_0^1 \exp\{2\pi i(\sum_{j=1}^n a_j x_j - a_0)t\} dt$$

задает количество булевых решений. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \int_0^1 \exp\{2\pi i(\sum_{j \in \beta} a_j - a_0)t\} dt = \\ & \int_0^1 (\sum_{\beta} \exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j \in \beta} \exp\{2\pi i a_j t\}) dt = \\ & \int_0^1 (\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) dt. \end{aligned}$$

Характеристическая функция имеет вид

$$\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) =$$

$$1 - \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left(\int_0^1 (\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) dt \right) \tau\} d\tau.$$

В этом представлении выполняется свойство

$$(1 - \Xi(a_1, \dots, a_n, a_0)) \cdot (1 - \Xi(b_1, \dots, b_n, b_0)) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left(\int_0^1 \left((\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) + \right. \right. \\ & \left. \left. (\exp\{-2\pi i b_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i b_j t\})) \right) dt \right) \tau\} d\tau. \end{aligned}$$

Другое представление, если уравнение имеет решение, то

$$\prod_{x \in E_2^n} (\sum_{j=1}^n a_j x_j - a_0) = \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} (\sum_{j \in \beta} a_j - a_0) = 0.$$

Значит

$$\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) = \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left(\prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{j \in \beta}^n a_j - a_0 \right) \right) t\} dt.$$

В этом представлении произведение имеет вид

$$\begin{aligned} & \Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) \cdot \Xi(b_1, \dots, b_n, b_0) = \\ & \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left(\prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{j \in \beta}^n a_j - a_0 \right)^2 + \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{j \in \beta}^n b_j - b_0 \right)^2 \right) t\} dt. \end{aligned}$$

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

On the formula representation of the characteristic function of the Boolean solution of a linear equation with integer coefficients
Nosov M.V.

The paper presents a number of formulas for the characteristic function of the Boolean solution linear equation with integer coefficients. The function arguments are binary expansions of these coefficients.

Keywords: linear equation, Boolean solution, characteristic function.

О выразимости кусочно-постоянных функций в пространстве кусочно-параллельных

А. Д. Отрощенко¹

Для конечной системы кусочно-параллельных функций, реализуемых схемами из линейных элементов и функций Хэвисайда, дополненной всеми одноместными линейными функциями получен критерий выразимости кусочно-постоянных функций. Таким образом получен критерий выразимости бинарного классификатора, реализованного нейронной схемой МакКаллока-Питтса.

Ключевые слова: Кусочно-постоянная функция, кусочно-параллельная функция, проблема полноты, проблема выразимости, нейронные-схемы МакКаллока-Питтса.

1. Определение кусочно-параллельной функции

В соответствии с [2], мы рассматриваем класс PP кусочно-параллельных функций, которые строятся из линейных функций

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 : R^n \rightarrow R, a_i \in R, i = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ и функции Хэвисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{с использованием операций суперпозиции. Как пока-$$

зано в [2], функция f из PP может быть представлена в следующем виде: $f = f_L + f_{PC}$, где f_L -линейная функция, а f_{PC} - кусочно-постоянная функция. Будем обозначать $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$(a, \vec{b}) = (a, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \vec{e}_0 = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$$

∂A граница множества A

В соответствии с [1], кусочно-параллельная функция имеет вид

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right). \quad (1)$$

¹Отрощенко Александр Дмитриевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: iskander.aka@mail.ru.

Otroschenko Alexander Dmitrievich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

где $\sigma_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\chi(A) = \begin{cases} 1, \text{ условие } A \text{ выполнено} \\ 0, \text{ условие } A \text{ не выполнено} \end{cases}$.

В дальнейшем, вместо $\sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ мы будем писать $NL_f(\vec{x})$. Пусть $l = \max |d_i|$. Иногда, мы будем писать $NL_f^l(\vec{x})$. Нижний индекс мы также иногда будем опускать, обозначая таким образом произвольную кусочно-постоянную функцию, максимум модуля которой не больше l . Также будем теперь обозначать $f_\epsilon(\vec{x}) = \epsilon f(\frac{\vec{x}}{\epsilon})$.

Будем называть множество значений аргумента соответствующую определенному d_i в дальнейшем носителем сигнатуры i , а сам d_i - сдвигом. Носитель сигнатуры, неограниченный хотя бы с одной стороны по каждой из координат, будем называть неограниченным. Плоскости разделяющие носители сигнатуры будем называть разрезами. Мы будем рассматривать дальше кусочно-параллельные функции с конечным числом сдвигов.

Обозначим множество функций с линейной частью, зависящей от не более чем одной переменной NLL_1 . В соответствии с [3], это замкнутый предполный класс функций. С-финитно-линейные функции в соответствии с В. С. Половниковым [1], будем обозначать как FL . Напомним: Кусочно-параллельная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая, что $\forall a_i, b_i \exists C, A, B$, такие, что при $|t| > C : f(a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, \dots, a_n t + b_n) = At + B$ называется С-финитно-линейной. Класс С-финитно-линейных функций замкнут и предполон. Само утверждение, которое будет доказано, звучит следующим образом:

Теорема 1. Пусть $U = L_1 \cup U_{add}$, где L_1 - все линейные одноместные функции, а U_{add} - конечное множество кусочно-параллельных. Замыкание U содержит все кусочно-постоянные функции тогда, и только тогда, когда $U \not\subseteq NLL_1, FL$

2. Доказательство достаточности

2.1. Принадлежность функции Хэвисайда и суммы Хэвисайдов замыканию системы

В следующем доказательстве, мы фактически повторим часть доказательства полноты из [2], правда, для этого нам нужно будет его немного подправить.

Теорема 2. Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $\theta(x) \in [U]$

Доказательство. Пусть $f \in U/NLL_1$.

Значит, в $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ линейная часть зависит от не менее чем двух переменных, поэтому у \vec{a}_0

есть две ненулевые компоненты. Пусть эти компоненты по первой и второй переменной. Для простоты, подставим во все остальные переменные ноль, в $x_1 = x/a_{01}$, $x_2 = y/a_{02}$ и получим $f_{01}(x, y)$. Итак

$$\begin{aligned} f_{01}(x, y) &= x + y + \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\frac{a_{j1}}{a_{01}}x + \frac{a_{j2}}{a_{02}}y + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right) = \\ &= x + y + \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(A_j x + B_j y + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right) = x + y + NL_f^F. \end{aligned}$$

Пусть $g \in U/FL$. Пусть $g = \langle \vec{g}_l, \vec{y} \rangle + NL_g^G(\vec{y})$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} h(\vec{y}) &= f_{01\epsilon}(g(\vec{y}), g\delta(-\vec{y})) = \\ &= \langle \vec{g}_l, \vec{y} \rangle + NL_g^G(\vec{y}) + \langle \vec{g}_l, -\vec{y} \rangle + \delta NL_g^G(-\frac{\vec{y}}{\delta}) + \epsilon NL_f^F(\frac{g(\vec{y})}{\epsilon}, \frac{g\delta(-\vec{y})}{\epsilon}) = \\ &= NL_g^G(\vec{y}) + NL^{\delta G + \epsilon F}(\vec{y}) \end{aligned}$$

Так как $g \notin FL$, то $\exists \vec{a}, \vec{c}, R, C_+ \neq C_-$, что при $t > R$, $g(\vec{a}t + \vec{c}) = \langle \vec{g}_l, \vec{a} \rangle t + C_+$, а при $t < -R$, $g(\vec{a}t + \vec{c}) = \langle \vec{g}_l, \vec{a} \rangle t + C_-$, т.е. $NL_g^G(\vec{a}t) = C_+$ при $t > R$, и $NL_g^G(\vec{a}t) = C_-$ при $t < -R$. Тогда, подберем $\delta > 0, \epsilon > 0$ так, чтобы

$$|C_+ - C_-| > 2(\delta G + \epsilon F),$$

подойдут $\delta_0 = \frac{|C_+ - C_-|}{5G}$, $\epsilon_0 = \frac{|C_+ - C_-|}{5F}$, таким образом,

$$2(\delta_0 G + \epsilon_0 F) = 2\left(\frac{|C_+ - C_-|}{5G}G + \frac{|C_+ - C_-|}{5F}F\right) = \frac{4}{5}|C_+ - C_-| < |C_+ - C_-|.$$

Теперь заметим, что $h(\vec{a}t + \vec{c}) = NL_g^G(\vec{a}t + \vec{c}) + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t + \vec{c})$. Пусть при $t > R_2$, $h(\vec{a}t + \vec{c}) = C'_+$, а при $t < -R_2$, $h(\vec{a}t + \vec{c}) = C'_-$, Тогда считая $t_1 > \max(R, R_2)$, а $t_2 < -\max(R, R_2)$ распишем

$$\begin{aligned} |C'_+ - C'_-| &= |h(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - h(\vec{a}t_2 + \vec{c})| = \\ &= |NL_g^G(\vec{a}t_1 + \vec{c}) + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - NL_g^G(\vec{a}t_2 + \vec{c}) - NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| = \\ &= |C_+ - C_- + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |C_+ - C_-| - |NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| \geq \\
&\geq |C_+ - C_-| - |NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c})| - |NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| \geq \\
&\geq |C_+ - C_-| - 2(\delta_0 G + \epsilon_0 F) = \frac{1}{5}|C_+ - C_-| > 0
\end{aligned}$$

Обозначим $p(t) = h(\vec{a}t + \vec{c})$. Таким образом, получили, что $p \in [U], p \in PC, p \notin FL$.

Пусть $p(t) = p_-$, при $t < -R$, $p(t) = p_+$, при $t > R$. $p_+ \neq p_-$ по доказанному выше. t_{min} - какая-либо точка в которой функция принимает минимальное значение p_{min} . t_{max} - какая-либо точка в которой функция принимает максимальное значение p_{max} . $p_{max} \neq p_{min}$ так, как

$$p_{max} \geq \max(p_+, p_-) > \min(p_+, p_-) \geq p_{min}.$$

Отсюда же следует, что $t_{max} \neq t_{min}$. Теперь рассмотрим следующую функцию.

$$p'(t) = p\left(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}\right)$$

Заметим, что при $t < -R$, то

$$\begin{aligned}
p'(t) &= p\left(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}\right) = \\
&= p\left(\frac{p_- - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}\right) = p(t_{min}) = p_{min},
\end{aligned}$$

а при $t > R$,

$$\begin{aligned}
p'(t) &= p\left(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}\right) = \\
&= p\left(\frac{p_+ - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}\right) = p(t_{max} - t_{min} + t_{min}) = p_{max}.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $p''(t) = \frac{p'(t) - p_{min}}{p_{max} - p_{min}}$. Ясно, что

$$p''(t) = \begin{cases} 1, & t > t_+ \\ 0, & t < t_- \\ [0, 1], & t_+ \geq t \geq t_- \end{cases},$$

также заметим, что у $p''(t)$ есть конечное число неустранимых точек разрыва. Рассмотрим самую правую (максимальную по x) из них - t_0 . Заметим, что $p''(t_0 + \epsilon') = 1$, где $\epsilon' > 0$ выбрана достаточно малой, чтобы p'' была постоянной в интервалах $(t_0 - \epsilon', t_0)$ и $(t_0, t_0 + \epsilon')$. Это верно, т.к. мы рассматриваем самую правую неустранимую точку разрыва. Пусть

$p''(t_0) = p''_0$, а $p''(t_0 - \epsilon') = p''_-$. $p''_- < 1$, т.к. рассматриваемая точка разрыва - неустранима, а 1 - максимальное значение p'' .

Рассмотрим $v(x, y) = f_{01\tau}(x, y) = x + y + NL^{\tau F}(x, y)$, пока не определяя τ . Теперь определим $a > 0, b, G > 0$ так, чтобы

$$q(t) = v(a(p''(t + t_0) + b), \frac{Gt}{\epsilon'}) = a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t)$$

при $t > 0$ было положительно, а при $t < 0$ отрицательно.

Положим пока $b > -1$. При $\epsilon > t > 0$

$$q(t) = a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) = a(1 + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) > a(1 + b) - \tau F$$

Теперь наложим ограничение, что $a > \frac{\tau F}{1 + b}$. Тогда при $\epsilon > t > 0$ $q(t) > a(1 + b) - \tau F = q_+ > 0$.

При $t > \epsilon$

$$q(t) = a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) > a(p''(t + t_0) + b) + G - \tau F$$

Теперь наложим ограничение, что $G > \tau F - a(\min_{t > 0} p''(t + t_0) + b)$. Тогда при $t > \epsilon$ $q(t) > a(p''(t + t_0) + b) + G - \tau F = Q_+ > 0$.

Далее $p''_- < 1$, а значит интервал $(-1, -p''_-)$ непуст. Пусть $b \in (-1, -p''_-)$. При $-\epsilon' < t < 0$

$$\begin{aligned} q(t) &= a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) = \\ &= a(p''_- + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) < a(p''_- + b) + \tau F \end{aligned}$$

Теперь учтя, что $p''_- + b < 0$ наложим ограничение, что $a > \frac{\tau F}{p''_- + b}$.

Тогда при $\epsilon > t > 0$ имеем, что $q(t) < a(p''_- + b) - \tau F = q_- < 0$.

При $t \leq -\epsilon'$

$$\begin{aligned} q(t) &= a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) = \\ &= a(p''(t + t_0) + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) \leq a(p''(t + t_0) + b) - G + \tau F \end{aligned}$$

Теперь наложим ограничение, что $G > \tau F + \max_{t < 0} a(p''(t + t_0) + b)$.

Тогда при $t \leq -\epsilon$ имеем, что $q(t) < \max_{t < 0} a(p''(t + t_0) + b) - G + \tau F = Q_- < 0$.

Пусть $q(0) = q_0$.

Выберем, $b = \frac{-1-p''}{2}$, $\tau = \frac{\epsilon'}{2F}$,

затем $a > \max(\frac{\tau F}{1+b}, \frac{\tau F}{(p''+b)}) + 1 = \|\frac{\epsilon'}{1-2p''}\| + 1$, затем

$G > \max(\tau F - a(\min_{t>0} p''(t+t_0) + b), \tau F + \max_{t<0} a(p''(t+t_0) + b))$.

Пусть

$$M = \max(|\frac{t_+ - t_-}{q_-}|, |\frac{t_+ - t_-}{q_+}|, |\frac{t_+ - t_-}{Q_-}|, |\frac{t_+ - t_-}{Q_+}|, |\frac{t_+ - t_-}{q_0}|).$$

Тогда

$$\theta(x) = \begin{cases} p''(t_- - 1/2 + M(q(t) + 1/M)), q_0 > 0 \\ 1 - p''(t_- - 1/2 + M(q(t) + 1/M)), q_0 \leq 0 \end{cases}.$$

□

Теорема 3. Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $\forall n, d_i : 1 \leq i \leq n$ функция $\Theta_{d_1, d_2, \dots, d_n}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n d_i \theta(x_i) \in [U]$

Доказательство. По теореме 2 мы имеем, что $\theta(x) \in [U]$. Зафиксируем n и d_i . Пусть $f \in U/NLL_1$, то есть имеет линейную часть, зависящую хотя бы от двух входов. Подставим константы во все входы, так чтобы функция зависела только от двух переменных от которых бы и зависела линейная часть, т.е. $f'(x, y) = x + y + NL(x, y)$. Теперь

$$f(\vec{x}) = f'(x_1, f'(x_2, f'(x_3, \dots, f'(x_{n-2}, f'(x_{n-1}, x_n)) \dots))) = \sum_{i=1}^n x_i + NL(\vec{x}).$$

Подставим $x_i = \epsilon d_i \theta(y_i) + C_i$ и рассмотрим $h(\vec{y}) = f((\epsilon d_i \theta(y_i) + C_i))$, пока не определяя ϵ и C_i . Тогда

$$\begin{aligned} h(\vec{y}) &= \sum_{i=0}^n (\epsilon d_i \theta(y_i) + C_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, (\epsilon d_i \theta(y_i) + C_i)_{i=1}^n \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k) = \\ &= \epsilon \sum_{i=0}^n d_i \theta(y_i) + \sum_{i=0}^n C_i + \\ &+ \sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\sum_{i=0}^n a_{ji} (\epsilon d_i \theta(y_i) + C_i) + c_j) = \sigma_{ij}) - k) = \\ &= \epsilon \sum_{i=0}^n d_i \theta(y_i) + \sum_{i=0}^n C_i + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi \left(\operatorname{sgn} \left(\epsilon \sum_{i=0}^n a_{ji} d_i \theta(y_i) + \sum_{i=0}^n a_{ji} C_i + c_j \right) = \sigma_{ij} \right) - k \right)$$

Заметим, что мы можем выбрать C'_i так, чтобы $\forall j : \sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i \neq 0$. Пусть тогда $M = 2 \frac{\max \|c_j\| + 1}{\min_j \|\sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i\|}$. и выберем $i = MC'_i$, а $\epsilon = \frac{1}{2 \max_j \sum_{i=0}^n \|a_{ji} d_i\|}$. Тогда $\forall j$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^n a_{ji} C_i + c_j \right\| &= \left\| 2 \frac{\max \|c_j\| + 1}{\min_j \|\sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i\|} \sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i + c_j \right\| > \\ &> \left\| 2 \frac{\max \|c_j\| + 1}{\min_j \|\sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i\|} \sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i - \|c_j\| \right\| > \left\| 2 \max_j \|\sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i\| - \|c_j\| \right\| \geq \\ &\geq 2 \max_j \|\sum_{i=0}^n a_{ji} C'_i\| - \|c_j\| + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

с одной стороны, и

$$\left\| \epsilon \sum_{i=0}^n a_{ji} d_i \theta(y_i) \right\| = \left\| \frac{1}{2 \max_j \sum_{i=0}^n \|a_{ji} d_i\|} \sum_{i=0}^n a_{ji} d_i \theta(y_i) \right\| \geq 1/2.$$

Отсюда следует, что $\forall j : \operatorname{sgn}(\epsilon \sum_{i=0}^n a_{ji} d_i \theta(y_i) + \sum_{i=0}^n a_{ji} C_i + c_j) = \operatorname{sgn}(\sum_{i=0}^n a_{ji} C_i + c_j)$ и не зависит от \vec{y} , а значит

$$\sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi \left(\operatorname{sgn} \left(\epsilon \sum_{i=0}^n a_{ji} d_i \theta(y_i) + \sum_{i=0}^n a_{ji} C_i + c_j \right) = \sigma_{ij} \right) - k \right) = S$$

и не зависит от \vec{y} . Тогда

$$\Theta_{d_1, d_2, \dots, d_n}(\vec{y}) = \frac{1}{\epsilon} (h(\vec{y}) - \sum_{i=0}^n C_i - S) = \sum_{i=0}^n d_i \theta(y_i).$$

□

3. Различные вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $L_1 \cup \{\Theta_{d_1, d_2, \dots, d_k}(\vec{y}) \mid \forall k \in N, \vec{d} \in R^k\} \subseteq U$. Тогда $[U]$ содержит все одноместные кусочно-постоянные функции.

