Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества

А. М. Тропин[1]

Задача Ферма—Штейнера заключается в поиске такой точки метрического пространства Y (которую будем называть астровершиной Штейнера), что сумма расстояний от нее до точек некоторого конечного фиксированного подмножества $A \subset Y$, называемого границей, минимальна. Минимальную сумму расстояний мы будем называть длиной минимальной астросети. Мы рассматриваем эту задачу в гиперпространстве $Y = H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного пространства X, в данном пространстве являющихся компактами.

В настоящей статье описывается широкий класс деформаций граничных компактов, не увеличивающих длину минимальной астросети. Также рассматривается усреднение в смысле суммы Минковского конечного числа границ, состоящих из равного числа элементов, и показывается, что при таком усреднении также не увеличивается длина минимальной астросети.

Ключевые слова: задача Ферма-Штейнера, минимальное дерево Штейнера, минимальная параметрическая сеть, минимальная астросеть, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, расстояние Хаусдорфа.

1. Введение

Напомним хорошо известную задачу нахождения минимального дерева Штейнера на евклидовой плоскости. Пусть даны n фиксированных точек на плоскости, называющихся *граничными*. Требуется построить связный граф с вершинами в граничных и, если необходимо, дополнительных точках плоскости такой, что сумма длин его ребер минимальна (длиной ребра называется расстояние между двумя инцидентными ребру вершинам в евклидовой метрике). Такой граф является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера*, дополнительные вершины — *вершинами Штейнера*.

---

[1] *Тропин Александр Михайлович* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amtropin@gmail.com.

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Исходная постановка задачи, которую принято сейчас называть *задачей Штейнера*, предполагала добавление одной дополнительной точки к граничным и рассматривалась самим Якобом Штейнером (задачу для трех граничных точек сформулировал Пьер Ферма). Формальная постановка задачи, разрешающая добавлять сколько угодно дополнительных точек, была опубликована только в 1934 году Войтехом Ярник и Милошом Кёсслером [1]. Если при этом фиксировать топологию сети, соединяющей граничные точки, т.е. заранее определить, как вершины сети соединяются между собой, и минимизировать сумму длин ребер такой сети, то получаются *минимальные параметрические сети.*

Под *задачей Ферма—Штейнера* мы понимаем обобщение Штейнера задачи Ферма, а именно, для фиксированного конечного подмножества $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ метрического пространства (Y, ρ) необходимо найти все точки $y \in Y$, минимизирующие значение функции $S_{\mathcal{A}}(y) = \Sigma_{i=1}^{n}\rho(y, a_i)$. Множество $\mathcal{A}$ фиксированных вершин сети назовем *границей*, а ее элементы — *граничными* вершинами. Минимальное значение функции $S_{\mathcal{A}}(y)$ назовем *длиной минимальной астросети.* Точки, являющиеся решением задачи Ферма—Штейнера, мы будем называть *астровершинами Штейнера*, а их множество обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Определим *вектор расстояний* $d(y, \mathcal{A}) = \Big(\rho(y, a_1), \dots, \rho(y, a_n)\Big)$ и положим $\Omega(\mathcal{A}) = \big\{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\big\}$. Для каждого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ положим $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \big\{y \in \Sigma(\mathcal{A}) : d(y, \mathcal{A}) = d\big\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на *классы одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega(\mathcal{A})$.

В данной статье мы рассматриваем в качестве объемлющего пространства гиперпространство $H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного метрического пространства X, наделенное метрикой Хаусдорфа d_H [2], см. также [3]. Геометрия пространства $H(X)$ используется в таких важных приложениях как распознавание образов, сравнение двумерных и трехмерных геометричских объектов, построение непрерывных деформаций одного объекта в другой.

Ограниченная компактность пространства X гарантирует существование решений задачи Ферма—Штейнера для границы в $H(X)$. Более того, в таких X любое непустое замкнутое и ограниченное множество является компактом, поэтому мы фактически будем говорить о задаче в пространстве компактов. Астровершину Штейнера для границы в $H(X)$ в случае ограниченно компактного X будем называть *астрокомпактом Штейнера.* Заметим, что астрокомпакты Штейнера могут быть определены неоднозначно, то есть что класс одинаковой взвешенности может состоять более чем из одного элемента.

В данной статье получены результаты, позволяющие деформировать граничные компакты в ограниченно компактном пространстве с неувеличением длины минимальной астросети, а в некоторых случаях и длины минимальной параметрической сети.

В конечномерном нормированном пространстве разработана теория, позволяющая для конечного числа границ с равным числом элементов построить семейство новых границ с неувеличением длины минимальной параметрической сети. Элементы новой границы лежат в симплексах, построенных с помощью суммы Минковского на вершинах соответствующих граничных компактов исходных границ, либо равняются объединению всех точек этих симплексов. В частности, получена верхняя оценка на длину минимальной параметрической сети с вершинами в выпуклых оболочках граничных компактов.

Для каждой пары компактов A, K в ограниченно компактном пространстве найдены их компактные подмножества $R_K(A)$ и $R_A(K)$, сохраняющие расстояния Хаусдорфа и названные редукцией. Для каждого компакта A построено некоторое подмножество $F_K(A)$ пространства относительно компакта K, названное K-облаком, любой компакт из которого, содержащий при этом $R_K(A)$, находится от K на расстоянии не меньшем, чем A. Сформулированы некоторые ограничения на компакты A и K, при которых расстояние от K до компактных подмножеств, зажатых между редукцией и K-облаком, в точности равно расстоянию $d_H(A, K)$.

Отметим, что полученные результаты оказываются полезными при изучении задачи Ферма—Штейнера для границы в ограниченно компактном пространстве. Предположим, что явным образом найден хотя бы один астрокомпакт Штейнера K для одной границы. Тогда можно заменить каждый из граничных компактов любым компактом, который удовлетворяет описанным выше условиям, и получить целый класс границ, длина минимальной астросети для каждой из которых не превосходит длины минимальной астросети для исходной границы.

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе приведены необходимые сведения из теории сетей (подраздел 2.1) и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу (подраздел 2.2).

2.1. Графы и сети. Проблема Штейнера. Теоремы существования

Мы будем рассматривать простые графы, подробные сведения по теории которых можно найти, например, в [4].

В дальнейшем мы будем рассматривать граничные задачи, вводя ограничения на те или иные совокупности вершин изучаемых графов. Если некоторое такое семейство вершин выбрано, то его будем называть *границей графа*, а сам граф — *графом с границей*. Мы всегда будем предполагать наличие границы (возможно, пустой). Как правило, границу графа G мы будем обозначать через ∂G. Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними*. *Бинарным деревом* мы будем называть дерево с границей, степени вершин которого равны 1 или 3, а множество граничных вершин состоит из всех вершин степени 1.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное множество, и G — связный граф. Будем говорить, что граф G (с границей ∂G) *соединяет* $\mathcal{A}$, если $\partial G = \mathcal{A}$. Определим *сеть* Γ *типа* $G = (V, E)$ в множестве X как отображение $\Gamma : V \to X$; граф G называется *параметризующим графом* сети или ее *топологией*. Ограничения отображения Γ на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу параметризующего графа называются соответственно *ребрами*, *вершинами* (*граничными, внутренними*), *границей* сети Γ. Ребро $\Gamma : \{v_i, v_j\} \to X$ сети Γ называется *вырожденным*, если $\Gamma(v_i) = \Gamma(v_j)$; в противном случае ребро называется *невырожденным*. Сеть, все ребра которой невырождены, также будем называть *невырожденной*. Границу сети Γ будем обозначать через $\partial\Gamma$. Если множество $\mathcal{A} \subset X$ является образом границы $\partial\Gamma$ сети Γ, то говорят, что сеть Γ *соединяет множество* $\mathcal{A}$ *по отображению* $\partial\Gamma$ и обозначают $\mathcal{A} \subset \Gamma$. Если (X, ρ) — метрическое пространство, и Γ — сеть типа $G = (V, E)$ в X, то длина ребра $\Gamma : \{v_i, v_j\} \to X$ сети Γ определяется как расстояние $\rho\big(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)\big)$, а длина сети Γ — как сумма длин всех ее ребер:

$$\rho(\Gamma) := \sum_{v_i v_j \in E} \rho\big(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)\big).$$

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — подмножество в множестве X, и граф G соединяет $\mathcal{A}$. **Условимся считать, что в этом случае все сети Γ типа $G = (V, E)$ в X удовлетворяют следующему условию: ограничение Γ на $\mathcal{A}$ — тождественное отображение**. Тем самым, каждая такая сеть Γ однозначно задается положением своих внутренних вершин. Поэтому если $v_1, \ldots, v_k$ — внутренние вершины параметризующего графа G, то сеть Γ типа G, соединяющая $\mathcal{A} \subset X$, однозначно определяется множеством $\big(\Gamma(v_1), \ldots, \Gamma(v_k)\big)$.

Пусть даны два графа G_1 и G_2, соединяющие $\mathcal{A} \subset X$, и сети Γ_i типа G_i, $i = 1, 2$. Назовем эти сети *равными*, если существует изоморфизм $\nu : V_1 \to V_2$ графов G_i, тождественный на $\mathcal{A}$ и такой, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. Отождествляя Γ_1 и Γ_2 с помощью этого изоморфизма ν, мы будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, скажем, G_1. Если Γ_i — сети одного и того же типа $G = (V, E)$, и для каждого ребра $e \in E$ его длина в каждой из сетей Γ_i одна и та же, то такие сети назовем *одинаково взвешенными*.

Для фиксированной границы $\mathcal{A}$ в метрическом пространстве (X, ρ) рассмотрим связный граф $G = (V, E)$, соединяющий $\mathcal{A}$. Обозначим через $[G, \mathcal{A}]$ множество всех сетей Γ типа G (в силу сделанного выше соглашения, все сети $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ удовлетворяют условию $\Gamma|_{\partial G} = \mathrm{id}$). Сеть из $[G, \mathcal{A}]$, имеющая наименьшую возможную длину среди всех таких сетей, называется *минимальной параметрической сетью типа G, соединяющей $\mathcal{A}$*. Минимальная параметрическая сеть существует не всегда. Тем не менее, точная нижняя грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям из $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ всегда существует, называется *длиной минимальной параметрической сети* и обозначается через $\mathrm{mpn}[G, \mathcal{A}]$.