Доказательство. Так как $\chi(\operatorname{sgn}(ax+c) = 1) = 1 - \theta(-ax - c)$, $\chi(\operatorname{sgn}(ax+c) = -1) = 1 - \theta(ax + c)$, $\chi(\operatorname{sgn}(ax+c) = 0) = 1 - \theta(ax + c) - \theta(-ax - c)$, то очевидно, что $\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(a_j x + c_j) = \sigma_{ij}) = \Theta'_i(x)$ выражается через

Θ и одноместные линейные. Заметим теперь, что

$$\sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(a_j x + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right) = \Theta_{d_1, d_2, \dots, d_s}(\Theta'_1(x), \Theta'_2(x), \dots, \Theta'_s(x)).$$

□

Теорема 4. Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $x + \theta(x) \in [U]$

Доказательство. Как было показано при доказательстве прошлых теорем, $f_\tau(x, y) = x + y + NL_\tau(x, y) \in [U]$.

Пусть $g_\epsilon^C = f_\epsilon(x, C\theta(x)) - C/2$, при этом ϵ, τ, C определим позднее. Рассмотрим теперь $h(x) = f_\tau(g_\epsilon^C(x), NL_\mu(x) - M)$, одноместную кусочно-постоянную функцию $NL_\mu^F(x)$ мы определим также позднее, так как нам это будет удобно. Распишем подробнее:

$$h(x) = x + C\theta(x) + NL_\epsilon(x) - C/2 + NL_\mu^F(x) - M + NL^h(x),$$

где

$$\begin{aligned} NL^h(x) &= \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(a_j(x + C\theta(x) - C/2 + NL_\epsilon(x)) + \right. \\ &\quad \left. + b_j(NL_\mu^F(x) - M) + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(a_j(x + C\theta(x) - C/2) + NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j M + c_j) = \sigma_{ij}) - k \right) \end{aligned}$$

Так как, $NL^h(x) = NL_\tau(g_\epsilon^C(x), NL_\mu(x) - M)$, то ясно, что $\|NL^h(x)\| \leq \tau$. Положим $M = \max_{j: a_j=0} \|\frac{c_j}{b_j}\| + 1$, $\epsilon < \min(\min_{a_j \neq 0} \|\frac{1}{4a_j}\|, 1/4)$,

$\mu < \min(\min_{b_j \neq 0} \|\frac{1}{2b_j}\|, 1/2)$, $C = 2 \max_{a_j \neq 0} \frac{\|\epsilon a_j\| + \|\mu b_j\| + \|b_j M\| + \|c_j\|}{\|a_j\|}$. Тогда получим, что при $a_j = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(a_j(x + C\theta(x) - C/2) + NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j M + c_j) &= \\ &= \operatorname{sgn}(NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j M + c_j) = \\ &= \operatorname{sgn}(NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j \max_{j: a_j=0} \|\frac{c_j}{b_j}\| + 1 + c_j) = 1 \end{aligned}$$

и не зависит от NL_μ^F , а при $a_j \neq 0$, по выбору констант $\|NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j M + c_j\| < \|a_j C/2\|$. Тогда

$$\operatorname{sgn}(a_j(x + C\theta(x) - C/2) + NL_{\epsilon a_j + \mu b_j}(x) - b_j M + c_j) = \operatorname{sgn}(a_j(x + C\theta(x) - C/2))$$

и снова не зависит от выбора $NL_\mu^F(x)$. Теперь

$$h(x) = x + C\theta(x) + NL_{\epsilon+\tau}(x) - C/2 + NL_\mu^F(x) - M$$

и положив $\mu = \min(\min_{a_j \neq 0} \|\frac{1}{4a_j}\|, 1/4, \min_{b_j \neq 0} \|\frac{1}{2b_j}\|)$, $\epsilon = \tau = \mu/3$, получим, что можно взять $NL_\mu^F(x) = -NL_{\epsilon+\tau}(x)$, и тогда т.к. $C > 0$ $H(x) = h(Cx)/C + M = x + \theta(x)$. \square

Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $[U]$ содержит все одноместные кусочно-постоянные функции.

Доказательство. Легко следует из 3 и 1. \square

Лемма 2. Пусть $L_1 \cup \{\Theta_{d_1, d_2, \dots, d_k}(\vec{y}) | \forall k \in N, \vec{d} \in R^k\} \subseteq U$. Тогда если $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, то и все n -местные кусочно-постоянные функции принадлежат $[U]$.

Доказательство. Заметим, что раз $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, то и $\theta(\sum_{i=1}^n a_i x_i + c_i) \in [U]$, $\forall a_i, c$. Также по доказанному выше $\Theta_{\vec{d}}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n d_i \theta(y_i) \in [U]$ Теперь остается заметить, что произвольная кусочно-постоянная функция имеет вид $\sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$. \square

Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда если $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, то и все n -местные кусочно-постоянные функции принадлежат $[U]$.

Доказательство. Легко следует из 3 и 1. \square

Лемма 3. Пусть $L_1 \cup \{\theta(x) + \theta(y)\} \subseteq U$, $G_i \subset R^p$, $1 \leq i \leq k$ - множества значений n -мерного параметра, такие, что $\chi(\vec{x} \in G_i) \in [U]$. Тогда $\chi(\vec{x} \in \cup_{i=1}^k G_i) \in [U]$, $\chi(\vec{x} \in \cap_{i=1}^k G_i) \in [U]$, $\chi(\vec{x} \in R^n/G_i) \in [U]$.

Доказательство. Очевидно:

- 1) $\chi(\vec{x} \in R^n/G_i) = 1 - \chi(\vec{x} \in G_i)$
- 2) $\chi(\vec{x} \in G_1 \cap G_2) = \theta(\theta(\chi(\vec{x} \in G_1) - 0.5) + \theta(\chi(\vec{x} \in G_2) - 0.5) - 2)$.
- 3) $\chi(\vec{x} \in G_1 \cup G_2) = \theta(\theta(\chi(\vec{x} \in G_1) - 0.5) + \theta(\chi(\vec{x} \in G_2) - 0.5) - 0.5)$. \square

Более того, мы можем заметить, что $\theta(f(\vec{x})) = \chi(\vec{x} : f(\vec{x}) \geq 0)$, $1 - \theta(-f(\vec{x})) = \chi(\vec{x} : f(\vec{x}) > 0)$, а $\chi(\vec{x} \in \cap_{i=1}^k G_i) = \prod_{i=1}^k \chi(\vec{x} \in G_i)$. Таким образом, если $\theta(f(x)) \in [U]$, $\theta(g(x)) \in [U]$, то и $\theta(f(x))\theta(g(y)) \in [U]$. Отсюда легко следует, что если $f(x) \in [U] \cap PC$, $g(y) \in [U] \cap PC$, то и $f(x)g(y) \in [U] \cap PC$.

Также заметим, что:

$$\theta(\theta(a - 0.5) + \theta(b - 0.5) - 2) = a \wedge b,$$

$$\theta(\theta(a - 0.5) + \theta(b - 0.5) - 0.5) = a \vee b,$$

$1 - \theta(a - 0.5) = \neg a$ для $a, b \in \{0, 1\}$. Назовем множество $G \subset R^k$ выражимым в T , если

$$\exists f : f \in [T], f(\vec{x}) = \chi(\vec{x} \in G).$$

Лемма 4. Пусть $L_1 \cup \{\theta(x) + \theta(y)\} \subseteq U$, а $1 \leq i \leq k$, G_i - выразимые множества значений n -мерного параметра. Тогда если $F \in [A \setminus B, A \cup B, A \cap B]$, то $\chi(\vec{x} \in F(G_1, G_2, \dots, G_k)) \in [U]$

Доказательство. Очевидно следует из леммы 3. \square

Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$, $G_i, 1 \leq i \leq k$ - выразимые множества значений n -мерного параметра. Тогда если $F \in [A \setminus B, A \cup B, A \cap B]$, то $\chi(\vec{x} \in F(G_1, G_2, \dots, G_k)) \in [U]$

Лемма 5. Пусть функция f принимает бесконечное количество значений, а функция g - конечное $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$. Тогда

$$\theta(f + g) = \sum_{i=1}^p \theta(f + C_i)\theta(g - C_i)\theta(C_i - g)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^p \theta(f + C_i)\theta(g - C_i)\theta(C_i - g) = \sum_{i=1}^p \theta(f + C_i)\chi(g = C_i) = \theta(f + g)$$

\square

Лемма 6. Функция $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ может быть записана в такой форме, что $a_{1j} \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее преобразование: $\forall j : B_j > 0$ положим $\forall i, t : A'_{tj} = A_{tj}/B_j, c'_j = c_j/B_j, B'_j = 1$, и $\forall j : B_j < 0 : \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij}, \forall B_j > 0 : \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$, в случае же $B_j = 0$ положим $\forall i, t : A'_{tj} = A_{tj}, B'_j = 0, c'_j = c_j, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$. Заметим, что после такого преобразования, $h(\vec{x}, y)$ не поменяется. Итак, будем считать, что все $B_j \geq 0$.

\square

Лемма 7. Пусть n и k местные $f(\vec{x}), g(\vec{y})$ имеют векторы нормалей \vec{a}_j к разделяющим плоскостям сигнатур \vec{a}_j, \vec{b}_j соответственно, и

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^s d_i \theta\left(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k\right),$$

$$g(\vec{y}) = \langle \vec{b}_0, \vec{y} \rangle + \sum_{i=1}^{s'} p_i \theta\left(\sum_{j=1}^{k'} \chi(\text{sgn}(\langle \vec{b}_j, \vec{y} \rangle + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k'\right),$$

Тогда у $h(x_1, x_2, \dots = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, g(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}))$ множество векторов нормалей к разделяющим плоскостям сигнатур - $\{(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{(n-1)j}, a_{nj}\vec{b}_0) \forall j \neq 0\} \cup \{(0, 0, \dots, 0, \vec{b}_i), \forall i \neq 0\}$ и линейной частью $(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{(n-1)0}, a_{n0}\vec{b}_0)$

Доказательство. Распишем h :

$$\begin{aligned}
h(x_1, x_2, \dots) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, g(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} a_{i0} x_i + a_{n0} \sum_{i=1}^k b_{i0} x_{i+n-1} + \\
&+ \sum_{i=1}^{s'} p_i \theta \left(\sum_{j=1}^{k'} \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^k b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k' \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^k b_{l0} x_{l+n-1} + \right. \\
&+ c_j + \sum_{i'=1}^{s'} p_{i'} \theta \left(\sum_{j=1}^{k'} \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^k b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k' \right)) = \sigma_{ij}) - k)
\end{aligned}$$

С учетом 5 имеем:

$$\begin{aligned}
NL_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+k-1}) &= \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^k b_{l0} x_{l+n-1} + \right. \\
&+ c_j + \sum_{i'=1}^{s'} p_{i'} \theta \left(\sum_{j=1}^{k'} \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^k b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k' \right)) = \sigma_{ij}) - k) = \\
&= \sum_{i=1}^s d_i \theta \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i'=1}^{s'} \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^k b_{l0} x_{l+n-1} + c_j + \right. \\
&+ p_{i'}) = \sigma_{ij}) \theta \left(\sum_{j=1}^{k'} \chi(\operatorname{sgn}(\sum_{l=1}^k b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k' \right) - k),
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что нелинейная часть g в нелинейной части f не создает плоскостей сигнатур с нормальными какими-либо еще нормальными к ним. \square

Лемма 8. Пусть $U \not\subseteq NLL_1$. Тогда $\forall n \geq 2$

$\exists f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такие, что их линейные части $L(\vec{x}) = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle$, а векторы нормалей не содержащие нулевых компонент к разделяющим плоскостям сигнатур f_i имеют вид

$$\left(\overbrace{1, 1, 1, \dots, 1}^i, \overbrace{b_k, b_k, b_k, \dots, b_k}^{n-i} \right)$$

для некоторого набора $b_k \neq 0$ (возможно пустого).

Доказательство. Итак, так как $U \not\subseteq NLL_1$, то по 6 $\exists h \in [U]$:
 $h(x, y) = x + y + \sum_{i=1}^{s_1} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k_1} \chi(\text{sgn}(a_j x + B_j y + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$, $a_j \in \{0, 1\}$.
Докажем индукцией по количеству входов n . Возьмем набором $b_k = B_j$:
 $a_j \neq 0, b_j \neq 0$
При $n = 2$ утверждение доказано ($f_1(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$).
Пусть утверждение доказано при $n = k$. Тогда для $n = k + 1$, рассмотрим

$$g_i(\vec{x}, x_{k+1}) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, h(x_k, x_{k+1})), i = 1 \dots n - 1$$

$$g_k(\vec{x}, x_{k+1}) = f_{k-1}(h(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$$

Линейные части этих функций по 7 будут иметь вид $L(\vec{x}) = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle$, а векторы нормалей не содержащие нулевых компонент к разделяющим плоскостям сигнатур по 7 будут иметь вид для $g_i, i = 1 \dots n - 1$:

$$\overbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}^i, \overbrace{(b_k, b_k, b_k, \dots, b_k, b_k)}^{n-i},$$

а для g_k :

$$\overbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}^k, b_k.$$

□

4. Завершение доказательства достаточности

Теорема 5. Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $PC \subset [U]$

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы по индукции по количеству входов. Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$.

Для $n=1$ доказано в 1.

Для $n=2$ утверждение следует из теорем 4 и 5 публикации [3] (ее результат очевидным образом можно повторить пользуясь функциями $\sum_{i=1}^p d_i \theta(x_i)$ и $x + \theta(x)$) и 2.

Пусть построено для всех $k < n$. Ясно, что $H(y, \vec{x}) = y - \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(\text{sgn}(-\sum_{l=1}^{n-1} A_{lj} x_l + B_j y + c_j) = \sigma_{ij}) - k) \in [U]$.

В соответствии с 6 считаем, что $B_j \in \{0, 1\}$. Зафиксируем $\epsilon_0 > 0$.

Зафиксируем \vec{x}_0 единичной длины, такой что $\forall j : B_j \neq 0$ выполнено $|\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j \rangle| \geq \epsilon_0$, если $\vec{A}_j \neq \vec{e}_0$. Так мы зафиксировали компакт K_{ϵ_0} . Этот компакт - поверхность сферы, с вырезанными полосами вдоль конечного набора линий на сфере. Будем рассматривать $\vec{x} = t(\vec{x}_0 + \vec{\delta})$, $\|\vec{x}_0 + \vec{\delta}\|_{l_2} = 1$, $\|\vec{\delta}\|_{l_1} < \tau$, $\|\vec{x}\|_{l_1} > X_0$.

Запишем усиление условия $\vec{x} = t(\vec{x}_0 + \vec{\delta})$, $\|\vec{x}_0 + \vec{\delta}\|_{l_2} = 1$, $\|\vec{\delta}\|_{l_1} < \tau$ так, чтобы можно было выбрать новую τ усиливающую наше усиление. Рассмотрим набор из $2n - 2$ векторов $V_{con} = (\vec{x}_0 + \gamma \vec{e}_1, \vec{x}_0 + \gamma \vec{e}_2, \dots,$

$\vec{x}_0 + \gamma\vec{e}_{n-1}, \vec{x}_0 - \gamma\vec{e}_1, \vec{x}_0 - \gamma\vec{e}_2, \dots, \vec{x}_0 - \gamma\vec{e}_{n-1}$) и "натянем" на них пирамиду без основания. Заметим, что условие принадлежности этой пирамиде через хар-функции может быть записано с помощью определителей, как

$$\chi_{x_0}^\gamma(\vec{x}) = \prod_{u=1}^{n-1} \chi(\operatorname{sgn} \left(\begin{array}{c} \vec{x} \\ V_{con,u} \\ V_{con,u+1} \\ \dots \\ V_{con,u+n-3} \end{array} \right)) = \operatorname{sgn} \left(\begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ V_{con,u} \\ V_{con,u+1} \\ \dots \\ V_{con,u+n-3} \end{array} \right)) \in [U],$$

считая, что если $g > 2n - 2$, то $V_{con,g} = V_{con,g \bmod (2n-1)+1}$. Для условия $\|\vec{x}\|_{l_1} > X_0$ запись его усиления в виде характеристической функции примет вид

$$\chi_{|X_0|}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n-1} \chi(x_i : x_i < -X_0 \vee x_i > X_0) \in [U].$$

Запишем $H(y, \vec{x})$ в следующей форме:

$$H(y, \vec{x}) = y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) + \sum_{i=1}^s d_i \prod_{j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j),$$

где $R_0 = \langle x_0, e_0 \rangle$, $R_j = \langle x_0, \vec{A}_j \rangle$, а $\chi_{ij}(f) = \chi(\operatorname{sgn}(f) = \sigma_{ij})$.
Для $j : B_j = 0$ положим

$$\chi_j^{-1}(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj} x_t + c_j < 0\right) \in [U],$$

$$\chi_j^0(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj} x_t + c_j = 0\right) \in [U],$$

$$\chi_j^1(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj} x_t + c_j > 0\right) \in [U].$$

Заметим, что если для множества \vec{x} выполнено, что $\chi_j^s(\vec{x}) = 1$, то на нем $\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = V_{ij}$, т.е. константе.

Пусть $B_j \neq 0$.

Для $j : \exists i : A_{ij} = 0$ положим

$$\chi_j^{-1}(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1, t \neq i}^{n-1} A_{tj} x_t + c_j < 0\right) \in [U],$$

$$\chi_j^0(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1, t \neq i}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j = 0\right) \in [U],$$

$$\chi_j^1(\vec{x}) = \chi\left(-\sum_{t=1, t \neq i}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j > 0\right) \in [U].$$

Заметим, что если для множества \vec{x} выполнено, что $\chi_j^s(\vec{x}) = 1$, то на нем

$$\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = V_{ij}, \text{ т.е. константе.}$$

Пусть $B_j \neq 0, A_{ij} \neq 0$.