Длиной минимального дерева Штейнера на $\mathcal{A}$ называется величина

$$\mathrm{smt}(\mathcal{A}) = \inf_{\Gamma : \mathcal{A} \subset \Gamma} \rho(\Gamma) = \inf_{G : \partial G = \mathcal{A}} \mathrm{mpn}[G, \mathcal{A}],$$

где первый имфимум берется по всевозможным сетям, соединяющим $\mathcal{A}$, а второй — по всем связным графам с границей $\mathcal{A}$. Эти инфимумы могут не достигаться. Если же первый из них достигается на некоторой сети, то, как несложно показать, см., например, [5], он достигается также и на невырожденной сети. Эта невырожденная сеть является деревом, имеющим не более $n - 2$ внутренних вершин, и называется *минимальным деревом Штейнера на $\mathcal{A}$*. Внутренние вершины минимального дерева Штейнера называются *точками Штейнерами*. Изучение минимальных деревьев Штейнера называется *проблемой Штейнера*.

Рассмотрим дерево G с n граничными вершинами степени 1 и единственной неграничной вершиной, которая смежна с каждой из граничных. Если такое дерево G соединяет границу $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то параметрические сети Γ из $[G, \mathcal{A}]$ назовем сетями типа *звезда*. Назовем неграничную вершину сети типа звезда, соединяющей $\mathcal{A}$, *астровершиной для границы $\mathcal{A}$*. Если некоторая сеть типа звезда имеет наименьшую длину среди сетей этого типа, то эту величину назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$, а астровершину — *астровершиной Штейнера*. Изучение минимальных астросетей называется *проблемой Ферма—Штейнера*. Множество всех астровершин Штейнера мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Длину параметрической сети типа звезда, соединяющей границу $\mathcal{A}$ с компактом K, будем обозначать через $S_{\mathcal{A}}(K)$.

Следующий результат доказывается точно так же, как теоремы существования минимальных сетей для полных римановых многообразий, см. [5].

Теорема 1. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества $\mathcal{A}$ в пространстве X существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в X.*

Лемма 1. *Если метрическое пространство X ограниченно компактно, то пространство $H(X)$ его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа также ограниченно компактно.*

В дальнейшем нам будет нужна следующая теорема существования минимальных сетей в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Необходимые определения приведены в разделе 2.2.

Следствие 1. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и $H(X)$ — пространство его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа. Тогда для любого конечного семейства компактов $\mathcal{A} \subset H(X)$ в пространстве $H(X)$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в $H(X)$.*

Следующий результат следует из следствия 1 и леммы 1.

Следствие 2. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и $\mathcal{A}$ — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто.*

2.2. Определение и некоторые свойства метрики Хаусдорфа

Напомним, что *замкнутой окрестностью радиуса r* множества $A \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $B_r^X(A) := \big\{x \in X : \rho(x, A) \le r\big\}$, где $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Отметим, что если A состоит из одной точки, то $B_r^X(A)$ — это замкнутый шар в X с центром в этой точке и радиуса r. Ниже, там где это не вызовет недоразумений, мы будем опускать в обозначениях явную ссылку на пространство, записывая просто $B_r(A)$ вместо $B_r^X(A)$.

Расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A и B метрического пространства (X, ρ) называется величина

$$d_H(A, B) := \inf\big\{r : B_r(A) \supset B, B_r(B) \supset A\big\}.$$

Эквивалентное определение:

$$d_H(A,B) = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho(a,b)\bigr\}.$$

Хорошо известно, что расстояние Хаусдорфа является метрикой на пространстве $H(X)$, см. [3].

Для любых точек a, b из X будем обозначать $\rho(a,b)$ просто через $|ab|$.

Следующие леммы, которые нам потребуются, доказаны в [6].

Лемма 2. *Пусть A и B — компакты в метрическом пространстве X. Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \le d_H(A,B)$.*

Лемма 3. *Пусть A — компакт в ограниченно компактном пространстве X. Тогда для любого $d > 0$ множество $B_d(A)$ также является компактом.*

3. Верхняя оценка длины минимальной астросети для границ из симплекса Минковского

Напомним, что *суммой Минковского* множеств A и B в линейном пространстве X называется множество $A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Определим симплекс $\Delta^p = \bigl\{(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1\bigr\}$. Для упорядоченного набора компактов $\hat{\mathcal{A}} = (A^1,\dots,A^p)$ и вектора $\lambda \in \Delta^p$ определим множества $\lambda\hat{\mathcal{A}} := \bigoplus_{i=1}^p \lambda_i A^i$ и $\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}}) := \bigcup_{\lambda\in\Delta^p}\lambda\hat{\mathcal{A}}$.

Лемма 4. *Пусть $\hat{\mathcal{A}} = (A^1,\dots,A^p)$ — вектор компактов в линейном нормированном пространстве X конечной размерности. Тогда множества $\lambda\hat{\mathcal{A}}$ и $\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}})$ являются компактами.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^p \times \underbrace{X \times \dots \times X}_{p \text{ множителей}} \to X,$$

определенное как $\varphi\Bigl((\lambda_1,\dots,\lambda_p), a^1,\dots,a^p\Bigr) = \sum_{i=1}^p \lambda_i a^i$. Это отображение линейное, поэтому является непрерывным. Поскольку множества $\{\lambda\}\times A^1\times\dots\times A^p$ и $\Delta^p\times A^1\times\dots\times A^p$ являются компактами, то их образы при непрерывном отображении φ, равные $\lambda\hat{\mathcal{A}}$ и $\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}})$ соответственно, также являются компактами. Лемма доказана.

$\square$

Теорема 2. *Пусть* $\hat{\mathcal{A}} = (A^1, \ldots, A^p)$ *и* $\hat{\mathcal{B}} = (B^1, \ldots, B^p)$ *— векторы компактов линейном нормированном пространстве* X *конечной размерности такие, что* $d_H(A^i, B^i) = d_i$, $i = 1, \ldots, p$. *Тогда для любого вектора* $\lambda \in \Delta^p$ *справедливы неравенства* $d_H(\lambda\hat{\mathcal{A}}, \lambda\hat{\mathcal{B}}) \le \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i \le \max\{d_i : i = 1, \ldots, p\}$ *и* $d_H\Big(\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{A}}\big), \operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{B}}\big)\Big) \le \max\{d_i : i = 1, \ldots, p\}$.

Доказательство. По лемме 2, для любой точки $a^i \in A^i$ существует точка $b^i \in B^i$ такая, что $||a^i - b^i|| \le d_i$. Обозначим $\max\{d_i : i = 1, \ldots, p\}$ через d, а $\sum_{i=1}^p \lambda_i d_i$ — через d_λ. Поскольку

$$\left|\left|\Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i\Big)\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^p \lambda_i (a^i - b^i)\right|\right| \le \sum_{i=1}^p \lambda_i ||a^i - b^i|| \le \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i \le d,$$

то для каждой точки $\Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i\Big) \in \lambda\hat{\mathcal{A}}$ нашлась точка $\Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i\Big) \in \lambda\hat{\mathcal{B}}$ на расстоянии не более d_λ, то есть $\lambda\hat{\mathcal{A}} \subset B_{d_\lambda}\big(\lambda\hat{\mathcal{B}}\big)$. Получив аналогично включение $\lambda\hat{\mathcal{B}} \subset B_{d_\lambda}\big(\lambda\hat{\mathcal{A}}\big)$, получаем, что $d_H\big(\lambda\hat{\mathcal{A}}, \lambda\hat{\mathcal{B}}\big) \le d_\lambda$.

Если точка $\Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i\Big)$ принадлежит $\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{A}}\big)$, то она принадлежит некоторому $\lambda\hat{\mathcal{A}}$, и, по доказанному выше, существует точка $\Big(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i\Big)$ из $\lambda\hat{\mathcal{B}}$ на расстоянии не более d, но эта точка лежит также и в $\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{B}}\big)$. Значит, $\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{A}}\big) \subset B_d\Big(\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{B}}\big)\Big)$ и, аналогично, $\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{B}}\big) \subset B_d\Big(\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{A}}\big)\Big)$, откуда $d_H\Big(\operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{A}}\big), \operatorname{span}\big(\hat{\mathcal{B}}\big)\Big) \le d$.

Лемма доказана.

□

Следствие 3. *Отображения*

$$\lambda\cdot, \operatorname{span} : \underbrace{H(X) \times \cdots \times H(X)}_{p \text{ множителей}} \to H(X)$$

являются 1*-липшицевыми по отношению к метрике* $\max\{d_H, \ldots, d_H\}$ *в* $H(X) \times \cdots \times H(X)$.

Рассмотрим матрицу компактов $\mathcal{A} = \big(A_i^j\big)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, где каждая строка $\mathcal{A}^j = (A_1^j, \ldots, A_n^j)$ является упорядоченной границей в $\big(H(X), d_H\big)$. Через $\hat{\mathcal{A}}_i$ обозначим столбец $(A_i^1, \ldots, A_i^p)^T$. Через $\lambda\mathcal{A}$ будем обозначать упорядоченную границу $\big(\lambda\hat{\mathcal{A}}_1, \ldots, \lambda\hat{\mathcal{A}}_n\big)$, а через $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ — упорядоченную границу $\Big(\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}}_1), \ldots, \operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}}_n)\Big)$. Множество $\{\lambda\mathcal{A} : \lambda \in \Delta^p\}$ будем называть *симплексом Минковского для границ* $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^p$.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево с границей $\partial G = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и пусть $\varphi^j : \partial G \to H(X)$, $\varphi^j : v_i \mapsto A_i^j$. Пусть Γ^j — сеть типа G с границей $\partial\Gamma^j = \varphi^j$ в

$\Big(H(X), d_H\Big)$. Положим $\Gamma := (\Gamma^1, \dots, \Gamma^p)$ и $\varphi := (\varphi^1, \dots, \varphi^p)$. Для любого $\lambda \in \Delta^p$ рассмотрим сеть $\lambda\Gamma$ с границей $\lambda\varphi$, которая переводит каждую вершину v графа G в $\sum_{j=1}^p \lambda_j \Gamma^j(v)$. Таким образом, $\partial(\lambda\Gamma) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \varphi^j$. Также определим сеть $\operatorname{span}(\Gamma)$ с границей $\operatorname{span}(\varphi)$, которая переводит v в $\operatorname{span}\Big(\Gamma^1(v), \dots, \Gamma^p(v)\Big)$. Из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Во введенных выше обозначениях, в линейном нормированном пространстве X конечной размерности справедливы неравенства*

$$d_H(\lambda\Gamma) \le \sum_{j=1}^p \lambda_j d_H(\Gamma^j), \quad d_H\Big(\operatorname{span}(\Gamma)\Big) \le \max_{j\in\{1,\dots,p\}} d_H(\Gamma^j).$$

В частности, получаем результат для минимальных параметрических сетей, в том числе для астросети.