По ограничению на \vec{x}_0 $R_j \neq R_0$. Тогда:

1) Если $R_j > R_0$, то $\exists \tau > 0 : R_j - \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle > R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle$, а $\exists t_j$, что при $t > t_j$, из того, что $y - t(R_j + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) < D$, будет следовать,
 $\forall i : y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) + d_i < D$. Значит, при $t > t_j$, когда $\chi_{ij}(y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j)$ меняет своё значение, $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ своего значения не меняет. Значит $\exists V_{ij}$, что при $t > t_j$

$$\begin{aligned} \chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D) &= \chi(y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) + \\ &+ \sum_{i=1}^s d_i V_{ij} \prod_{l=1, l \neq j}^k \chi_{il}(B_l y - t(R_l + \langle \vec{A}_l, \vec{\delta} \rangle) + c_l)). \end{aligned}$$

2) Если $R_j < R_0$, то $\exists \tau > 0 : R_j - \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle < \langle \vec{x}_0 + \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle$, а значит при $t > t_j$. из того, что $y - t(\langle \vec{x}_0 + \delta, \vec{A}_j \rangle) > D$, будет следовать, $\forall i : y - t(\langle \vec{x}_0 + \delta, \vec{e}_0 \rangle) + d_i > D$, , а значит $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ при $t > t_j, \forall i$ не зависит от χ_{ij} . Значит, при $t > t_j$, когда $\chi_{ij}(y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j)$ меняет своё значение, $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ своего значения не меняет. Значит $\exists V_{ij}$, что при $t > t_j$

$$\begin{aligned} \chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D) &= \chi(y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) + \\ &+ \sum_{i=1}^s d_i V_{ij} \prod_{l=1, l \neq j}^k \chi_{il}(B_l y - t(R_l + \langle \vec{A}_l, \vec{\delta} \rangle) + c_l)). \end{aligned}$$

3) Отдельно рассмотрим случай, когда $\vec{A}_j = \vec{e}_0$. Положим в этом случае $D > -\min_j c_j + \max_i d_i + 1$. Тогда из $H(y, \vec{x}) > D$, будет следовать, что $y - \sum_{t=1}^{n-1} x_i + N L_{d_i}(y, \vec{x}) > -\min_j c_j + \max_i d_i + 1$, а значит $y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \delta \rangle) + c_j > (c_j - \min_j c_j) + (\max_i d_i - N L_{d_i}(y, \vec{x})) + 1$ т.е. $y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \delta \rangle) + c_j > 0$.

Тогда $\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = V_{ij}$, т.е. константе.

Тогда по вышесказанному, при наложенных нами ограничениях

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^s d_i \prod_{j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& = \sum_{i=1}^s d_i \prod_{(B_j=0 \vee \exists t: A_{tj}=0), j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) * \\
& * \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& = \sum_{i=1}^s d_i \prod_{(B_j=0 \vee \exists t: A_{tj}=0), j=1}^k V_{ij} * \\
& * \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& = \sum_{i=1}^s d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& = \sum_{i=1}^s d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j < R_0, j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) * \\
& * \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j > R_0, j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& * \prod_{(B_j \neq 0, \vec{A}_j = \vec{e}_0), j=1}^k \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = \\
& = \sum_{i=1}^s d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j < R_0, j=1}^k V_{ij} \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j > R_0, j=1}^k V_{ij} * \\
& * \prod_{(B_j \neq 0, \vec{A}_j = \vec{e}_0), j=1}^k V_{ij} = Const
\end{aligned}$$

Добавим начальные ограничения на малость, и обозначим

$$G_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k} = \{ \vec{x} | \chi_{sect}(\vec{x}) \chi_{|X_0|}(\vec{x}) \prod_{u=1}^k \chi_q^{s_u}(\vec{x}) = 1 \}.$$

$$f_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k}(y, \vec{x}) = \chi(y - \langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle + d_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k} > D) *$$

$$*\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x}) \prod_{u=1}^k \chi_q^{s_u}(\vec{x}) \in [U],$$

а значит

$$\begin{aligned} g'_{x_0}(y, \vec{x}) &= \chi(\vec{x} \in \{\vec{x} | \exists (s_1, s_2, \dots, s_k) : f_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k}(y + d_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k}, \vec{x}) = 1\}) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle > D)\chi(\vec{x} \in \cup_{s_1, s_2, \dots, s_k} G_{x_0}^{s_1, s_2, \dots, s_k}) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle > D)\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x}) \in [U] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда пусть } g_{x_0}(y - D, \vec{x}) &= g'_{x_0}(y + D, \vec{x}) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle > 0)\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что при проекции на единичную сферу с центром в нуле множеств $\{\vec{x} : \chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x}) = 1\}$ мы можем выбрать внутри этих проекций на сфере малые окрестности, $O_\phi(\vec{x}_0)$, и эти окрестности образуют открытое покрытие K_{ϵ_0} . Выберем конечное подпокрытие этого компакта ($O_{\phi_1}(\vec{x}_1), O_{\phi_2}(\vec{x}_2), \dots, O_{\phi_a}(\vec{x}_a)$). Обозначим $X_0(g_{x_a})$ константу, которой ограничен модуль аргумента функции g_{x_a} . Тогда получим, что

$$\begin{aligned} W(y, \vec{x}) &= \chi(\vec{x} \in \{\vec{x} | \cup_{u=1}^a \chi(g_{x_u}(\vec{x}) = 1)\})\chi(\vec{x} > \max_a X_0(g_{x_a})) = \\ &= \theta\left(\sum_{u=1}^a \chi(g_{x_u}(\vec{x}) = 1) - 0.5\right)\chi(\vec{x} > \max_a X_0(g_{x_a})) = \\ &= \theta\left(\sum_{u=1}^a \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > 0)\chi_{x_u}(\vec{x})\chi_{|X_a|}(\vec{x}) - 0.5\right)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1} > \max_a X_0(g_{x_a})) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > 0)\theta\left(\sum_{u=1}^a \chi_{x_u}(\vec{x})\chi_{|X_a|}(\vec{x}) - 0.5\right)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1} > \max_a X_0(g_{x_a})) \in [U], \end{aligned}$$

но так как проекции бесконечных конусов покрыли K_{ϵ_0} , то

$$\begin{aligned} W(y, \vec{x}) &= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > 0)\theta\left(\sum_{u=1}^a \chi_{|X_u|}(\vec{x}) - 0.5\right)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1} > \max_a X_0(g_{x_a})) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > 0)\chi_{\max_a X_0(g_{x_a})}(\vec{x}) * \\ & * \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j \rangle| \geq \epsilon_0, A_{ij} \neq 0, \vec{A}_j \neq \vec{e}_0). \end{aligned}$$

Итак, мы научились строить для произвольной $H(y, \vec{x})$ функцию $W(y, \vec{x})$. Обозначим $X_W = \max_a X_0(g_{x_a})$. Построим таким образом W_i , для каждой f_i из 8.

Если при этом набор соответствующих b_i пуст или $\{b_i\} = \{1\}$, то $\forall i$ множитель

$\chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j \rangle| \geq \epsilon_0, A_{ij} \neq 0, \vec{A}_j \neq \vec{e}_0)$ у соответствующей W_i равен единице (так как функция из которых она строилась не имеет нормалей к сигнатурам с ненулевыми компонентами и при этом таких, что $\vec{A}_j \neq \vec{e}_0$).

Иначе объединим множества, на которых $W_i = 1$, и домножим на $\chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x})$ то есть рассмотрим

$$\begin{aligned} W_r(y, \vec{x}) &= (\bigvee_{i=1}^{n-1} W_i(y, \vec{x})) \wedge \chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > D) \chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}) * \\ &* \bigvee_{i=1}^{n-1} \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j^{W_i} \rangle| \geq \epsilon_0, A_{ij}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) = \\ &= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0 \rangle > D) \chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}) * \\ &*(1 - \bigwedge_{i=1}^{n-1} \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i} \rangle| < \epsilon_0, A_{ij}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0)) \end{aligned}$$

По 8 и так как $\vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0$, то $\vec{A}_j^{W_i}$ у имеют вид

$$\underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}_{i-1}, \underbrace{(b_k, b_k, b_k, \dots, b_k)}_{n-i}, b_k \notin \{0, 1\}.$$

Найдем \vec{x} для которых выполнено

$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i} \rangle| < \epsilon_0, A_{ij}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) = 1$. Для этого перепишем в виде набора неравенств вида:

$$\left\| \begin{pmatrix} b_{i_1} - 1, b_{i_1} - 1, b_{i_1} - 1, \dots, b_{i_1} - 1 \\ 0, b_{i_2} - 1, b_{i_2} - 1, b_{i_2} - 1, \dots, b_{i_2} - 1 \\ 0, 0, b_{i_3} - 1, b_{i_3} - 1, \dots, b_{i_3} - 1 \\ \dots \\ \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \underbrace{b_{i_k} - 1, b_{i_k} - 1, b_{i_k} - 1, \dots, b_{i_k} - 1}_{n-i} \\ \dots \\ 0, 0, 0, \dots, 0, b_{i_{n-1}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \right\| < \epsilon_0 \quad (2)$$

Заметим, что матрица квадратная, верхнетреугольная и невырожденная ($b_i \neq 1$). Значит $\|\vec{x}_0\| < J\epsilon_0$, для некоторого $J > 0$. Возьмем $\epsilon_0 = \frac{1}{2J}$. Тогда $\|\vec{x}_0\| < 1/2$. Но $\|\vec{x}_0\| = 1$. Значит нет \vec{x}_0 , удовлетворяющих хоть какой-либо из этих систем. Отсюда следует, что

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i} \rangle| < \epsilon_0, A_{ij}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) = 0.$$

Теперь рассмотрим характеристическую функцию от объединения множества для которого W_r - характеристическая функция, и этого же

множества полученного сдвигом вдоль какого-нибудь вектора, лежащего в $y - \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$, например вдоль (n, \vec{e}_0) . Заметим тогда, что для любого \vec{x} или $\chi(\|\vec{x}\|_{l_1} > \max_{W_i} X_{W_i}) = 1$ или $\chi(\|\vec{x} - A\vec{e}_0\|_{l_1} > \max_{W_i} X_{W_i}) = 1$, где $A = \max_{W_i} X_{W_i}$. Тогда

$$1 - \theta(y - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \theta(W_r(y, \vec{x}) + W_r(y + An, \vec{x} - A\vec{e}_0) - 0.5)$$

Далее из 2 следует, что и все n -местные кусочно-постоянные принадлежат $[U]$. □

5. Доказательство необходимости

Обозначим PC_n - все кусочно-постоянные функции зависящие от n входов.

Теорема 6. Пусть $U = L_1 \cup PC_N$. Тогда $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) \notin [U]$

Доказательство. Заметим, что $PC_N \subset [L_1 \cup \cup_n \{\sum_i^n d_i \theta(x_i)\} \cup \{\theta(\sum_{i=1}^N x_i)\}]$. Предположим, что $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i)$ принадлежит замыканию. Тогда возьмем формулу над $L_1 \cup \{\cup_n \sum_i^n \theta(x_i), \theta(\sum_{i=1}^N x_i)\}$, и проводя в ней преобразования 5 с каждым выражением вида $\sum a_i x_i + \sum d_i \theta(f_i(\vec{x}))$ получим, что

$$\theta\left(\sum_{i=1}^{N+1} x_i\right) = F\left(\theta\left(\sum_{i=1}^N \lambda_{1i_j} x_{i_{j_1}} + c_1\right), \theta\left(\sum_{i=1}^N \lambda_{2i_j} x_{i_{j_2}} + c_2\right), \dots, \theta\left(\sum_{i=1}^N \lambda_{pi_j} x_{i_{j_p}} + c_p\right)\right),$$

т.к. количество непрерывных слагаемых в сумматорах при применении этого преобразования не вырастает, а количество сумм вида $\sum a_i x_i + \sum d_i \theta(f_i(\vec{x}))$ после каждого такого преобразования внутри формулы уменьшается, а всего их конечно.

Пусть $I_k(\vec{x}) = \theta(\sum_{i=1}^N \lambda_{ki_{j_k}} x_{i_{j_k}} + c_k)$. Так как длина каждой последовательности i_{j_k} равна N , то $\forall k \exists l \in \{1, 2, \dots, N, N+1\} : i_{j_k} \neq l$. Заметим, тогда что тогда $I_k(\vec{x}) = I_k(\vec{x} + R\vec{e}_l)$. Обозначим $G_k = \{\vec{x} | G_k(\vec{x}) = 1\}$. Заметим, что для ∂G_k верно, что если $\vec{x} \in \partial G_k$, то и $\vec{x} + R\vec{e}_{l(k)} \in \partial G_k$.

Заметим, что F принимает на вход единицы и нули, и ее значение единица или ноль, и мы ей можем сопоставить логическую функцию, то есть

$$\theta\left(\sum_{i=1}^{N+1} x_i\right) = F(\chi(\vec{x} \in G_1), \chi(\vec{x} \in G_2), \dots, \chi(\vec{x} \in G_p))$$

Теперь преобразуем логическое выражение в выражение "пересечений и объединений" в соответствии с 4.

$$\theta\left(\sum_{i=1}^{N+1} x_i\right) = \chi(\vec{x} \in F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p))$$

Заметим, что для почти всех точек $\partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p)$, кроме множества точек нулевой меры (относительно меры μ на N -мерных объемах, т.е. меры на границе), выполнено, что $\exists \vec{x} \in \partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p)$, такой, что $\exists \epsilon > 0, l : \vec{x} + R\vec{e}_l \in \partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p), \forall |R| < \epsilon$. Это свойство выполнено, для начальных G_i , которые являются бесконечными многогранниками и продолжает выполняться, при конечном объединении, пересечении и взятии дополнения этих многогранников, так как грани получающихся при таком процессе многогранников - конечные объединения и пересечения подмножеств ∂G_i с границами в виде ломаных, и каждая грань получающегося многогранника - какое-то подмножество одной из граней G_i , при этом, если мера $\mu(\partial G_k \cap \partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p)) > 0$, то свойство выше выполнено для всех $\vec{x} \in \partial G_k \cap \partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p)$ кроме точек границы этого пересечения (в смысле границы на $\partial F_{/, \cup, \cap}(G_1, G_2, \dots, G_p)$). Мера таких точек относительно μ - нулевая. Но свойство выше, очевидно, не выполнено для $\partial\{\vec{x} | \theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = 1\}$, так как если для $\vec{x} : \sum_{i=1}^{N+1} x_i = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle = 0$, то $\forall R \neq 0, l : \langle \vec{e}_0, \vec{x} + R\vec{e}_l \rangle = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle + \langle \vec{e}_0, R\vec{e}_l \rangle = R\langle \vec{e}_0, \vec{e}_l \rangle = R \neq 0$, а значит $\forall R \neq 0, l : \vec{x} + R\vec{e}_l \notin \partial\{\vec{x} | \theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = 1\}$. Противоречие. \square

Обозначим $NLL_{1,n} = [L_1 \cup \{x + NL(x, \vec{y}), NL(x, \vec{y}) \in PC_n\}]$.

Теорема 7. Пусть $U = L_1 \cup NLL_{1,n}$. Тогда $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) \notin [U]$

Доказательство. Заметим, что функция с линейным входом в формуле, должна лежать внутри θ после чего работает предыдущее доказательство. \square

5.1. Основной результат

Теорема 8. Пусть U содержит все одноместные линейные и ещё конечное число кусочно-параллельных. Замыкание U содержит все кусочно-постоянные тогда, и только тогда, когда $U \not\subseteq NLL_1, FL$

Доказательство. Достаточность показана в 5. С другой стороны, очевидно, что есть кусочно-постоянные функции не лежащие в FL , например $\theta(x)$. Кроме того, если $U \subset NLL_1$, то $\exists k : U \subset NLL_{1,k}$, т.к. количество функций которые не одноместные-линейные в U конечно. Но тогда по 7 не все кусочно-постоянные выражаются. \square

5.2. Заключение

Таким образом, в настоящей работе найден критерий выразимости кусочно-постоянных функций через одноместные линейные с конечной системой кусочно-параллельных в виде добавки. Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.А. Часовских.

Список литературы

- [1] В. С. Половников, “О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 6, 31–35.
- [2] Половников В.С., “О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питтса.”, *М., Интеллектуальные системы.*, 2007, № 11, 261-275.
- [3] Отрошенко А.Д., “Классы кусочно-параллельных функций, содержащие все одноместные.”, *М., Интеллектуальные системы.*, 2020, № 4, 57-74.

On the expressibility of piecewise constant functions in the space of piecewise parallel Otroschenko A. D.

For a finite system of piecewise parallel functions implemented by schemes of linear elements and Heaviside functions, the criterion for the expressiveness of piecewise constant functions is obtained, supplemented by all single linear functions. Thus, the criterion of expressiveness of the binary classifier implemented by the McCulloch-Pitts neural scheme is obtained.

Keyword: Piecewise constant function, piecewise parallel function, completeness problem, expressibility problem, McCulloch-Pitts neural circuits.

References

- [1] V. S. Polovnikov, “On the problem of checking functional completeness in the class of piecewise parallel functions”, *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat., fur.*, 2008, № 6, 31–35 (In Russian).
- [2] Polovnikov V. S., “On the nonlinear complexity of McCulloch-Pitts neural circuits.”, *M., Intelligent systems.*, 2007, № 11, 261-275 (In Russian).
- [3] Otroschenko A.D., “Classes of piecewise parallel functions containing all single ones.”, *M., Intelligent systems.*, 2020, № 4, 57-74 (In Russian).

Часть 3.
Математические модели

Новые по порядку экспоненциальные темпы роста

С. А. Комков¹

Для конечного множества A с заданным на нём множеством операций M определена функция $d_{(A,M)}(n)$, называемая темпом роста. Порядок роста этой функции характеризует силу и исчислимость множества операций. Известно, что темп роста принадлежит либо классу $O(n^k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, либо классу $2^{\Theta(n)}$. В работе исследуются классы экспоненциальных темпов роста, на которые разбиваются темпы роста из класса $2^{\Theta(n)}$ при выносе асимптотического ограничения из показателя. Показано, что для любых заранее заданных натуральных k и c существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k \cdot c^n)$. Если дополнительно $c \geq k + 1$, то существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$.

Ключевые слова: темп роста, генерирующие множества, конечные множества, EGP.

1. Введение

Рассмотрим декартову степень $n \in \mathbb{N}$ конечного множества A с заданным на нём множеством операций M . Элементы A^n будем называть наборами. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам по координатам, мы можем получать новые наборы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(a_1^1, \dots, a_1^k) \\ \vdots \\ f(a_n^1, \dots, a_n^k) \end{pmatrix}, f \in M.$$

Темпом роста для пары (A, M) называют функцию $d_{(A,M)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, равную для каждого n минимальному числу наборов, из которых можно получить всё A^n , применяя операции из M по координатам. Таким образом, асимптотика темпа роста характеризует силу и исчислимость заданного множества операций.

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $M = \{\neg\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $M = \{+\text{mod } 3\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = n$.

¹Комков Степан Алексеевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stepan.komkov@intsy.su.ru.

Комков Степан Алексеевич — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Множество наборов, из которых можно получить всё A^n , применяя операции из M , называют *генерирующим множеством для A^n по операциям из M* . Если при этом мощность этого множества равна $d_{(A,M)}(n)$, то это *минимальное генерирующее множество*.

Темп роста — не просто количественная характеристика. От темпа роста может зависеть тип решаемой задачи. Так, например, в [1] показано, что подкванторная задача удовлетворения ограничений (QSCP) сводится к обычной задаче удовлетворения ограничений (SCP) в случае если алгебра, задающая язык ограничений, имеет темп роста из класса $O(n^k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Изучение темпов роста началось с работ Джеймса Уиголда, посвящённых темпам роста конечных групп. В [9, 10, 11] он показал, что темп роста произвольной нетривиальной совершенной конечной группы принадлежит классу $\Theta(\log n)$, а темп роста произвольной несовершенной конечной группы — классу $\Theta(n)$.

Возможные темпы роста для конечных полугрупп [12] отличаются от темпов роста для конечных групп. Если конечная полугруппа содержит нейтральный элемент, то её темп роста принадлежит классу $\Theta(n)$. В противном случае её темп роста принадлежит классу $2^{\Theta(n)}$.

Полученные результаты для конечных групп были обобщены на другие классические конечные алгебраические структуры [8]. Оказалось, что темпы роста нетривиальных колец, модулей, алгебр и алгебра Ли также принадлежат одному из классов $\Theta(\log n)$ или $\Theta(n)$.

Возникает закономерный вопрос о существовании таких пар (A, M) , что $d_{(A,M)}(n)$ не принадлежит ни одному из классов $\Theta(\log n)$, $\Theta(n)$ или $2^{\Theta(n)}$. Оказалось, что такие пары существуют. В [2] показано, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k)$.

В [3, 4] обобщены результаты для классических алгебраических структур на случай конечных множеств с некоторыми ограничениями на множества заданных на них операций. Однако, полученные критерии вновь разбивают возможные темпы роста на классы $\Theta(\log n)$, $\Theta(n)$ или $2^{\Theta(n)}$.

В [14] показано, что темп роста принадлежит либо классу $O(n^k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, либо классу $2^{\Theta(n)}$. Актуален вопрос о существовании темпов роста, принадлежащих одновременно классам $\omega(\log n)$ и $o(n)$.

В [6] найдены все возможные темпы роста пар вида (E_2, M) . В этом случае темпы роста асимптотически равны одной из функций: $\log n$, n , 2^n , 2^{n-1} .

Возникает вопрос о дальнейшем уточнении порядков и асимптотик возможных темпов роста. Так, например, среди пар (A, M) , чей темп роста принадлежит классу $\Theta(\log n)$, можно выделить пары с *минимальным логарифмическим* темпом роста. Это такие пары, для которых

$d_{(A,M)}(n) - \log_{|A|} n \in O(1)$. Существуют критерии минимального логарифмического темпа роста [7, 5].

В данный момент все экспоненциальные темпы роста группируются в один класс, где асимптотически ограничен показатель экспоненты. Возникает вопрос о выносе асимптотического ограничения из показателя экспоненты. В настоящей работе показано, что для любых заранее заданных натуральных k и c существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k \cdot c^n)$. Если дополнительно $c \geq k + 1$, то существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

2. Формулировка и доказательство основных результатов

Приведем некоторые общеизвестные результаты, которые нам понадобятся:

Замечание 1. $d_{(A,M)} = d_{(A,[M])}$, где $[\cdot]$ — замыкание по операциям суперпозиции, A и M — произвольные.

Замечание 2. $d_{(A,M)} = d_{(A,M \cup \{x\})}$, где x — тождественная функция, A и M — произвольные.

Для биномиального распределения известна оценка вероятности того, что сумма превосходит математическое ожидание на заранее заданную величину x :

Теорема. (Граница Чернова [13]) Пусть $B(n, p)$ — биномиальное распределение с вероятностью успеха p и числом испытаний n . Тогда $P(B(n, p) > n \cdot p + x) \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)}\right)$.

Сформулируем и докажем вспомогательные леммы:

Лемма 1. Пусть $f(n) > 0$, $f(0) = 1$ и $f(n) \in \Theta((\log n)^m \cdot n^k \cdot t^n)$, $n \rightarrow \infty$, где $m, k \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $c \in \mathbb{N}$ верно, что $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot f(l) \in \Theta((\log n)^m \cdot n^k \cdot (c+t)^n)$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как $f(n) > 0$ и $f(n) \in \Theta((\log n)^m \cdot n^k \cdot t^n)$, $n \rightarrow \infty$, то существуют такие $p, P > 0$, что $p \cdot (\log n)^m \cdot n^k \cdot t^n \leq f(n) \leq P \cdot (\log n)^m \cdot n^k \cdot t^n$. Тогда при достаточно большом n выполняется:

$$\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot f(l) \geq \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot p \cdot (\log l)^m \cdot l^k \cdot t^l \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq p \cdot \left(\log \left(\frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \right) \right)^m \cdot \sum_{l=\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \rfloor + 1}^n \frac{n!}{l! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot t^k \cdot t^l \geq \\
&\geq p \cdot \left(\log \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right)^m \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot t^k \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{l=\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \rfloor + 1}^n \frac{(n-k)!}{l! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot t^k \cdot t^{l-k} \geq \\
&\geq p \cdot \left(\log \frac{t \cdot n}{4 \cdot (t+c)} \right)^m \cdot (n-k)^k \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{l=\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \rfloor + 1}^n \frac{(n-k)!}{(l-k)! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot t^{l-k} \geq \\
&\geq p \cdot \left(\log n - \log \frac{4 \cdot (t+c)}{t} \right)^m \cdot (n-k)^k \cdot (c+t)^{n-k} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{l=\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \rfloor + 1}^n C_{n-k}^{l-k} \cdot \left(\frac{c}{c+t} \right)^{n-l} \cdot \left(\frac{t}{c+t} \right)^{l-k} = \\
&= p \cdot \left(\log n - \log \frac{4 \cdot (t+c)}{t} \right)^m \cdot (n-k)^k \cdot (c+t)^{n-k} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{l=\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} + k \rfloor + 1}^{n-k} C_{n-k}^l \cdot \left(\frac{c}{c+t} \right)^{n-k-l} \cdot \left(\frac{t}{c+t} \right)^l = \\
&= p \cdot \left(\log n - \log \frac{4 \cdot (t+c)}{t} \right)^m \cdot (n-k)^k \cdot (c+t)^{n-k} \cdot \\
&\quad \cdot P \left(B(n-k, \frac{t}{c+t}) \geq \left\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right\rfloor + 1 \right).
\end{aligned}$$

Оценим вероятность для достаточно больших n , используя границу Чернова:

$$P \left(B(n-k, \frac{t}{c+t}) \geq \left\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right\rfloor + 1 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(B(n-k, \frac{t}{c+t}) > \left\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right\rfloor\right) = \\
&= \left(1 - P\left(B(n-k, \frac{t}{c+t}) \leq \left\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right\rfloor\right)\right) = \\
&= \left(1 - P\left(B(n-k, \frac{c}{c+t}) > n-k - \left\lfloor \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)} \right\rfloor\right)\right) \geq \\
&\geq \left(1 - P\left(B(n-k, \frac{c}{c+t}) > n-k - \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (t+c)}\right)\right) = \\
&= \left(1 - P\left(B(n-k, \frac{c}{c+t}) > \frac{c}{c+t} \cdot (n-k) + \frac{t \cdot (n-k)}{2 \cdot (c+t)}\right)\right) \geq \\
&\geq \left(1 - \exp\left(\frac{-t^2 \cdot (n-k)^2 \cdot (t+c)^2}{2 \cdot 4 \cdot (c+t)^2 \cdot (n-k) \cdot t \cdot c}\right)\right) = \\
&= \left(1 - \exp\left(\frac{-t \cdot (n-k)}{8 \cdot c}\right)\right) \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot f(l) &\geq \frac{p}{2} \cdot \left(\log n - \log \frac{4 \cdot (t+c)}{t}\right)^m \cdot \\
&\cdot (n-k)^k \cdot (c+t)^{n-k} \in \Omega\left((\log n)^m \cdot n^k \cdot (c+t)^n\right).
\end{aligned}$$

Оценим сумму сверху:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot f(l) &\leq \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot P \cdot (\log l)^m \cdot l^k \cdot t^l \leq \\
&\leq P \cdot (\log n)^m \cdot \left(\sum_{l=0}^{k-1} C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot l^k \cdot t^l + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=k}^n \frac{n!}{(l-k)! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot \frac{l^k}{l \cdot \dots \cdot (l-k+1)} \cdot t^l\right) \leq \\
&\leq P \cdot (\log n)^m \cdot \left(k \cdot n^{k-1} \cdot c^n \cdot (k-1)^k \cdot t^{k-1} + \right. \\
&\quad \left. + L \cdot n^k \cdot t^k \cdot \sum_{l=k}^n \frac{(n-k)!}{(l-k)! \cdot (n-l)!} \cdot c^{n-l} \cdot t^{l-k}\right) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq P \cdot (\log n)^m \cdot \left(n^{k-1} \cdot c^n \cdot k^{k+1} \cdot t^{k-1} + \right. \\
&\quad \left. + L \cdot n^k \cdot t^k \cdot \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l! \cdot (n-k-l)!} \cdot c^{n-k-l} \cdot t^l \right) = \\
&= P \cdot (\log n)^m \cdot \left(n^{k-1} \cdot c^n \cdot k^{k+1} \cdot t^{k-1} + \right. \\
&\quad \left. + L \cdot n^k \cdot t^k \cdot (c+t)^{n-k} \right) \in O \left((\log n)^m \cdot n^k \cdot (c+t)^n \right).
\end{aligned}$$

Здесь L — некоторая константа, ограничивающая последовательность $\frac{l^k}{l \cdot (l-1) \cdot \dots \cdot (l-k+1)}$. Так как последовательность $\frac{l^k}{l \cdot (l-1) \cdot \dots \cdot (l-k+1)}$, $l \geq k$, сходится при $l \rightarrow \infty$, то такая константа существует.

Следовательно, $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot c^{n-l} \cdot f(l) \in \Theta \left((\log n)^m \cdot n^k \cdot (c+t)^n \right)$, $n \rightarrow \infty$. \square

Лемма 2. Пусть $d_{(A,M)}(n)$ принадлежит одному из следующих классов: $\Theta(\log n)$, $n \rightarrow \infty$, или $\Theta(n^k)$, $n \rightarrow \infty$, для некоторого натурального k . Тогда для любого натурального c существует такая пара (B, M') , что $d_{(B,M')}(n) \in \Theta \left(d_{(A,M)}(n) \cdot c^n \right)$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Случай, когда $c = 1$ тривиален. Достаточно взять $B = A$ и $M' = M$. Рассмотрим случаи, когда $c > 1$.

Рассмотрим множество $B = A \cup \{b_1, \dots, b_c\}$, где $\{b_1, \dots, b_c\}$ — такое множество, что $\{b_1, \dots, b_c\} \cap A = \emptyset$. Зададим на множестве B множество операций M' , сопоставив каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ функцию

$$f'(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} b_1, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = b_1, \\ \dots & \\ b_{c-1}, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = b_{c-1}, \\ f(x_1, \dots, x_n), & x_1, \dots, x_n \in A, \\ b_c, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в частности $f'(x_1, \dots, x_n) = b_c$, если хотя бы один из x_i , $1 \leq i \leq n$, равен b_c .

Покажем, что $d_{(B,M')}(n) \in \Theta \left(d_{(A,M)}(n) \cdot c^n \right)$. Рассмотрим множество наборов $\bar{B} = (B \setminus \{b_c\})^n$. Рассмотрим набор $t \in \bar{B}$ у которого некоторые координаты равны b_1 . Без утери общности будем считать, что это первые l координат. Допустим, что мы можем получить набор t из наборов a^1, \dots, a^m применяя операцию из M' по координатно:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_1^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ t_{l+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда никакая a_i^j , $l + 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, не принадлежит множеству $\{b_1, b_c\}$, иначе t_i для некоторого $i \in \{l + 1, \dots, n\}$ принадлежало бы множеству $\{b_1, b_c\}$. Также все a_i^j , $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq m$, равны b_1 , иначе в результате не получилось бы b_1 .

Таким образом, набор t можно получить только из таких наборов \bar{B} , что их множество координат со значением b_1 совпадает с множеством координат набора t со значением b_1 .

Проводя аналогичные рассуждения для каждого из значений b_2, \dots, b_{c-1} , а так же множества A , мы получаем, что наборы из \bar{B} можно получить только из наборов \bar{B} таких, что значения b_1, \dots, b_{c-1} , а также значения из множества A встречаются в одних и тех же координатах.

Разобьем множество \bar{B} на c^n классов эквивалентности. Согласно этому разбиению будем считать эквивалентными те наборы, у которых значения b_1, \dots, b_{c-1} , а также значения из множества A встречаются в одних и тех же координатах. По вышеприведенным рассуждениям наборы из каждого построенного класса эквивалентности можно получить только из других наборов этого класса эквивалентности.

Рассмотрим класс эквивалентности ϵ , у которого значения из множества A встречаются в $l \geq 1$ координатах. Без утери общности будем считать, что это первые l координат.

Пусть X — генерирующее множество для B^n по операциям из M' . Рассмотрим подмножество наборов генерирующего множества X из класса эквивалентности ϵ . Это подмножество непустое, так как наборы класса эквивалентности ϵ нельзя получить ни из чего другого. Все наборы этого подмножества, а также наборы, которые мы из них получаем, совпадают в последних $n - l$ координатах. То есть, чтобы получить все возможные наборы класса эквивалентности ϵ , достаточно получить все возможные комбинации значений в первых l координатах внутри этого класса эквивалентности. На значениях из A операции из M' ведут себя также как операции множества M , из которых они были получены. Из этого следует, что в X должно быть не менее $d_{(A,M)}(l)$ наборов из класса эквивалентности ϵ .

Положим, что $d_{(A,M)}(0) = 1$. Тогда полученный вывод становится верным для случая $l = 0$.

Итого мощность множества X не меньше чем $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c - 1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l)$. Здесь суммирование ведет по числу

координат со значениями из множества A в классе эквивалентности. Вычет C_n^l соответствует количеству способов выбрать эти координаты. Для каждого выбранного множества координат существует $(c-1)^{n-l}$ способов сопоставить каждой из оставшихся координат одно из значений b_1, \dots, b_{c-1} . Наконец, для каждого полученного класса эквивалентности в генерирующем множестве должно быть не менее $d_{(A,M)}(l)$ наборов из этого класса эквивалентности.

Покажем, что существует генерирующее множество размера $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c-1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l)$. В качестве его примера возьмем множество X , состоящее только из некоторых наборов множества \bar{B} . А именно, из каждого класса эквивалентности, в котором значения из A встречаются на l координатах, в X возьмем $d_{(A,M)}(l)$ таких наборов, что если отбросить из них координаты не из A , то оставшиеся наборы будут генерирующим множеством для A^l по операциям из M .

По построению множества X и определению классов эквивалентности из множества X заведомо можно получить все наборы из \bar{B} . Покажем, как из этих наборов теперь получить все наборы, содержащие значение b_c .

Без утери общности согласно замечаниям можно считать, что M — замкнутое множество, содержащее все селекторы. Значит, в частности M содержит селектор $g_1^2(x_1, x_2) = x_1$.

Рассмотрим произвольный набор $u \in B^n \setminus \bar{B}$. Без утери общности будем считать, что только первые l координат этого набора равны b_c . Тогда набор u можно получить из наборов \bar{B} следующим образом:

$$g_1^{2'} \left(\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ u_{l+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ u_{l+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow \begin{pmatrix} g_1^{2'}(b_1, a) \\ \vdots \\ g_1^{2'}(b_1, a) \\ g_1^{2'}(u_{l+1}, u_{l+1}) \\ \vdots \\ g_1^{2'}(u_n, u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_c \\ \vdots \\ b_c \\ u_{l+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Здесь a — произвольный элемент из A .

Итак, $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c-1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l)$ наборов необходимо и достаточно. Так как $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c-1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l) = \sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c-1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l) \cdot 1^l$, то по лемме 1 получаем, что $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (c-1)^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l) \in \Theta(d_{(A,M)}(n) \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$. \square

Лемма 3. Пусть $d_{(A,M)}(n)$ принадлежит классу: $\Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая пара (B, M') , что $d_{(B,M')}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^{k+1} \cdot (c+1)^n)$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим множество $B = A \cup \{-1, 0, 1\}$, где $\{-1, 0, 1\} \cap A = \emptyset$. Этого всегда можно добиться за счет переобозначения

элементов множества A . Зададим на множестве B множество операций M' , сопоставив каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ две функции на множестве B :

$$f'(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = 0, \\ 1, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = 1, \\ f(x_1, \dots, x_n), & x_1, \dots, x_n \in A, \\ -1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$f''(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \max(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}, \\ a, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = a \in A, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в частности $f'(x_1, \dots, x_n) = -1$ и $f''(x_1, \dots, x_n) = -1$, если хотя бы один из x_i , $1 \leq i \leq n$, равен -1 .

Покажем, что $d_{(B, M')}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^{k+1} \cdot (c+1)^n)$, $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим набор t , у которого все координаты принадлежат множеству $A \cup \{0\}$. Без утери общности будем считать, что только первые l координат принадлежат множеству A . Допустим, что мы можем получить набор t из наборов a^1, \dots, a^m применяя операцию из M' по координатно:

$$\left(\begin{array}{c} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} a_1^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right).$$

Если набор получен с помощью операции вида f'' , то $a_i^1 = \dots = a_i^m = t_i$, $1 \leq i \leq l$, так как $t_i \in A$, $1 \leq i \leq l$. Также $a_i^1 = \dots = a_i^m = 0$, $l+1 \leq i \leq n$, так как эти элементы должны принадлежать множеству $\{0, 1\}$, и их максимум должен быть равен нулю. Следовательно, с помощью операций операций вида f'' набор t из неравных ему наборов получен быть не может.

Если набор получен с помощью операции вида f' , то $a_i^1 = \dots = a_i^m \in A$, $1 \leq i \leq l$, так как $t_i \in A$, $1 \leq i \leq l$. Также $a_i^1 = \dots = a_i^m = 0$, $l+1 \leq i \leq n$ по определению операций вида f' .