Следствие 4. *Во введенных выше обозначениях, в линейном нормированном пространстве X конечной размерности справедливы неравенства*

$$\operatorname{mpn}[G, \lambda\varphi] \le \sum_{j=1}^p \lambda_j \operatorname{mpn}[G, \varphi^j], \quad \operatorname{mpn}[G, \operatorname{span}(\varphi)] \le \max_{j\in\{1,\dots,p\}} \operatorname{mpn}[G, \varphi^j].$$

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A} = \big(A_i^j\big)$ — матрица компактов в линейном нормированном пространстве X конечной размерности, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Delta^p$ справедливы неравенства*

$$S_{\lambda\mathcal{A}} \le \sum_{j=1}^p \lambda_i S_{\mathcal{A}^j}, \quad S_{\operatorname{span}(\mathcal{A})} \le \max_{j\in\{1,\dots,p\}} S_{\mathcal{A}^j}.$$

Следствие 6. *Существуют границы такие, что в следствии 5 выполняются строгие неравенства. Пусть $P = a_1a_2a_3a_4$ — квадрат с диагональю 1 в $\mathbb{R}^2$, точки k_{ij} — середины сторон квадрата $[a_i, a_j]$, квадрат $k_{12}k_{23}k_{34}k_{41}$ обозначим через Q (см. рис. 1). Пусть $A_1^1 = A_2^2 = [a_1, a_3]$, $A_2^1 = A_1^2 = [a_2, a_4]$. Тогда для границ $\mathcal{A}^1 = \{A_1^1, A_2^1\}$ и $\mathcal{A}^2 = \{A_1^2, A_2^2\}$ имеем $S_{\mathcal{A}^1} = S_{\mathcal{A}^2} = \frac12$.*

Для любого $\lambda \in \Delta^2$ компакт $\lambda\hat{\mathcal{A}}_1 = \lambda_1 A_1^1 \oplus \lambda_2 A_1^2$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям квадрата P, и вершинами, лежащими на сторонах квадрата P так, что они делят стороны в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, считая от концов диагонали $[a_1, a_3]$ (см. рис. 2). Тогда $\big(\frac12, \frac12\big)\hat{\mathcal{A}}_1 = \frac12(A_1^1 \oplus A_1^2) = Q$, а $\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}}_1) = P$. Аналогично, $\big(\frac12, \frac12\big)\hat{\mathcal{A}}_2 = Q$ и $\operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}}_2) = P$, откуда $S_{\left(\frac12,\frac12\right)\mathcal{A}} = 0$ и $S_{\operatorname{span}(\mathcal{A})} = 0$.

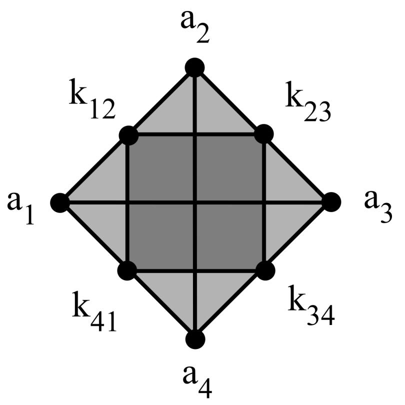

Рис. 1. К следствию 6.

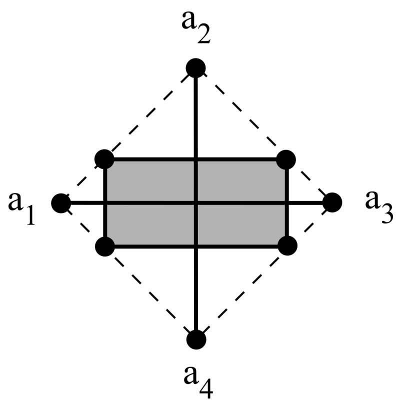

Рис. 2. Компакт $\lambda\hat{\mathcal{A}}_1 = \lambda_1 A_1^1 \oplus \lambda_2 A_1^2$.

Напомним, что *выпуклой оболочкой* множества A в линейном пространстве X называется наименьшее по включению выпуклое множество в X, содержащее A. Будем обозначать её через $\operatorname{conv}(A)$. В случае X конечной размерности m, согласно теореме Каратеодори (см., например, [7]),

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{a_1,\dots,a_{m+1}\in A}\ \bigcup_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{m+1})\in\Delta^{m+1}}\ \sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i a_i,$$

поэтому $\operatorname{conv}(A) = \operatorname{span}(\hat{\mathcal{A}})$, где $\hat{\mathcal{A}} = (A,\dots,A)$ (из $m+1$ компоненты). Из леммы 4 получаем, что если A является компактом, то $\operatorname{conv}(A)$ тоже компакт. Если в теореме 2 положить все $A^j = A$ и $B^j = B$, а $p = m+1$, то получим следствие.

Следствие 7. *Пусть A, B — компакты в линейном нормированном пространстве X конечной размерности. Тогда*

$$d_H\Big(\operatorname{conv}(A), \operatorname{conv}(B)\Big) \le d_H(A, B).$$

Следствие 8. *Существуют компакты такие, что в следствии 7 выполняется строгое неравенство. Пусть $a_1a_2a_3a_4$ — квадрат с диагональю 1 в $\mathbb{R}^2$, и $A = \{a_1, a_3\}$, $B = \{a_2, a_4\}$. Тогда* $\operatorname{conv}(A) = [a_1, a_3]$, $\operatorname{conv}(B) = [a_2, a_4]$. *Значит, $d_H(A,B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, но* $d_H\Big(\operatorname{conv}(A), \operatorname{conv}(B)\Big) = \frac{1}{2}$.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево в $\big(\mathcal{H}(X), d_H\big)$. Через $\operatorname{conv}(G) = \Big(\operatorname{conv}(V), \bar{E}\Big)$ обозначим дерево, вершины которого — выпуклые оболочки вершин из V, причем вершины из $\mathrm{conv}(V)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие вершины из V. В случае конечномерного линейного нормированного пространства X применим следствие 7 к каждой паре смежных вершин из V и получим следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности. Тогда для любого дерева G в $\big(H(X), d_H\big)$ выполняется неравевство $d_H\Big(\mathrm{conv}(G)\Big) \le d_H(G)$.*

Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Через $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$ обозначим границу, состоящую из компактов $\mathrm{conv}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Получаем следствие из теоремы 4.