Итак, наборы, у которых все координаты принадлежат множеству $A \cup \{0\}$, могут быть получены только из таких неравных им наборов, у которых ровно те же координаты равны 0, а остальные координаты из множества A .

Рассмотрим набор t , у которого все координаты кроме одной принадлежат множеству $A \cup \{0\}$. Оставшаяся же координата равняется 1. Без утери общности будем считать, что только первые l координат принадлежат множеству A , а последняя координата равна 1. Допустим, что мы

можем получить набор t из наборов a^1, \dots, a^m применяя операцию из M' по координатам:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_1^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если набор получен с помощью операции вида f'' , то $a_i^1 = \dots = a_i^m = t_i$, $1 \leq i \leq l$, так как $t_i \in A$, $1 \leq i \leq l$. Также $a_i^1 = \dots = a_i^m = 0$, $l+1 \leq i \leq n-1$, так как эти элементы должны принадлежать множеству $\{0, 1\}$, и их максимум должен быть равен нулю. Наконец, хотя бы одна из a_n^1, \dots, a_n^m должна быть равна 1, чтобы их максимум равнялся 1. Следовательно, с помощью операций вида f'' набор t из неравных ему наборов получить быть не может.

Если набор получен с помощью операции вида f' , то $a_i^1 = \dots = a_i^m \in A$, $1 \leq i \leq l$, так как $t_i \in A$, $1 \leq i \leq l$. Также $a_i^1 = \dots = a_i^m = 0$, $l+1 \leq i \leq n-1$, и $a_n^1 = \dots = a_n^m = 1$ по определению операций вида f' .

Итак, наборы, у которых все координаты принадлежат множеству $A \cup \{0\}$ кроме одной единичной координаты, могут быть получены только из таких неравных им наборов, у которых ровно те же координаты равны 0, совпадает единичная координата, а остальные координаты из множества A .

Рассмотрим множество $K \subset B^n$, состоящее из наборов, где l фиксированных координат принадлежат множеству A , а все остальные координаты равны 0, за исключением, быть может, одной фиксированной координаты, равной 1. Без утери общности будем полагать, что первые l координат принадлежат множеству A .

Пусть X — генерирующее множество для B^n по операциям из M' . Множество $K \cap X$ — непустое, так как наборы множества K нельзя получить ни из чего другого. Все наборы множества K , а также наборы, которые мы из них получаем, совпадают в последних $n-l$ координатах. То есть, чтобы получить все возможные наборы множества K , достаточно получить все возможные комбинации значений в первых l координатах. На значениях из A операции вида f' из M' ведут себя также как операции множества M , из которых они были получены. С помощью операций вида f'' из M' получить новые наборы из A^n невозможно. Из этого следует, что в X должно быть не менее $d_{(A,M)}(l)$ наборов из множества K .

Положим, что $d_{(A,M)}(0) = 1$. Тогда полученный вывод становится верным для случая $l = 0$.

Просуммируем необходимое число наборов в генерирующем множестве X для каждого множества, состоящего из наборов, где l фиксированных координат принадлежат множеству A , а все остальные координаты равны 0, за исключением, быть может, одной фиксированной координаты, равной 1. Итого мощность множества X не меньше чем $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (n-l+1) \cdot d_{(A,M)}(l)$. Здесь суммирование ведет по числу координат со значениями из множества A . Вычет C_n^l соответствует количеству способов выбрать эти координаты. Для каждого выбранного множества координат из множества A существует $(n-l)$ способ выбрать среди оставшихся координат единичную координату и один способ назначить все оставшиеся координаты нулевыми. Наконец, для каждого полученного разбиения координат на множества координат из A , нулевых координат и единичной координаты в генерирующем множестве должно быть не менее $d_{(A,M)}(l)$ наборов.

Покажем, что существует генерирующее множество размера $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (n-l+1) \cdot d_{(A,M)}(l)$. Из каждого множества, состоящего из наборов, где l фиксированных координат принадлежат множеству A , а все остальные координаты равны 0, за исключением, быть может, одной фиксированной координаты, равной 1, возьмем $d_{(A,M)}(l)$ таких наборов, что если отбросить из них координаты не из A , то оставшиеся наборы будут генерирующим множеством для A^l по операциям из M . Покажем, что полученное множество X будет генерирующим множеством.

По построению множества X из множества X заведомо можно получить все наборы, где l фиксированных координат принадлежат множеству A , а все остальные координаты равны 0, за исключением, быть может, одной фиксированной координаты, равной 1. Покажем, как из этих наборов теперь получить все наборы множества B^n .

Сначала получим все наборы, чьи координаты принадлежат множеству $A \cup \{0, 1\}$, при этом 1 встречается более одного раза. Обозначим это множество B_1 .

Рассмотрим произвольный набор $t \in B_1$ из описанного класса. Без утери общности будем считать, что только первые l координат этого набора принадлежат множеству A , и только последние p координат равны 1. Также без утери общности согласно замечаниям можно считать, что M — замкнутое множество, содержащее все селекторы. Значит, в частности M содержит селектор $g_1^p(x_1, \dots, x_p) = x_1$. Тогда, так как $t_i \in A$, $1 \leq i \leq l$, набор t можно получить с помощью операции $g_1^{p''}$ из следующих уже имеющихся наборов:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, из множества X можно получить все наборы без -1 . Наборы, содержащие -1 , можно получить аналогично получению наборов, содержащих b_c , в доказательстве леммы 2.

Получаем, что $\sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (n-l+1) \cdot d_{(A,M)}(l)$ наборов необходимо и достаточно. С помощью леммы 1 получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (n-l+1) \cdot d_{(A,M)}(l) = \\ & = \sum_{l=0}^n C_n^l \cdot (n-l) \cdot d_{(A,M)}(l) + \sum_{l=0}^n C_n^l \cdot d_{(A,M)}(l) = \\ & = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l \cdot 1^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l) + \\ & + \sum_{l=0}^n C_n^l \cdot 1^{n-l} \cdot d_{(A,M)}(l) \in n \cdot \Theta(\log n \cdot n^k \cdot (c+1)^n) = \\ & = \Theta(\log n \cdot n^{k+1} \cdot (c+1)^n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Теорема 1. Для любых $k, c \in \mathbb{N}$ существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$. Если дополнительно $c \geq k+1$, то существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Как показано в [2], для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k)$, $n \rightarrow \infty$. По лемме 2 для любого $c \in \mathbb{N}$ существует такая пара (B, M') , что $d_{(B,M')(n)} \in \Theta(d_{(A,M)}(n) \cdot c^n) = \Theta(n^k \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым доказана первая часть теоремы.

Допустим, что $c \geq k+1$. По лемме 2 существует такая пара (A, M) , что $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(\log n \cdot (c-k)^n)$, $n \rightarrow \infty$. Применяя k раз лемму 3, получаем такую пару (B, M') , что $d_{(B,M')(n)} \in \Theta(\log n \cdot n^k \cdot (c-k+k)^n) = \Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым доказана вторая часть теоремы. □

Список литературы

- [1] С. А. Комков, “Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста”, *Дискрет. матем.*, **30**:1 (2018), 19–38; *Discrete Math. Appl.*, **29**:3 (2019), 159–173.
- [2] С. А. Комков, “Новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, № 5, 60–62; *Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin*, **75**:5 (2020), 220–221.
- [3] С. А. Комков, “О классах функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста”, *Дискрет. матем.*, **31**:3 (2019), 47–57; *Discrete Math. Appl.*, **30**:4 (2020), 265–272.
- [4] Chen H., “Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property”, *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 2008, 197–208.
- [5] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, I: Pointed cube terms”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **101**:1 (2016), 56–94.
- [6] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, II: Wiegold dichotomy”, *International Journal of Algebra and Computation*, **25**:4 (2015), 555–566.
- [7] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, III: finite solvable algebras”, *Algebra universalis*, **76**:2 (2016), 199–222.
- [8] Quick M., Ruškuc N., “Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **89**:1 (2010), 105–126.
- [9] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **17**:2 (1974), 133–141.
- [10] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups II”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **20**:2 (1975), 225–229.
- [11] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups III”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **25**:2 (1978), 142–14.
- [12] Wiegold J., Lausch H., “Growth sequences of finite semigroups”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **43**:1 (1987), 16–20.
- [13] Wikipedia, *Chernoff bound* https://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff_bound.
- [14] Zhuk D., “The size of generating sets of powers”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **167** (2019), 91–103.

Undescribed exponential growth rates

Komkov S.A.

There is a function $d_{(A,M)}(n)$ called growth rate that is defined for an arbitrary finite set A with a set of operations M defined on it. It characterizes the strength of given operations. It has been proved that growth rate is either $O(n^k)$ for some $k \in \mathbb{N}$, either $2^{\Theta(n)}$. We research classes of exponential growth rates that appear after splitting the class with asymptotic bound in the exponent to classes with outward asymptotic bounds. We show that there exists a pair (A, M) with the

growth rate $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(n^k \cdot c^n)$ for arbitrary predefined natural numbers k and c . In addition, if $c \geq k + 1$ then there exists a pair (A, M) with the growth rate $d_{(A,M)}(n) \in \Theta(\log n \cdot n^k \cdot c^n)$.

Keywords: growth rate, generating sets, finite sets, EGP.

References

- [1] Chen H., “Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property”, *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 2008, 197–208.
- [2] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, I: Pointed cube terms”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **101**:1 (2016), 56–94.
- [3] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, II: Wiegold dichotomy”, *International Journal of Algebra and Computation*, **25**:4 (2015), 555–566.
- [4] Kearnes K. A., Kiss E. W., Szendrei Á., “Growth rates of algebras, III: finite solvable algebras”, *Algebra universalis*, **76**:2 (2016), 199–222.
- [5] Komkov S. A., “A new formulation of a criterion for the minimal logarithmic growth rate”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **75**:5 (2020), 219–220.
- [6] Komkov S. A., “Cardinality of generating sets for operations from the Post lattice classes”, *Discrete Mathematics and Applications*, **29**:3 (2019), 159–173.
- [7] Komkov S. A., “On classes of functions of many-valued logic with minimal logarithmic growth rate”, *Discrete Mathematics and Applications*, **30**:4 (2020), 265–272.
- [8] Quick M., Ruškuc N., “Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **89**:1 (2010), 105–126.
- [9] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **17**:2 (1974), 133–141.
- [10] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups II”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **20**:2 (1975), 225–229.
- [11] Wiegold J., “Growth sequences of finite groups III”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **25**:2 (1978), 142–144.
- [12] Wiegold J., Lausch H., “Growth sequences of finite semigroups”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **43**:1 (1987), 16–20.
- [13] Wikipedia, *Chernoff bound* https://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff_bound.
- [14] Zhuk D., “The size of generating sets of powers”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **167** (2019), 91–103.

О поведении функции Шеннона сложности реализации систем мономов схемами композиции

С. А. Корнеев¹

В работе исследуется сложность реализации (минимально возможное число операций) систем мономов схемами, использующими двухходовую операцию композиции, которую можно рассматривать как обобщение операции умножения. Установлено, что асимптотика роста функции Шеннона, характеризующей максимальную сложность среди систем из p мономов от q переменных с показателями степеней не более K , при условии $pq \log K \rightarrow \infty$ и некоторых дополнительных ограничениях имеет вид $\min(p, q) \log_2 K + \frac{pq}{\log_2(pq)}$.

Ключевые слова: система мономов, сложность вычисления, схемная сложность, схема композиции, функция Шеннона.

Изучается сложность вычисления (величина, равная минимальному числу операций) систем мономов схемами композиции. Схемы композиции представляют собой вычислительную модель с возможностью многократного использования результатов промежуточных вычислений, в которой единственной операцией является операция композиции двух мономов. Эта операция была предложена А. И. Ширшовым [1] как обобщение операции умножения. Схемы, использующие эту операцию, — схемы композиции — исследовались, например, в работах [2, 3, 4, 5].

Для мономов $U_1 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$ и $U_2 = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ будем говорить, что *моном U_1 содержится в мономе U_2* (или что *моном U_2 содержит моном U_1*) и использовать обозначение $U_1 \leq U_2$, если выполнены условия $a_k \leq b_k$, $k = 1, \dots, q$. Если же хотя бы одно из этих условий не выполнено, то будем говорить, что *моном U_1 не содержится в мономе U_2* (*моном U_2 не содержит моном U_1*) и использовать обозначение $U_1 \not\leq U_2$. Моном с нулевым набором степеней будем называть *нулевым мономом*.

Пусть для мономов $U = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}$, $V = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}$ и $R = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ выполнены условия $R \leq U$ и $R \leq V$. Тогда моном

$$(U, V)_R = \frac{UV}{R} = x_1^{a_{11}+a_{21}-b_1} x_2^{a_{12}+a_{22}-b_2} \dots x_q^{a_{1q}+a_{2q}-b_q}$$

¹ Корнеев Сергей Александрович — аспирант каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: korneev.sa.42@gmail.com.

Korneev Sergey Aleksandrovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Discrete Mathematics.

называется *композицией мономов U и V относительно монома R* . Отметим, что операция умножения мономов является частным случаем операции композиции, в этом случае R — нулевой моном.

Для удобства изложения определим схему композиции как схему из двухвходовых функциональных элементов (см., например, [6, 7, 8]), реализующих композицию мономов. Отметим, что схему композиции также можно определять как последовательность слов [2] или мономов [3, 4, 5], удовлетворяющую определённым условиям.

Схемой композиции над системой мономов $M = \{U_1, \dots, U_r\}$ будем называть схему из двухвходовых функциональных элементов, удовлетворяющую следующим условиям:

- а) на входы схемы подаются мономы U_1, \dots, U_r ;
- б) каждый элемент вычисляет композицию двух подаваемых на его входы мономов относительно некоторого монома R (вообще говоря, своего для каждого элемента);
- в) если на входы элемента E подаются мономы U и V , то соответствующий элементу E моном R удовлетворяет условиям $R \leq U$ и $R \leq V$.

Будем говорить, что *схема композиции S реализует систему мономов V_1, \dots, V_p* , если эти мономы вычисляются на её выходах.

Если элемент E схемы S вычисляет моном U как композицию мономов U_1 и U_2 относительно монома R , то равенство $U = (U_1, U_2)_R$ будем называть *правилом вычисления монома U элементом E схемы S* .

Если S — схема композиции, то под *сложностью $l_{sh}(S)$ схемы композиции S* будем понимать число элементов в ней.

Пусть M и M_0 — системы мономов. Следуя [3], положим $l_{sh}(M) = \min l_{sh}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему M над множеством переменных $\{x_1, \dots, x_q\}$. Величину $l_{sh}(M)$ будем называть *сложностью реализации системы мономов M схемами композиции*. Аналогично, величину $l_{sh}(M/M_0)$, определяемую равенством $l_{sh}(M/M_0) = \min l_{sh}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему мономов M над системой мономов M_0 , будем называть *сложностью реализации системы мономов M над системой мономов M_0 схемами композиции*. Если для схемы S , реализующей систему мономов M над системой мономов M_0 , выполнено условие $l_{sh}(S) = l_{sh}(M/M_0)$, то такую схему будем называть *минимальной схемой композиции* (реализующей систему мономов M над системой мономов M_0). Очевидно, что минимальная схема композиции не может содержать двух одинаковых элементов.

Заметим, что матрица из целых неотрицательных чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

однозначно задаёт систему мономов

$$M_A = \{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\}.$$

Сложностью $l_{sh}(A)$ реализации матрицы A будем называть сложность реализации соответствующей этой матрице системы мономов M_A . В дальнейшем во всех терминах и обозначениях сложности будем допускать замену системы мономов на соответствующую матрицу (и наоборот).

Интерес к задаче о сложности вычисления системы мономов схемами композиции обусловлен несколькими факторами.

Во-первых, задача об исследовании разных свойств, в том числе и связанных с вопросами сложности, известной в алгебре (см., например, [1]) операции композиции, возникает естественным образом.

Во-вторых, операция композиции двух мономов является обобщением обычной операции умножения двух мономов (в том смысле, что операция умножения является частным случаем операции композиции — композицией относительно нулевого монома). Задачи о сложности вычисления схемами композиции одного монома от одной переменной, одного монома от нескольких переменных или системы из нескольких мономов от одной переменной имеют простое решение с точным ответом¹⁾ (см., например, [2]):

$$l_{sh}(x^a) = \lceil \log a \rceil,$$

$$l_{sh}(x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}) = \left\lceil \log \max_{k:1 \leq k \leq q} a_k \right\rceil + q - 1,$$

$$l_{sh}(x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_p^{a_p}) = \lceil \log a_1 \rceil + \sum_{k=2}^p \left\lceil \log \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right) \right\rceil, \quad 0 < a_1 < \dots < a_p,$$

причем в этих случаях точное значение сложности реализации схемами композиции асимптотически совпадает с величиной сложности реализации классическими схемами умножения (про эту вычислительную модель см., например, [9, 10]). Таким образом, этот подход позволяет выделить содержательную часть доказательства верхних и нижних оценок, отделив ее от технически сложной и трудоемкой, но не содержательной части.

¹⁾ Здесь и далее под записью $\log x$ понимается $\log_2 x$.

Еще одна важная составляющая интереса к исследованию сложности реализации систем мономов схемами композиции сформировалась уже в процессе изучения возможностей и свойств этой вычислительной модели. Выяснилось, что в этой модели имеют место интересные эффекты, отсутствующие, или, по крайней мере, неизвестные в близких вычислительных моделях — схемах умножения, схемах умножения и деления, а также схемах умножения с дополнительными входами, на которые подаются величины, обратные к исходным входным переменным (подробнее про эти модели см., например, [10]).

В частности, оказалось, что в отличие от классических схем из элементов умножения, а также схем из элементов умножения и деления, для схем композиции не работают соображения двойственности — известны примеры систем из n мономов от n переменных, задаваемых матрицами показателей степеней, которые получаются друг из друга путем транспонирования и при этом имеют принципиальное различие в сложности реализации схемами композиции [3].

В работе [11] было выявлено еще одно существенное отличие модели схем композиции от классических моделей. Для схем умножения и схем умножения-деления при реализации системы из двух мономов и при реализации системы мономов от двух переменных сложность по существу определяется некоторой квадратной подматрицей порядка 2 матрицы показателей степеней переменных в мономах (более того, для вычислительной модели, допускающей операции умножения и деления, при реализации системы из p мономов от q переменных схемами из элементов умножения и деления сложность по существу определяется некоторой квадратной подматрицей порядка $\min(p, q)$ матрицы показателей степеней в мономах). Аналогичный факт справедлив и при реализации системы из двух мономов схемами композиции [4]. Однако в случае вычисления системы из p мономов ситуация принципиально иная.