Следствие 9. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности, $\mathcal{A}$ — граница в $H(X)$, и G — соединяющее ее дерево, тогда*

$$\mathrm{mpn}[G, \mathrm{conv}(\mathcal{A})] \le \mathrm{mpn}[G, \mathcal{A}].$$

Поскольку кратчайшее дерево можно получить перебором минимальных параметрических сетей, то из следствия 9 получаем следующий факт.

Следствие 10. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности, и $\mathcal{A}$ — граница в $H(X)$, тогда $\mathrm{smt}\Big(\mathrm{conv}(\mathcal{A})\Big) \le \mathrm{smt}(\mathcal{A})$.*

Частным случаем следствия 9 является утверждение для минимальной астросети.

Следствие 11. *Пусть X — m-мерное нормированное пространство, и $\mathcal{A}$ — граница в $H(X)$, тогда $S_{\mathrm{conv}(\mathcal{A})} \le S_{\mathcal{A}}$.*

Следствие 12. *Существует граница $\mathcal{A}$ такая, что в следствии 11 выполняется строгое неравенство. Пусть $\mathcal{A} = \{A, B\}$, где A и B построены в следствии 8. Тогда $S_{\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, но $S_{\mathrm{conv}(\mathcal{A})} = \frac{1}{2}$.*

Таким образом, если дана граница $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, для границы $\mathcal{B} = \{\mathrm{conv}(A_1), \dots, \mathrm{conv}(A_n)\}$ известен астрокомпакт Штейнера $K_{\mathcal{B}}$, и выполняется $S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{B}}) = S_{\mathcal{B}}$, то $K_{\mathcal{B}}$ является астрокомпактом Штейнера и для границы $\mathcal{A}$. Пример такой границы $\mathcal{B}$ будет построен в последующих публикациях.

4. Редукция компактов. Деформация граничных компактов с неувеличением длины минимальной астросети

Пусть A, K — компакты в ограниченно компактном пространстве X. Напомним, что мы обозначаем $\rho(a,k)$ через $|ak|$, а $\inf_{k\in K}|ak|$ — через $|aK|$. Введем также следующие обозначения: $d_{AK} := \min\{d : A\subset B_d(K)\} = \sup_{a\in A}|aK|$, $d_{KA} := \min\{d : K\subset B_d(A)\} = \sup_{k\in K}|kA|$. По определению, что $d_H(A,K) = \max\{d_{AK}, d_{KA}\}$.

Определим следующие подмножества компактов A и K:

$$\mathrm{to}_K(A) := A\setminus U_{d_{AK}}(K), \mathrm{from}_A(K) := K\cap B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big),$$

$$\mathrm{to}_A(K) := K\setminus U_{d_{KA}}(A), \mathrm{from}_K(A) := A\cap B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big).$$

Введенные множества для произвольных компактов A и K изображены на рис. 3.

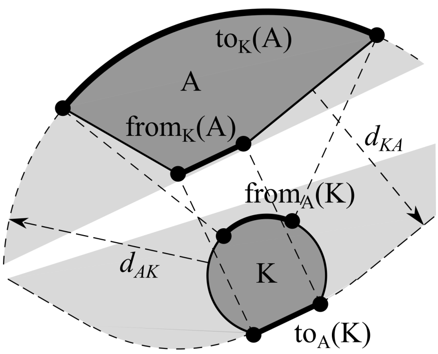

Рис. 3. Компакты A, K (закрашены серым) и множества $\mathrm{from}_K(A)$, $\mathrm{to}_K(A)$, $\mathrm{from}_A(K)$, $\mathrm{to}_A(K)$.

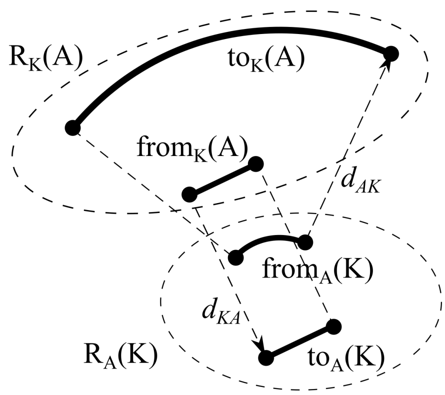

Рис. 4. Редукции $R_K(A)$ и $R_A(K)$ (обведены овалами).