Следующий пример демонстрирует, что при фиксированном p даже удаление одного произвольного монома может изменить асимптотику роста сложности реализации матрицы размера $p \times 2$ схемами композиции, и следовательно, эта асимптотика не только не определяется подматрицей размера 2×2 , но даже, вообще говоря, не определяется никакой подматрицей размера $(p - 1) \times 2$.

Пусть p — чётное число (это непринципально, пример легко обобщается на случай нечётного p). Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2^{2n} & 1 \\ 2^{2n} & 2^{3n} \\ 2^{4n} & 2^{3n} \\ 2^{4n} & 2^{5n} \\ \dots & \dots \\ 2^{pn} & 2^{(p-1)n} \\ 2^{pn} & 2^{(p+1)n} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $A^{(k)}$ матрицу, полученную из матрицы A удалением k -й строки. Тогда

$$l_{sh}(A) = (2p + 1)n + 1, \quad l_{sh}(A^{(k)}) = (2p - 1)n + 1.$$

Рассмотрим последовательности матриц A_n и $A_n^{(k_n)}$, которые получаются из матриц A и $A^{(k)}$, соответственно, при $n = 1, 2, 3, \dots$ и произвольных $k_n \in \{1, 2, \dots, p\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{sh}(A_n)}{l_{sh}(A_n^{(k_n)})} = 1 + \frac{1}{p - \frac{1}{2}},$$

т. е. асимптотика роста последовательности матриц $A_n^{(k_n)}$ отличается от асимптотики роста последовательности матриц A_n .

Приведенные отличия свойств функционала сложности вычисления систем мономов схемами композиции и функционалов сложности в классических вычислительных моделях не оставляют места для удивления по поводу того факта, что, несмотря на то, что при вычислении одного монома от нескольких переменных и при вычислении нескольких степеней одной переменной задача нахождения сложности в классе схем композиции принципиально проще аналогичной задачи в классе схем умножения, уже при вычислении системы из двух мономов от нескольких переменных и при вычислении системы из нескольких мономов от двух переменных эти задачи уже сопоставимы (при нахождении асимптотики роста сложности) [4, 9, 12], а в случае реализации системы из трех мономов от трех переменных асимптотика роста сложности в классе схем умножения известна [13, 14], а в классе схем композиции — нет.

Таким образом, в случае реализации систем мономов схемами композиции исследование вопросов сложности дало удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда либо число переменных, либо число мономов не превосходит двух. Попытки установить асимптотику роста сложности в более общих случаях сталкиваются с принципиальными

трудностями, часть из которых описана выше. Обычно в таких случаях задачу исследования сложности реализации произвольной функции (в данном случае — системы мономов) заменяют существенно более простой задачей исследования асимптотического поведения функционала Шеннона, характеризующего максимальное значение сложности функций из некоторого класса.

Пусть $l(A)$, $l_2(A)$, $l_F(A)$ — сложность реализации (минимально возможное число операций в соответствующей модели) системы мономов, задаваемой матрицей A , схемами умножения, схемами умножения-деления и схемами умножения с дополнительными входами, на которые подаются величины, обратные к исходным входным переменным, соответственно. Определим функции Шеннона для этих моделей, а также для модели схем композиции.

$$L(p, q, K) = \max_{\substack{A: A=(a_{ij})_{p \times q} \\ 0 \leq a_{ij} \leq K}} l(A), \quad L_2(p, q, K) = \max_{\substack{A: A=(a_{ij})_{p \times q} \\ -K \leq a_{ij} \leq K}} l_2(A).$$

$$L_F(p, q, K) = \max_{\substack{A: A=(a_{ij})_{p \times q} \\ -K \leq a_{ij} \leq K}} l_F(A), \quad L_{sh}(p, q, K) = \max_{\substack{A: A=(a_{ij})_{p \times q} \\ 0 \leq a_{ij} \leq K}} l_{sh}(A).$$

В 1980 году Н. Пиппенджер, опираясь на свой результат об обобщённых вентилях схемах [15], основанный, в свою очередь, на результатах О. Б. Лупанова [16] и Э. И. Нечипорука [17], установил асимптотику роста функции Шеннона для классической модели.

Утверждение 1 [9]. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда

$$L(p, q, K) = \min(p, q) \log K + \frac{pq \log(K+1)}{\log(pq \log K)} (1 + o(1)) + O(p+q).$$

В работе [18] на основе результатов [10] при слабых ограничениях установлена асимптотика роста функции Шеннона $L_2(p, q, K)$.

Утверждение 2 [18]. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда

$$L_2(p, q, K) = \min(p, q) \log K + \frac{pq \log(2K+1)}{\log(pq \log K)} \left(1 + O\left(\frac{\log \log pq \log K}{\log pq \log K} \right)^{1/2} \right) + O(\max(p, q)).$$

Для схем умножения с дополнительными входами, на которые подаются величины, обратные к исходным входным переменным, в работе [19] установлена асимптотика роста функции Шеннона, но при несколько более сильных ограничениях. Эти ограничения связаны с некоторыми нетривиальными особенностями данной модели, в частности, с тем, что в ней не работают в достаточной мере соображения двойственности.

Утверждение 3 [19]. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда справедливы неравенства

$$L_F(p, q, K) \leq \min(p, q + 1) \log K + \frac{pq \log(2K + 1)}{\log(pq \log K)} \left(1 + O\left(\frac{\log \log pq \log K}{\log pq \log K}\right)^{1/2} \right) + O(\max(p, q)),$$

$$L_F(p, q, K) \geq \max\left(\min(p, q + 1) \log K, \frac{pq \log(2K + 1)}{\log(pq \log K)}\right) + O(\max(p, q)).$$

В данной работе при условии $pq \log K \rightarrow \infty$ и некоторых дополнительных ограничениях установлена асимптотика роста функции Шеннона сложности реализации систем мономов схемами композиции. Наличие этих ограничений во многом объясняется вышеописанными трудностями при исследовании сложности в вычислительной модели схем композиции.

Для доказательства основного результата (сформулированного ниже в виде теоремы) потребуется несколько лемм. Утверждение леммы 1 очевидно, доказательство леммы 2 можно найти в работе [4], утверждение леммы 3 легко следует из утверждения 1.

Лемма 1. Если существуют схемы, реализующие систему мономов M_1 над системой мономов M_0 и систему мономов M над системой мономов M_1 , то

$$l_{sh}(M/M_0) \leq l_{sh}(M/M_1) + l_{sh}(M_1/M_0).$$

Лемма 2 [4]. Пусть мономы $U = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$ и $V = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ удовлетворяют условиям $a_k \geq b_k > 0$, $k = 1, \dots, q$. Тогда

$$l_{sh}(U/V) = \left\lceil \log \max_{k:1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{b_k} \right\rceil.$$

Лемма 3. Пусть $pq \rightarrow \infty$. Тогда

$$L_{sh}(p, q, 1) \leq \frac{pq}{\log(pq)}(1 + o(1)) + O(p + q).$$

Обозначим через $M_d(p, q)$ класс булевых матриц $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с единицами на главной диагонали, т. е. удовлетворяющих условиям

$$a_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, \min(p, q).$$

Положим

$$L_{sh}^{(d)}(p, q) = \max_{A \in M_d(p, q)} l_{sh}(A).$$

Лемма 4. Пусть $pq \rightarrow \infty$. Тогда²⁾

$$L_{sh}^{(d)}(p, q) \gtrsim \frac{pq}{\log(pq)}.$$

Доказательство. Рассмотрим схемы из функциональных элементов в неполном базисе $\{\vee\}$, которые реализуют систему дизъюнкций, задаваемую булевой матрицей. Обозначим через $l_{\vee}(A)$ сложность вычисления в этой модели системы дизъюнкций, задаваемой матрицей A . Легко видеть, что тогда $l_{sh}(A) = l_{\vee}(A)$.

Количество матриц в классе $M_d(p, q)$ равно $2^{pq - \min(p, q)}$. Отсюда, учитывая условие $pq \rightarrow \infty$, получаем мощностную оценку (см., например, [20], теорема Д.1)

$$\max_{A \in M_d(p, q)} l_{\vee}(A) \gtrsim \frac{pq - \min(p, q)}{\log(pq - \min(p, q))} \gtrsim \frac{pq}{\log(pq)},$$

из которой следует

$$L_{sh}^{(d)}(p, q) = \max_{A \in M_d(p, q)} l_{sh}(A) = \max_{A \in M_d(p, q)} l_{\vee}(A) \gtrsim \frac{pq}{\log(pq)},$$

что и требовалось. □

Лемма 5. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда

$$L_{sh}(p, q, K) \gtrsim \min(p, q) \log K + \frac{pq}{\log(pq)}.$$

Доказательство. Пусть A' — булева матрица с единицами на главной диагонали, для которой выполнено условие $l_{sh}(A') = L_{sh}^{(d)}(p, q)$, A — матрица, полученная из матрицы A' заменой всех диагональных элементов на K , S — минимальная схема, реализующая матрицу A .

Будем последовательно преобразовывать схему S , заменяя её элементы на элементы, реализующие операции композиции с двух специальных типов. Операции композиции обоих типов обладают следующим свойством: моном R , относительно которого выполняется операция композиции, однозначно определяется исходными мономами.

1. Операция φ типа G по двум мономам U_1 и U_2 , содержащим переменные не более чем в первой степени, вычисляет моном U , содержащий все переменные мономов U_1 и U_2 в первой степени:

²⁾ Здесь и далее запись $a_n \gtrsim b_n$ обозначает, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \leq 1$.

$$\begin{aligned}
U_1 &= x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}, U_2 = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}, \\
R &= R(U_1, U_2) = x_1^{\min(a_1, b_1)} x_2^{\min(a_2, b_2)} \dots x_q^{\min(a_q, b_q)} \\
\varphi(U_1, U_2) &= (U_1, U_2)_R = x_1^{\max(a_1, b_1)} x_2^{\max(a_2, b_2)} \dots x_q^{\max(a_q, b_q)}, \\
a_k &\in \{0, 1\}, \quad b_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, q.
\end{aligned}$$

2. Операция ψ_i типа G_i , $i = 1, \dots, q$ по двум мономам U_1 и U_2 , содержащим переменную x_i в степенях a_i и b_i , соответственно, а все остальные переменные — не более чем в первой степени, вычисляет моном, содержащий переменную x_i в степени $a_i + b_i$, а все остальные переменные мономов U_1 и U_2 — в первой степени:

$$\begin{aligned}
U_1 &= x_1^{a_1} \dots x_i^{a_i} \dots x_q^{a_q}, U_2 = x_1^{b_1} \dots x_i^{b_i} \dots x_q^{b_q}, \\
R_i &= R_i(U_1, U_2) = \\
&= x_1^{\min(a_1, b_1)} \dots x_{i-1}^{\min(a_{i-1}, b_{i-1})} x_{i+1}^{\min(a_{i+1}, b_{i+1})} \dots x_q^{\min(a_q, b_q)}, \\
\psi_i(U_1, U_2) &= (U_1, U_2)_{R_i} = x_1^{\max(a_1, b_1)} \dots x_i^{a_i + b_i} \dots x_q^{\max(a_q, b_q)}, \\
a_k &\in \{0, 1\}, \quad b_k \in \{0, 1\}, \quad a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
k &= 1, \dots, i-1, i+1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, q.
\end{aligned}$$

Пронумеруем все элементы схемы S так, чтобы на вход каждого элемента подавался моном, приписанный входу схемы, или моном, вычисляемый на выходе элемента с меньшим номером (см., например, [21], примечание 1). Заменяем элементы схемы S в порядке возрастания их номеров по следующим правилам:

1. Если на выходе элемента вычисляется моном, содержащий переменные не более чем в первой степени, то заменим его на элемент, реализующий операцию типа G .
2. Если на выходе элемента вычисляется моном, содержащий переменную x_i хотя бы во второй степени, то заменим его на элемент, реализующий операцию типа G_i .

При таком преобразовании каждый элемент схемы S будет заменён на элемент, реализующий операцию одного из типов $G, G_1, \dots, G_{\min(p, q)}$ (это следует из вида матрицы A и минимальности схемы S). В результате получим некоторую схему композиции S_0 , которая реализует некоторую матрицу A_0 . Нетрудно заметить, что матрица A_0 может отличаться от матрицы A только в диагональных элементах (они могут увеличиться).

Для каждого i , $i = 1, \dots, \min(p, q)$, построим мультимножество $T_i(S_0)$ из мономов, содержащих переменную x_i в первой степени и подаваемых на входы элементов схемы S_0 , реализующих операцию типа G_i . Если

для некоторого i в мультимножестве $T_i(S_0)$ есть моном, каждая переменная которого содержится в одном из других мономов мультимножества $T_i(S_0)$ (в том числе, если в это мультимножество входит ещё один такой же моном), то выберем в схеме S_0 любой элемент, реализующий операцию типа G_i , на вход которого подаётся этот моном. Удалим этот элемент, а на его выход подадим моном, который подавался на другой вход. В результате получим некоторую схему S_1 , реализующую матрицу A_1 , которая может отличаться от матрицы A только в диагональных элементах.

Так как при удалении элемента схема меняется, то для каждого следующего шага мультимножества строятся заново. Пусть уже построена схема S_k , $k = 1, 2, \dots$, реализующая матрицу A_k .

Для каждого i , $i = 1, \dots, \min(p, q)$, построим мультимножество $T_i(S_k)$ из мономов, содержащих переменную x_i в первой степени и подаваемых на входы элементов схемы S_k , реализующих операцию типа G_i . Если для некоторого i в мультимножестве $T_i(S_k)$ есть моном, каждая переменная которого содержится в одном из других мономов мультимножества $T_i(S_k)$, то выберем в схеме S_k любой элемент, реализующий операцию типа G_i , на вход которого подаётся этот моном. Удалим этот элемент, а на его выход подадим моном, который подавался на другой вход. В результате получим некоторую схему S_{k+1} , реализующую матрицу A_{k+1} , которая может отличаться от матрицы A только в диагональных элементах.

Будем продолжать этот процесс, пока на некотором шаге m не будет выполнено следующее условие: для любого i , $i = 1, \dots, \min(p, q)$, каждый моном из мультимножества $T_i(S_m)$ содержит переменную, которая не содержится ни в одном другом мономе из мультимножества $T_i(S_m)$.

Пронумеруем все элементы схемы S_m так, чтобы на вход каждого элемента подавался моном, приписанный входу схемы, или моном, вычисляемый на выходе элемента с меньшим номером. Удалим из схемы S_m элемент с наименьшим номером, реализующий операцию типа G_i , для мономов U_1 и U_2 , подаваемых на входы которого, выполнено условие $U_1 \leq U_2$ (или $U_2 \leq U_1$). На выход этого элемента подадим моном U_2 (соответственно, U_1). Будем продолжать этот процесс, пока такие элементы не закончатся. В результате получим некоторую схему S_{m+1} , реализующую матрицу A_{m+1} , которая может отличаться от матрицы A только в диагональных элементах.

Для схемы S_{m+1} аналогично построим семейство мультимножеств $T_i(S_{m+1})$, $i = 1, \dots, \min(p, q)$. Для них также будет выполнено условие: для любого i , $i = 1, \dots, \min(p, q)$ каждый моном из мультимножества $T_i(S_{m+1})$ содержит переменную, которая не содержится ни в одном другом мономе из мультимножества $T_i(S_{m+1})$. Пусть диагональные

элементы матрицы A_{m+1} равны $k_1, k_2, \dots, k_{\min(p,q)}$. Тогда для всех $i, i = 1, \dots, \min(p, q)$, каждый моном, содержащий переменную x_i в первой степени и подаваемый на вход элемента схемы S_{m+1} , реализующего операцию типа G_i , содержит переменную, которая не содержится ни в одном другом таком мономе, и поэтому $|T_i(S_{m+1})| < q$. Заметим также, что в схеме S_{m+1} каждый моном, содержащий переменную x_i , используется для порождения монома, соответствующего i -й строке матрицы A_{m+1} , не более одного раза, и поэтому $k_i \leq |T_i(S_{m+1})|$.

Отсюда получаем неравенства

$$k_i < q, \quad i = 1, \dots, \min(p, q). \quad (1)$$

Удаление одного элемента схемы может уменьшить степень только одной переменной только одного из мономов, реализуемых на выходах схемы, причём не более чем в два раза, и поэтому

$$l_{sh}(S_{m+1}) \leq l_{sh}(S) - \sum_{i=1}^{\min(p,q)} \left[\log \left(\frac{K}{k_i} \right) \right]. \quad (2)$$

Пронумеруем все элементы схемы S_{m+1} так, чтобы на вход каждого элемента подавался моном, приписанный входу схемы, или моном, вычисляемый на выходе элемента с меньшим номером. Не меняя структуры схемы S_{m+1} , заменим её элементы, реализующие операции типа G_i , $i = 1, \dots, \min(p, q)$, в порядке возрастания их номеров на элементы, реализующие операции типа G . В результате получим схему S' , которая реализует матрицу A' .

Покажем, что

$$\min(p, q) \log q = o \left(\min(p, q) \log K + \frac{pq}{\log(pq)} \right). \quad (3)$$

Если величины p и q ограничены, то $K \rightarrow \infty$, откуда

$$\min(p, q) \log q = o(\min(p, q) \log K).$$

Пусть теперь хотя бы одна из величин p, q неограниченна. Рассмотрим два случая:

1. Если $p \leq q$, то величина q неограниченна, и поэтому

$$\min(p, q) \log q = p \log q = o \left(\frac{pq}{\log q} \right) = o \left(\frac{pq}{\log(pq)} \right).$$

2. Если $q \leq p$, то величина p неограниченна, и поэтому

$$\min(p, q) \log q = q \log q = o \left(\frac{pq}{\log(pq)} \right).$$

Наконец, используя (1), (2), (3) и лемму 4, получаем

$$\begin{aligned}
L_{sh}(p, q, K) &\geq l_{sh}(A) = l_{sh}(S) = l_{sh}(S_{m+1}) + \sum_{i=1}^{\min(p, q)} \left[\log \left(\frac{K}{k_i} \right) \right] = \\
&= l_{sh}(S') + \sum_{i=1}^{\min(p, q)} \log \left(\frac{K}{k_i} \right) \geq l_{sh}(A') + \sum_{i=1}^{\min(p, q)} \log \left(\frac{K}{q} \right) = \\
&= L_{sh}^{(d)}(p, q) + \min(p, q) \log K - \min(p, q) \log q \gtrsim \\
&\gtrsim \min(p, q) \log K + \frac{pq}{\log(pq)},
\end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Лемма 6. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда

$$L_{sh}(p, q, K) \leq p \log K + \frac{pq}{\log(pq)}(1 + o(1)) + O(p + q).$$

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $p \times q$ из целых неотрицательных чисел, элементы которой не превосходят K , и пусть A_1 — матрица, полученная из матрицы A заменой всех положительных элементов на 1. Используя леммы 1, 2 и 3, получаем

$$\begin{aligned}
l_{sh}(A) &\leq l_{sh}(A_1) + \sum_{i=1}^p \left[\log \max_{j: 1 \leq j \leq q} a_{ij} \right] \leq \\
&\leq p \log K + \frac{pq}{\log(pq)}(1 + o(1)) + O(p + q),
\end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Лемма 7. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$. Тогда

$$L_{sh}(p, q, K) \leq q \log K + (p + 1)q.$$

Доказательство. Рассмотрим систему мономов

$$M_0 = \{x_i^{2^k} : i = 1, 2, \dots, q; k = 0, 1, \dots, \lceil \log K \rceil\}.$$

Используя леммы 1 и 2, получаем

$$l_{sh}(A) \leq l_{sh}(M_0) + l_{sh}(A/M_0) \leq q \lceil \log K \rceil + pq \leq q \log K + (p + 1)q,$$

что и требовалось. \square

Теорема. Пусть $pq \log K \rightarrow \infty$ и дополнительно выполнено хотя бы одно из условий:

- а) $p \leq q$;
- б) $p = o(\log K)$;
- в) $\log K = o(q/\log p)$.

Тогда

$$L_{sh}(p, q, K) = \left(\min(p, q) \log K + \frac{pq}{\log(pq)} \right) (1 + o(1)) + O(p + q).$$

Доказательство. Нижняя оценка сразу следует из леммы 5. Докажем верхнюю оценку.

Если $p \leq q$, то верхняя оценка непосредственно вытекает из леммы 6. Пусть теперь $p > q$ и $p = o(\log K)$. Тогда из леммы 7 получаем

$$\begin{aligned} L_{sh}(p, q, K) &\leq q \log K + (p + 1)q = \\ &= q \log K(1 + o(1)) = \min(p, q) \log K(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Наконец, пусть $p > q$ и $\log K = o(q/\log p)$. Тогда из леммы 6 получаем

$$\begin{aligned} L_{sh}(p, q, K) &\leq p \log K + \frac{pq}{\log(pq)}(1 + o(1)) + O(p + q) = \\ &= \frac{pq}{\log(pq)}(1 + o(1)) + O(p + q). \end{aligned}$$

Во всех случаях установлена требуемая верхняя оценка. □

Список литературы

- [1] Ширшов А.И., “Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли”, *Сибирский математический журнал*, **3** (1962), 292–296.
- [2] Мерекин Ю.В., “О порождении слов с использованием операции композиции”, *Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1.*, **10:4** (2003), 70–78.
- [3] Трусевич Е.Н., “О сложности вычисления некоторых систем одночленов схемами композиции”, *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика.*, 2014, № 5, 18–22.
- [4] Корнеев С.А., “О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции”, *Дискретная математика*, **32:2** (2020), 15–31.
- [5] Корнеев С.А., “Об асимптотическом поведении функций шенноновского типа, характеризующих сложность вычисления систем мономов”, *Учёные записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*, **162:3** (2020), 300–311.
- [6] Лупанов О.Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Издательство Московского университета, Москва, 1984, 138 с.

- [7] Сэвидж Д.Е., *Сложность вычислений*, Издательство «Факториал», Москва, 1998, 368 с.
- [8] Храпченко В.М., “Нижние оценки сложности схем из функциональных элементов”, *Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 21*, Мир, Москва, 1984, 3–54.
- [9] Pippenger N., “On the evaluation of powers and monomials”, *SIAM J. Comput.*, **9:2** (1980), 230–250.
- [10] Кочергин В.В., “О задачах Беллмана и Кнута и их обобщениях”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **20:6** (2015), 159–189.
- [11] Корнеев С.А., “О сложности реализации системы мономов от двух переменных схемами композиции”, *Прикладная дискретная математика*, 2021, № 53, 103–119.
- [12] Кочергин В.В., “О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных”, *Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*, МАКС Пресс, Москва, 2006, 185–190.
- [13] Кочергин В.В., “О сложности вычисления системы из трёх одночленов от трёх переменных”, *Математические вопросы кибернетики*, вып. 15, Физматлит, Москва, 2006, 79–155.
- [14] Кочергин В.В., “Простое доказательство верхней оценки сложности вычисления трёх одночленов трёх переменных”, *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика.*, Издательство Московского университета, Москва, 2019, 3–8.
- [15] Pippenger N., “The minimum number of edges in graphs with prescribed paths”, *Math. Systems Theory*, **12:4** (1979), 325–346.
- [16] Лупанов О.Б., “О вентильных и контактно-вентильных схемах”, *Доклады АН СССР*, **111:6** (1956), 1171–1174.
- [17] Нечипорук Э.И., “О топологических принципах самокорректирования”, *Проблемы кибернетики*, вып. 21, Наука, Москва, 1969, 5–102.
- [18] Кочергин В.В., “Об аддитивных вычислениях систем целочисленных линейных форм”, *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 1993, № 6, 97–101.
- [19] Кочергин В.В., “О максимальной сложности вычисления систем элементов свободной абелевой группы”, *Вестник московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2007, № 3, 14–19.
- [20] Лупанов О.Б., “Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования”, *Проблемы кибернетики*, вып. 10, Наука, Москва, 1965, 31–110.
- [21] Лупанов О.Б., “О синтезе некоторых классов управляющих систем”, *Проблемы кибернетики*, вып. 14, Физматгиз, Москва, 1963, 64–97.

On the behavior of the Shannon function of the implementation complexity of monomials system
Korneev Sergei Aleksandrovich

In this paper, we examined the computational complexity (minimum possible number of operations) of systems of monomials by circuits using two-input composition operation, which can be considered as a generalization of multiplication operation. We found

that growth asymptotic of the Shannon function, characterizing the maximum complexity among systems of p monomials of q variables with exponents no more than K , given that $pq \log K \rightarrow \infty$ and some additional restrictions, has the form $\min(p, q) \log_2 K + \frac{pq}{\log_2(pq)}$.

Keywords: set of monomials, computation complexity, circuit complexity, composition circuit, Shannon function.

References

- [1] Shirshov A. I., “Nekotoryye algoritmicheskiye problemy dlya algebr Li [Some algorithmic problems for Lie algebras]”, *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, **3** (1962), 292–296 (in Russian).
- [2] Merekin Yu. V., “O porozhdenii slov s ispol’zovaniyem operatsii kompozitsii [On the generation of words using the composition operation]”, *Diskretnyy analiz i issledovaniye operatsiy. Ser. 1*, **10**:4 (2003), 70–78 (in Russian).
- [3] Trusevich E. N., “Complexity of certain systems of monomials in calculation by composition circuits”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **69**:5 (2014), 193–197.
- [4] Korneev S. A., “On the complexity of implementation of a system of two monomials by composition circuits”, *Discrete Mathematics and Applications*, **31**:2 (2021), 113–125.
- [5] Korneev S. A., “Ob asimptoticheskom povedenii funktsiy shennonovskogo tipa, kharakterizuyushchikh slozhnost’ vychisleniya sistem monomov [On the asymptotic behavior of Shannon-type functions characterizing the computing complexity of systems of monomials]”, *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki*, **162**:3 (2020), 300–311 (in Russian).
- [6] Lupanov O. B., *Asimptoticheskie ocenki slozhnosti upravlyajushhih sistem [Asymptotic estimates for complexity of control systems]*, 1984 (in Russian), 138 pp.
- [7] Savage J. E., *The Complexity of Computing*, Krieger Pub Co, 1987, 391 pp.
- [8] Hrapchenko V. M., “Nizhnie ocenki slozhnosti shem iz funkcional’nyh jelementov [Lower estimates for complexity of circuits of functional elements]”, *Kiberneticheskij sbornik. Novaja serija. Vyp. 21*, 1984, 3–54 (in Russian).
- [9] Pippenger N., “On the evaluation of powers and monomials”, *SIAM J. Comput.*, **9**:2 (1980), 230–250.
- [10] Kochergin V. V., “On Bellman’s and Knuth’s problems and their generalizations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:1 (2018), 103–124.
- [11] Korneev S. A., “O slozhnosti realizacii sistemy monomov ot dvuh peremennykh shemami kompozicii [On the complexity of implementation of two-variable system of monomials by composition circuits]”, *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2021, № 53, 103–119 (in Russian).
- [12] Kochergin V. V., “O slozhnosti vychisleniya sistem odnochenov ot dvukh peremennykh [On the complexity of computing systems of monomials in two variables]”, *Trudy VII Mezhdunarodnoy konferentsii ”Diskretnyye modeli v teorii upravlyayushchikh sistem”*, 2006, 185–190 (in Russian).

- [13] Kochergin V. V., “O slozhnosti vychislenija sistemy iz trjoh odnochnenov ot trjoh peremennyh [On the computational complexity of three-variable system of three monomials]”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki, vyp.* 15, 2006, 79–155 (in Russian).
- [14] Kochergin V. V., “Prostoe dokazatel'stvo verhnej ocenki slozhnosti vychislenija trjoh odnochnenov trjoh peremennyh [Easy proof for upper estimate of computational complexity of three-variable system of three monomials]”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika*, 2019, 3–8 (in Russian).
- [15] Pippenger N., “The minimum number of edges in graphs with prescribed paths”, *Math. Systems Theory*, **12**:4 (1979), 325–346.
- [16] Lupanov O. B., “O ventil'nyh i kontaktno-ventil'nyh shemah [On gating and contact gating circuits]”, *Doklady AN SSSR*, **111**:6 (1956), 1171–1174 (in Russian).
- [17] Nechiporuk Je. I., “O topologicheskikh principah samokorrektirovanija [On topological principles of self-correction]”, *Problemy kibernetiki, vyp.* 21, 1969, 5–102 (in Russian).
- [18] Kochergin V. V., “On additive computations of systems of integral linear forms”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **48**:6 (1993), 62–64.
- [19] Kochergin V. V., “On the maximal complexity of calculations of systems of elements of a free Abelian group”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **62**:3 (2007), 95–100.
- [20] Lupanov O. B., “Ob odnom podhode k sintezu upravljajushchih sistem — principe lokal'nogo kodirovanija [On one method for synthesis of control systems — local encoding principle]”, *Problemy kibernetiki, vyp.* 10, 1965, 31–110 (in Russian).
- [21] Lupanov O. B., “O sinteze nekotoryh klassov upravljajushchih sistem [On synthesis of some types of control systems]”, *Problemy kibernetiki, vyp.* 14, 1963, 64–97 (in Russian).

О соответствии сложности СФЭ и числа шагов машины Тьюринга

М. В. Носов¹

В работе схематично доказывается интуитивно понятный факт о соответствии полиномиальной сложности СФЭ в базисе из штриха Шеффера полиномиальному числу шагов машины Тьюринга. Приведены числовые оценки.

Ключевые слова: сложность схемы, штрих Шеффера, машина Тьюринга.

Пусть дана СФЭ в базисе из штриха Шеффера, вычисляющая функцию алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$. Построим машину Тьюринга, которая для любого булевского набора $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ начальную конфигурацию $q_1\gamma_1 \dots \gamma_n$ переводит в конфигурацию, в которой в заключительном состоянии q_0 , считывающая головка остановилась на ячейке с содержимым $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Пусть схема состоит из k элементов. Расположим все входы и все элементы схемы последовательно. На первых n местах расположены входы x_1, \dots, x_n , на $n + 1$ месте находится первый элемент схемы, на $n + 2$ - второй элемент схемы и т.д. Пусть i -ый элемент схемы имеет своими входами выходы элементов или входы схемы, стоящие на местах i_1 и $i_2, i_1 < i_2$.

Внешний алфавит A будем наращивать по мере построения машины, в начале $A \ni 0, 1, \lambda$, где λ -пустой символ. Множество состояний Q также будем наращивать. На первом этапе начальную конфигурацию $K_1 = q_1\gamma_1 \dots \gamma_n$ переводит в конфигурацию $K_2 = q_1\gamma_1\lambda\gamma_2\lambda \dots \lambda\gamma_n$. Эта несложная программа потребует константное число состояний C_1 , число шагов не превышает C_2n^2 , где C_2 - константа. Далее переведем конфигурацию K_2 в конфигурацию $K_3 = a_0\gamma_1a_1\gamma_1\gamma_2 \dots a_{n-1}\gamma_n a_n q_r$, где a_0, a_1, \dots, a_n -новые буквы алфавита, число состояний не превысит C_3n , мощность алфавита не превысит $n + C_4$, общее число шагов - не более C_5n^2 , где C_3, C_4, C_5 -константы.

В ячейку, которую сейчас обозревает головка необходимо поставить согласно схеме $(\delta_{i_1} | \delta_{i_2})$, где δ_{i_1} - содержимое левой ячейки от ячейки с символом a_{i_1} , δ_{i_2} -содержимое левой ячейки от ячейки с символом

¹Носов Михаил Васильевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@mail.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

a_{i_2} . Слева от ячейки, которую сейчас обозревает головка находится символ a_{i-1} . Множество состояний, которое сейчас появится будет разделено на группы. Используя первую группу состояний доходим до ячейки с символом a_{i_2} (достаточно 2 состояния для этого процесса) и не более i шагов. Если $\delta_{i_2} = 1$, то перейдем во вторую группу состояний, если $\delta_{i_2} = 0$, то перейдем в третью группу состояний, вернувшись в обоих случаях в ячейку с a_{i_2} . Далее в рамках каждой группы доходим до ячейки с символом a_{i_1} , в соседней левой ячейке находится δ_{i_1} . Если $\delta_{i_1} = 1$ и находимся во второй группе состояний, то переходим в четвертую группу состояний, во всех остальных случаях переходим в пятую группу. Обрато возвращаемся вправо к ячейке с содержимым a_{i-1} . в правую от неё ячейку ставим 1, если находимся в пятой группе состояний и ставим 0, если находимся в четвертой группе, затем в соседнюю правую ячейку ставим a_i и попадаем в очередной цикл. Мощность каждой группы не превышает константу, число шагов не превышает $C_6 i$, C_6 - константа. Число больших циклов k .

В итоге, число шагов машины Тьюринга не более $C_7(kn)^2 + C_8$ шагов, число состояний не более $C_9(k + n) + C_{10}$, мощность алфавита не более $C_{11}(k + n) + C_{12}$, $C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ - константы.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

On the correspondence between the complexity of the SFE and the number of steps of the Turing machine

Nosov M.V.

The work schematically proves an intuitive fact on the correspondence of the polynomial complexity of the SFE in the basis of the Schaeffer prime polynomial number of steps of the Turing machine. Numerical estimates are given.

Keywords: circuit complexity, Schaeffer's stroke, Turing machine.

О конечной порожденности A -предполных классов в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел

Д. В. Ронжин¹

Исследуются вопросы конечной порожденности найденных ранее A -предполных классов линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел. Показано, что два из них не являются A -конечнопорожденными, в то время как остальные являются.

Ключевые слова: конечные автоматы, линейные автоматы, двоично-рациональные числа, A -полнота, предполный класс, конечнопорожденность.

1. Введение

Для систем конечных автоматов [1] одним из подходов к решению вопроса о K -полноте является рассмотрение вопроса об A -полноте [2] этих систем. Также для решения поставленного вопроса нередко рассматриваются задачи полноты систем, содержащих добавки [3]. К тому же, в случае когда вопросы K -полноты не являются разрешимыми для первоначального класса автоматов, могут быть рассмотрены собственные подклассы, для которых задача является разрешимой. Ярким примером является класс линейных автоматов [4, 5], для которого описаны условия полноты конечных систем в терминах предполных классов, несмотря на алгоритмическую неразрешимость задачи K -полноты для произвольных конечных автоматов [1].

Интересным объектом исследования выступает класс линейных автоматов, алфавиты которых являются бесконечными множествами. В работе [6] исследуются вопросы наличия полных систем по операциям композиции и суперпозиции на множестве линейных автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел. В работе [7] исследуется сужение указанного класса до автоматов, функционирующих над подкольцом рациональных чисел - множестве двоично-рациональных чисел. В частно-

¹Ронжин Дмитрий Владимирович — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, преподаватель математики в ОАНО "Новая школа e-mail: d.v.ronzhin@gmail.com.

Ronzhin Dmitry Vladimirovich — graduated from Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, math teacher at non-profit organization "New School".

сти, в работах [7], [8] формулируется ряд A -предполных классов, в терминах которых описываются условия A -полноты систем с добавками.

Настоящая работа посвящена исследованию структуры полученных ранее A -предполных классов, а именно выяснению их конечнопорожденности по операциям A -замыкания.

2. Вспомогательные обозначения

Кольцо двоично-рациональных чисел, которое является подкольцом в поле рациональных чисел обозначим через $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Далее в настоящей работе элементы $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ рассматриваем в сокращенном виде. $\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, c = \frac{m}{2^n}, \forall k \in \mathbb{Z}$ будем говорить что c кратно k тогда и только тогда, когда m кратно k .

$\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы[1] с входным алфавитом $\mathbb{Q}_{\frac{l}{2^n}}$, выходным алфавитом $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ и алфавитом состояний $\mathbb{Q}_{\frac{k}{2^n}}$, функции переходов и выходов являются линейными[4, 5]. Множество всех таких автоматов обозначим $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ [7] и будем называть множеством линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел.

Заметим, что множество $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ имеет конечный базис по операциям композиции[1], а именно:

$$\mathbf{B} = \{V_+(x, y), V_{(-\frac{1}{2})}(x), \xi_1(x)\}, \text{ где}$$

- 1) $V_+(x, y) = x + y$ - сумматор,
- 2) $V_{(c)}(x) = c \cdot x$ - умножитель на число $c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$,
- 3) $\xi_a(x) = \xi \cdot x + a$ - задержка с начальным состоянием a .