Лемма 5. *Множества* $\mathrm{to}_K(A)$ *и* $\mathrm{from}_K(A)$ *не обязаны содержаться в границе* ∂A. *Примеры компактов* A *и* K, *для которых не выполняются эти включения, изображены на рис. 5 и 6.*

Лемма 6. *Множества* $\mathrm{to}_K(A)$ *и* $\mathrm{from}_A(K)$ *непусты для любых компактов* A *и* K *и являются компактами.*

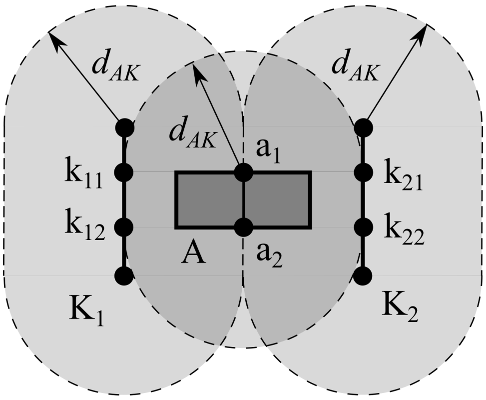

Рис. 5. Компакты A (прямоугольник) и $K = K_1 \cup K_2$, для которых $\mathrm{to}_K(A) = [a_1, a_2]$ не лежит в ∂A, а $\mathrm{from}_A(K)$ равен $[k_{11}, k_{12}] \cup [k_{21}, k_{22}]$.

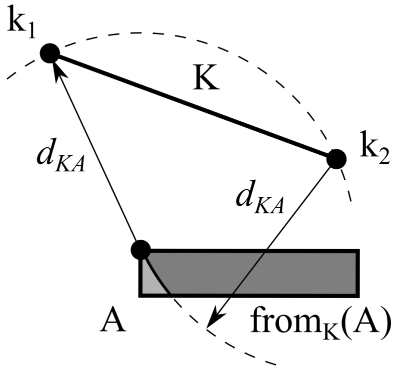

Рис. 6. Компакты A (прямоугольник) и $K = [k_1, k_2]$, для которых $\mathrm{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$, а $\mathrm{from}_K(A)$ (закрашен темно-серым) не содержится в ∂A.

Доказательство. Поскольку A — компакт, то существует точка $a_1 \in A$ такая, что $|a_1 K| = d_{AK}$. Но тогда $a_1 \notin U_{d_{AK}}(K)$, значит, $a_1 \in \mathrm{to}_K(A)$.

Поскольку K — компакт, то $|a_1 K|$ достигается в некоторой точке $k_1 \in K$, и $|a_1 k_1| = d_{AK}$. Из этого и того факта, что $a_1 \in \mathrm{to}_K(A)$, следует, что $k_1 \in B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big)$. Значит, $k_1 \in \mathrm{from}_A(K)$.

Поскольку A — компакт, то его пересечение с $X \setminus U_{d_{AK}}(K)$ также является компактом, а это пересечение и есть $\mathrm{to}_K(A)$. По лемме 3, $B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big)$ — компакт, значит, $\mathrm{from}_A(K)$ также является компактом.

Лемма доказана.

□

Лемма 7. *Компакты* $\mathrm{to}_K(A)$ *и* $\mathrm{from}_A(K)$ *связаны следующими соотношениями:*

1) *Справедливо равенство* $\mathrm{to}_K(A) = \big\{a \in A : |aK| = d_{AK}\big\} = \big\{a \in A : |a\,\mathrm{from}_A(K)| = d_{AK}\big\}$*;*

2) *Справедливо равенство* $\mathrm{from}_A(K) = \big\{k \in K : |k\,\mathrm{to}_K(A)| = d_{AK}\big\}$*;*

3) *Для любой пары точек* $(a, k) \in \mathrm{to}_K(A) \times K$ *или* $(a, k) \in A \times \mathrm{from}_A(K)$ *выполняется* $|ak| \geq d_{AK}$*;*

4) Для любой точки $a \in \mathrm{to}_K(A)$ *существует такая точка* $k \in \mathrm{from}_A(K)$*, и для любой точки* $k \in \mathrm{from}_A(K)$ *существует такая точка* $a \in \mathrm{to}_K(A)$*, что* $|ak| = d_{AK}$*;*

5) Верны равенства $d_{AK} = d_{\mathrm{to}_K(A)K} = d_{\mathrm{to}_K(A)\,\mathrm{from}_A(K)} = d_{\mathrm{from}_A(K)\,\mathrm{to}_K(A)} = d_H\Big(\mathrm{to}_K(A), \mathrm{from}_A(K)\Big) = \inf\big\{|ak| : a \in \mathrm{to}_K(A), k \in \mathrm{from}_A(K)\big\}$*, и инфимум достигается.*

Доказательство. 1. Докажем первое равенство. Из определения следует, что $\mathrm{to}_K(A) \subset B_{d_{AK}}(K)$, тогда для любой точки $a \in \mathrm{to}_K(A)$ справедливо $|aK| \le d_{AK}$. Поскольку $\mathrm{to}_K(A) \subset \Big(X \setminus U_{d_{AK}}(K)\Big)$, то для любой точки $a \in \mathrm{to}_K(A)$ справедливо $|aK| \ge d_{AK}$. Значит, для любой точки $a \in \mathrm{to}_K(A)$ справедливо $|aK| = d_{AK}$. Следовательно, $\mathrm{to}_K(A) \subset \big\{a \in A : |aK| = d_{AK}\big\}$. Обратно, если для $a \in A$ выполняется $|aK| = d_{AK}$, то $a \notin U_{d_{AK}}(K)$, откуда $\mathrm{to}_K(A) \supset \big\{a \in A : |aK| = d_{AK}\big\}$.