Аналогично[8] определим множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}^\infty(\xi) = \left\{ \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \mid a_i \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} \right\}$$

Обозначим множество дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ следующим образом[8]:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) = \left\{ \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi], Q(0) = 1, \gcd(P(\xi), Q(\xi)) = 1 \right\}$$

Верны следующие утверждения [8]:

Лемма 1. $\forall V(x_1, \dots, x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), \exists R_0, R_1, \dots, R_l \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$ такие что:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i.$$

Лемма 2. $\forall V(x_1, \dots, x_l): (\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}^\infty)^l \rightarrow \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}^\infty,$ такого что:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i, \\ R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), i \in [0, l]$$

верно, что $V(x_1, \dots, x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}).$

Множители R_k будем называть коэффициентами отображения. Через $R_k[t]$ будем обозначать t -й член последовательности R_k . Переменная x_i называется непосредственной, если соответствующий $R_i[0] \neq 0$. Автомат называется существенным если у него не менее двух непосредственных переменных.

A - замыкание [2] системы M будем обозначать через $A(M)$, замыкание системы M по операциям композиции через $K(M)$, замыкание по операциям суперпозиции через $\Sigma(M)$. Множество линейных автоматов M , $M \subset M' \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ будет называться A -полным в M' , если $\forall V \in M'$ и $\forall \tau \in \mathbb{N}$, в $K(M)$ существует автомат V' , совпадающий с автоматом V на словах длины τ .

Ранее был сформулирован ряд K -замкнутых классов, а так же доказана их A -предполнота в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ [7], [8]. Ниже представлено неформальное описание данных классов:

- 1) Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ и множества

$$\mathbf{P} = \{p_i | p_i \neq 2 - \text{простое число}, i \in [1, k]\},$$

определяется замкнутый класс автоматов $V_{\mathbf{P}}$. В данный класс входят все не существенные автоматы, а также автоматы, у которых все коэффициенты при переменных в первый такт либо кратны некоторому фиксированному $p \in \mathbf{P}$, либо все кроме одного коэффициента при переменных в первый такт кратны произведению всех элементов \mathbf{P} .

- 2) Определяется класс D , в который входят все не существенные автоматы, а также автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт не взаимно просты (с точки зрения числителей в неприводимых дробях).

- 3) $\forall p > 2$, где p – простое число, определяется класс M_p , в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных во второй такт кратны p .
- 4) $\forall p > 2$, где p – простое число, определяется класс T_p , в который входят все автоматы, у которых свободный коэффициент в первый такт кратен p .
- 5) Определяется класс T_{int} , в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт являются целочисленными.
- 6) Определяется класс $T_{\geq 0}$, в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт являются неотрицательными.

Далее в настоящей работе без ограничения общности не будем различать автоматы из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и отображения, которые они реализуют.

3. Основной результат

Теорема 1. *Для A -предполных классов $T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0}, D, V_P, \forall p, \forall P$, где p – простые, отличные от двойки и P – непустые конечные подмножества простых чисел, отличных от двойки верны следующие утверждения:*

- 1) Классы $T_p, M_p, T_{\geq 0}$ и V_P , являются конечнопорожденными по операциям A -замыкания.
- 2) Классы T_{int} и D не являются конечнопорожденными по операциям A -замыкания.

Доказательство. Рассмотрим все указанные A -предполные классы, и для каждого из них либо представим конечную A -полную систему, либо докажем отсутствие такой системы.

- 1) Рассмотрим классы T_p . Зафиксируем $p > 2$ простое, и рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_p = \{V_+(x, y), V_{\cdot \frac{1}{2}}(x), V_{\cdot (-1)}(x), \xi \cdot x, \xi, p\}.$$

Заметим, что $B_p \subset T_p$. Покажем, что $A(B_p) = T_p$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$:

$$V_{\cdot n}(x) = \underbrace{V_+(x, V_+(x, V(\dots, V_+(x, x)\dots)))}_{(n-1) \text{ раз } V_+} = n \cdot x, \quad (1)$$

$$V_{\frac{1}{2^n}}(x) = \underbrace{V_{\frac{1}{2}}(V_{\frac{1}{2}}(V_{\frac{1}{2}}(\dots, V_{\frac{1}{2}}(x)\dots))}_{n \text{ раз } V_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^n} \cdot x, \quad (2)$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k} > 0, V_{\cdot c}(x) = V_{\frac{1}{2^k}}(V_{\cdot m}(x)) = c \cdot x, \quad (3)$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k} < 0, V_{\cdot c}(x) = V_{\cdot(-1)}(V_{\cdot|c|}(x)), \quad (4)$$

$$0 = V_+(x, V_{\cdot(-1)}(x)), \quad (5)$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k}, c \cdot p = V_{\cdot c}(p). \quad (6)$$

Заметим, что $\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^m x_i \in \Sigma(\{V_+(x, y), 0\})$.

В силу приведенных равенств и упомянутого замечания, очевидно что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, n], \forall a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \\ \{\sum_{i=1}^n (a_i \cdot x_i) + b \cdot p, b \cdot p\} \subset \Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), p\}).$$

Заметим, что

$$\{a \cdot \xi, b \cdot \xi \cdot x \mid \forall a, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset \Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), \xi, \xi \cdot x\})$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, \dots, x_l) \in T_p$:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i, \\ \forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор арности не более $(l+1) \cdot \tau$ естественным образом сможем получить до такта τ автомат $V(x_1, x_2, \dots, x_l)$, поскольку операциями суперпозиции можем получить из B_p автоматы:

$$R_0[j] \cdot \xi^j, R_i[j] \cdot \xi^j \cdot x, \forall i \in [1, l], j \in [0, \tau].$$

- 2) $M_p, \forall p$ - простых, отличных от двойки. Зафиксируем $p > 2$ простое, и рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B'_p = \{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), p \cdot \xi \cdot x, \xi^2 \cdot x, \xi^3 \cdot x, \xi, 1\}.$$

Заметим, что $B'_p \subset M_p$. Покажем, что $A(B'_p) = M_p$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$ могут быть применены равенства 1, 2, 3, 4, 5. Произвольные ненулевые константы могут быть получены следующим образом:

$$\forall c = \frac{m}{2^n}, c = V.c(1).$$

Заметим что $\Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{(-1)}(x), 1\})$ содержит автоматы, реализующие произвольные линейные функции с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$. Из этого следует, что:

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, a_i : p :$$

$$\sum_{j=1}^l a_j \cdot \xi \cdot x_j + b \cdot \xi \in \Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{(-1)}(x), p \cdot \xi \cdot x, \xi, 1\}). \quad (7)$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \forall \tau \in \mathbb{N}, \tau \geq 2 :$$

$$\sum_{j=1}^l a_j \cdot \xi^\tau \cdot x_j + b \cdot \xi^\tau \in \Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), V_{(-1)}(x), \xi^2 \cdot x, \xi^3 \cdot x, 1\}). \quad (8)$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, \dots, x_l) \in M_p$:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i, \\ \forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор аности не более τ и автоматы вида 7, 8 естественным образом сможем получить в $A(B'_p)$ до такта τ автомат $V(x_1, x_2, \dots, x_l)$.

3) Для $T_{\geq 0}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_{\geq 0} = \{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), -\xi \cdot x, \xi \cdot x, 1, -1\}$$

Заметим, что $B_{\geq 0} \subset T_{\geq 0}$. Покажем, что $A(B_{\geq 0}) = T_{\geq 0}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$ могут быть применены равенства 1, 2, 3. Произвольные константы могут быть получены следующим образом:

$$0 = V_+(1, -1),$$

$$\forall c = \frac{m}{2^n} > 0, c = V.c(1),$$

$$\forall c = \frac{m}{2^n} < 0, c = V_{|c|}(-1).$$

Таким образом $\Sigma(\{V_+(x, y), V_{\frac{1}{2}}(x), 1, -1\})$ содержит автоматы, реализующие произвольные линейные функции с неотрицательными коэффициентами при переменных. Из этого следует, что:

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \forall \tau \in \mathbb{N} :$$

$$\sum_{j=1}^l a_j \cdot \xi^\tau \cdot x_j + b \cdot \xi^\tau \in \Sigma(B_{\geq 0}). \quad (9)$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, \dots, x_l) \in T_{\geq 0}$:

$$V(x_1, \dots, x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^l R_i \cdot x_i, \\ \forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор арности не более τ и автоматы вида 9 в $A(B_{\geq 0})$ получим до такта τ автомат $V(x_1, x_2, \dots, x_l)$.

- 4) Рассмотрим случай $|\mathbf{P}| = 1$. Для произвольного простого $p > 2$ зафиксируем множество $\mathbf{P} = \{p\}$. Для класса $V_{\mathbf{P}}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_{\mathbf{P}} = \\ \{V_{\frac{1}{2}}(x), -x, x-1, x+1, x+\xi \cdot y, x+p \cdot y, V_{.2}(x), V_{.3}(x), \dots, V_{.(p-1)}(x), 0\}.$$

Заметим, что $B_{\mathbf{P}} \subset V_{\mathbf{P}}$. Покажем, что $A(B_{\mathbf{P}}) = V_{\mathbf{P}}$.

Заметим, что $\forall n, l, r \in \mathbb{N}$:

$$V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,r}) = \\ x + \sum_{i=1}^l \xi \cdot x_{i,1} + \sum_{i=1}^l \xi^2 \cdot x_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^l \xi^r \cdot x_{i,r} \in \Sigma(\{x + \xi \cdot y, 0\}).$$

Поскольку класс $V_{\mathbf{P}}$ при $\mathbf{P} = \{p\}$ представляет множество автоматов, у которых все кроме, возможно, одного коэффициенты при переменных кратны p в первый такт, достаточно показать что

$$L_1 = \{c_1 \cdot x + c_2 | \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset A(B_{\mathbf{P}}).$$

В таком случае произвольный линейный автомат из $V_{\mathbf{P}}$ будет моделироваться до любого такта r при помощи функции $V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,r})$ и множества автоматов L_1 при помощи операций суперпозиции.

Элементы множества L_1 могут быть получены в силу следующих очевидных утверждений:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x + n \in \Sigma(\{x + 1, x - 1\}), \quad (10)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \cdot x \in \Sigma(\{x + p \cdot y, 2 \cdot x, 3 \cdot x, \dots, (p - 1) \cdot x, -x, 0\}), \quad (11)$$

$$\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, x + c \in \Sigma(\{x + n, \frac{1}{2} \cdot x, 2 \cdot x | \forall n \in \mathbb{Z}\}), \quad (12)$$

$$\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, x \cdot c \in \Sigma(\{x \cdot n, \frac{1}{2} \cdot x | \forall n \in \mathbb{Z}\}). \quad (13)$$

Таким образом верно, что $L_1 \subset A(B_{\mathbf{P}})$, следовательно $V_{\mathbf{P}}$ при $\mathbf{P} = \{p\}$, где $p > 2$ - простое, является конечнопорожденной.

- 5) Рассмотрим случай $|\mathbf{P}| > 1$. Для произвольного $r \in \mathbb{N}, r > 1$ зафиксируем множество нечетных простых чисел $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Для класса $V_{\mathbf{P}}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B'_{\mathbf{P}} = \{V_{\frac{1}{2}}(x), V_{(-1)}(x), V_2(x), V_3(x), \dots, V_{(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{r-1})}(x), x - 1, x + 1, x + \xi \cdot y, x + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot y, p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_3), 0 | \forall i \in [1, r]\}$$

Покажем, что $A(B_{\mathbf{P}}) = V_{\mathbf{P}}$.

Заметим, что $\forall n, l, r \in \mathbb{N}$:

$$V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,r}) = x + \sum_{i=1}^l \xi \cdot x_{i,1} + \sum_{i=1}^l \xi^2 \cdot x_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^l \xi^r \cdot x_{i,r} \in \Sigma(\{x + \xi \cdot y, 0\}).$$

В силу определения класса $V_{\mathbf{P}}$ для доказательства утверждения необходимо показать, что

$$L_0 = \{x + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot (\sum_{j=1}^q x_j), p_i \cdot (\sum_{j=1}^q x_j) | \forall i \in [1, r], \forall q \in \mathbb{N}\} \subset A(B'_{\mathbf{P}}),$$

$$L_1 = \{c_1 \cdot x + c_2 | \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset A(B'_{\mathbf{P}}).$$

В таком случае произвольный линейный автомат из $V_{\mathbf{P}}$ будет получаться до любого такта r при помощи функции $V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,r})$ и множеств автоматов L_0 и L_1 при помощи операций суперпозиции. Элементы множества L_1 могут быть получены в силу 10, 12 и 13, а также того, что:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x \cdot n \in \Sigma(\{x + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot y, 2 \cdot x, 3 \cdot x, \dots, (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r - 1) \cdot x, -x, 0\}).$$

Покажем как могут быть получены элементы L_0 . Очевидно, что:

$$x + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot (\sum_{j=1}^q x_j) \in \Sigma(x + p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot y), \forall q \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что:

$$\{p_i \cdot (\sum_{j=1}^q x_j) | \forall i \in [1, r], \forall q \in \mathbb{N}\} \subset A(L_1 \cup \{0, p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_3) | \forall i \in [1, r]\}).$$

Доказательство будем проводить индукцией по числу входов q . Для базы индукции $q \in [1, 3]$ утверждение очевидно верно.

Пусть утверждение верно для некоторого $q \geq 3$, покажем что оно будет верно для $q+1$. В самом деле, в силу расширенного алгоритма Евклида для фиксированной пары различных простых чисел p_i, p_j :

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \cdot p_i + b \cdot p_j = 1.$$

В таком случае $\forall i \in [1, r]$, зафиксировав $j \neq i, j \in [1, r]$ и используя автоматы из L_1 искомым автомат получается в силу следующего равенства:

$$p_i \cdot (\sum_{j=1}^{q+1} x_j) = p_i \cdot (a \cdot p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_{q+1}) + b \cdot p_j \cdot (x_1 + x_2 + x_{q+1}) + x_3 + \dots + x_q).$$

Таким образом $L_0, L_1 \subset A(B'_{\mathbf{P}})$, следовательно $V_{\mathbf{P}}$ при $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, где $r > 1, p_r > 2$ - простые, является A -конечнопорожденной.

- 6) Доказательство того, что T_{int} не является A -конечнопорожденным предполным классом будем проводить от противного. Предположим наличие конечного множества $M = \{V_1, V_2, \dots, V_k\} \subset T_{int}$, такого что $A(M) = T_{int}$.

Через $U'(M)$ обозначим множество константных слагаемых автоматов во множестве M , т.е.:

$$U'(M) = \{R_0^{(i)} | V_i = \sum_{j=1}^{l_i} (R_j^{(i)} \cdot x_j) + R_0^{(i)}, V_i \in M\}.$$

В силу конечности множества M обозначим через n следующую величину:

$$n = \max\{n_i | \frac{m_i}{2^{n_i}} = R_i[0], R_i \in U'(M)\}.$$

Заметим, что автомат, реализующий константу $\frac{1}{2^{n+1}} \in T_{int}$ не принадлежит $A(M)$, поскольку в первый момент времени операциями суперпозиции над автоматами из T_{int} знаменатель константных слагаемых не может быть увеличен. Таким образом получаем противоречие.

- 7) Доказательство того, что D не является A -конечнопорожденным предполным классом будем проводить от противного. Предположим наличие конечного множества $M = \{V_1, V_2, \dots, V_k\} \subset D$, такого что $A(M) = D$.

Рассмотрим множество P' состоящее из простых чисел:

$$P' = \{p | R[0] : p, R \in U(M), p > 2 - \text{простое}\}.$$

Из определения множества D следует, что все непосредственные входы автоматов из D кратны некоторому простому числу в первый такт, либо непосредственный вход единственен.

Зафиксируем простое число $p > 2$, такое что $p \notin P'$. Рассмотрим автомат $p \cdot (x + y)$. Утверждается что $p \cdot (x + y) \notin A(M)$. В самом деле, поскольку автомат $p \cdot (x + y)$ имеет два непосредственных входа, операциями суперпозиции он может быть получен из множества M только с использованием как минимум одного автомата с числом непосредственных входов больше единицы, однако все такие автоматы из M в первый такт кратны некоторым простым числам. В силу того, что рассматриваемые автоматы функционируют над двоично-рациональными числами, операциями суперпозиции в первый такт невозможно избавиться от кратности некоторому $p' > 2$, $p' \in P'$.

□

Автор выражает признательность своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту кафедры МаТИС Часовских Анатолию Александровичу за помощь в постановке и решении задачи. Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 075-15-2020-801).

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.

- [2] Буевич В.А., “О полноте, A-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1-4 (2006), 613–638
- [3] Бабин Д.Н., Летуновский А.А., “О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:3 (2015), 15–22
- [4] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 134–151
- [5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104
- [6] Ронжин Д.В., “Линейные автоматы над полем рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 144–155
- [7] Ронжин Д.В., “Об условиях A-полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами”, *Дискретная математика*, **32**:2 (2020), 45–62
- [8] Ронжин Д.В., “Распознавание A-полноты конечных систем линейных автоматов с добавками над кольцом двоично-рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:1 (2021), 149–163

About finitely generated A maximum-subclasses in the class of linear automata over dyadic rationals

Ronzhin D.V.

This work concerns property of being finitely generated by operations of A-closing of found earlier maximum subclasses in the class of linear automata over the ring of dyadic rationals. We present the proof of the fact that two of them are not finitely generated, while others are finitely generated.

Keywords: finite state automata, linear automata, dyadic rationals, A-completeness, maximum subclasses, finitely generated.

References

- [1] Kudryavcev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian), 320 c.
- [2] Buyevich V.A., “About completeness, A-completeness and t-completeness in the class of automata mappings.”, *Intellectual systems.*, **10**:1-4 (2006), 613–638 (In Russian)
- [3] Babin D.N., Letunovskiy A.A., “About superposition potential, with having boolean functions and delay element as an addition to basis.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **19**:3 (2015), 15–22 (In Russian)
- [4] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics*, **27**:2 (2015), 134–151 (In Russian)
- [5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions.”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104
- [6] Ronzhin D.V., “Linear automata over the field of rational numbers.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **21**:4 (2017), 144–155 (In Russian)

- [7] Ronzhin D.V., “About A-completeness conditions for the automata over dyadic rationals.”, *Discrete Mathematics*, **32**:2 (2020), 45–62 (In Russian)
- [8] Ronzhin D.V., “A-completeness recognition for finite systems with additives of linear automata over the ring of dyadic rationals.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **25**:1 (2021), 149–163 (In Russian)

**К сведению авторов публикаций в журнале
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете \LaTeX , предоставляются к загрузке через WEB-форму http://intsysjournal.org/generator_form.
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего выпущенного номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, выпущенные ранее, размещаются на сайте <http://intsysjournal.org>, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

Подписано в печать: 20.09.2021

Дата выхода: 25.09.2021

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).