Докажем второе равенство. Если для $a \in A$ выполняется $|aK| = d_{AK}$, то существует $k \in K$ такая, что $|ak| = d_{AK}$. По определению, $k \in \mathrm{from}_A(K)$, поэтому $|a\,\mathrm{from}_A(K)| \le d_{AK}$. Но из $\mathrm{from}_A(K) \subset K$ следует $|a\,\mathrm{from}_A(K)| \ge |aK| = d_{AK}$. Значит, $|a\,\mathrm{from}_A(K)| = d_{AK}$ и, следовательно, $\big\{a \in A : |aK| = d_{AK}\big\} \subset \big\{a \in A : |a\,\mathrm{from}_A(K)| = d_{AK}\big\}$. Обратно, если для $a \in A$ выполняется $|a\,\mathrm{from}_A(K)| = d_{AK}$, то $|aK| \le d_{AK}$. Однако $\Big|a\Big(K \setminus \mathrm{from}_A(K)\Big)\Big| \ge d_{AK}$, поэтому $|aK| \ge d_{AK}$. Значит, $|aK| = d_{AK}$ и, следовательно, $\big\{a \in A : |aK| = d_{AK}\big\} \supset \big\{a \in A : |a\,\mathrm{from}_A(K)| = d_{AK}\big\}$.

2. Рассмотрим произвольную точку $k \in \mathrm{from}_A(K)$. С одной стороны, $k \in K$, поэтому из определения $\mathrm{to}_K(A)$ следует, что $|k\,\mathrm{to}_K(A)| \ge d_{AK}$. С другой стороны, $k \in B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big)$, поэтому $|k\,\mathrm{to}_K(A)| \le d_{AK}$. Значит, для любой точки $k \in \mathrm{from}_A(K)$ справедливо $|k\,\mathrm{to}_K(A)| = d_{AK}$. Следовательно, $\mathrm{from}_A(K) \subset \big\{k \in K : |k\,\mathrm{to}_K(A)| = d_{AK}\big\}$. Обратно, если для $k \in K$ выполняется $|k\,\mathrm{to}_K(A)| = d_{AK}$, то $a \in B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big)$, откуда $\big\{k \in K : |k\,\mathrm{to}_K(A)| = d_{AK}\big\} \subset \mathrm{from}_A(K)$.

3. Следует из пунктов 1 и 2.

4. По пункту 1, для любой $a \in \mathrm{to}_K(A)$ выполняется $|aK| = d_{AK}$. Поскольку K — компакт, для каждой $a \in \mathrm{to}_K(A)$ существует $k \in K$ такая, что $|ak| = d_{AK}$. Следовательно, $k \in B_{d_{AK}}\Big(\mathrm{to}_K(A)\Big)$. Тогда, по определению, $k \in \mathrm{from}_A(K)$. Второе утверждение пункта следует из пункта 2.

5. Равенство $d_{AK} = d_{\mathrm{to}_K(A)K}$ следует из пункта 1.

По пункту 3, $d_{\mathrm{to}_K(A)\,\mathrm{from}_A(K)} \ge d_{AK}$, а по пункту 4, $d_{\mathrm{to}_K(A)\,\mathrm{from}_A(K)} \le d_{AK}$, поэтому $d_{AK} = d_{\mathrm{to}_K(A)\,\mathrm{from}_A(K)}$. Аналогично, $d_{AK} = d_{\mathrm{from}_A(K)\,\mathrm{to}_K(A)}$. Из последних двух равенств следует $d_{AK} = d_H\Big(\mathrm{to}_K(A), \mathrm{from}_A(K)\Big)$.

Равенство $d_{AK} = \inf\big\{|ak| : a \in to_K(A), k \in \mathrm{from}_A(K)\big\}$ и достижение инфимума следует из пунктов 3 и 4.

Лемма доказана.

$\square$

Лемма 8. *Компакты* $\mathrm{to}_K(A)$ *и* $\mathrm{from}_K(A)$ *удовлетворяют следующим соотношениям:*

1) *Справедливо равенство* $A = \mathrm{to}_K(A) \sqcup \Big(A \cap U_{d_{AK}}(K)\Big)$*;*

2) *Справедливо включение* $\Big(A \setminus \mathrm{to}_K(A)\Big) \subset U_{d_{AK}}(K)$*;*

3) *Множество* $\mathrm{to}_K(A) \cap B_d(K')$ *пусто для* $d < d_{AK}$ *и компакта* $K' \subset K$*;*

4) *Справедливо равенство* $A = \mathrm{from}_K(A) \sqcup \bigg(A \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)$*;*

5) *Справедливо включение* $\Big(A \setminus \mathrm{from}_K(A)\Big) \subset \bigg(X \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\bigg)$*;*

6) *Множество* $\mathrm{from}_K(A) \cap \bigg(X \setminus B_d\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)$ *пусто для* $d > d_{KA}$*.*

Доказательство. 1. Верна цепочка равенств:

$$A = A \cap \bigg(\Big(X \setminus U_{d_{AK}}(K)\Big) \sqcup U_{d_{AK}}(K)\bigg) =$$

$$= \bigg(A \cap \Big(X \setminus U_{d_{AK}}(K)\Big)\bigg) \sqcup \Big(A \cap U_{d_{AK}}(K)\Big) = \mathrm{to}_K(A) \sqcup \Big(A \cap U_{d_{AK}}(K)\Big).$$

2. Из пункта 1 получаем $A \setminus \mathrm{to}_K(A) = \Big(A \cap U_{d_{AK}}(K)\Big)$, поэтому $\Big(A \setminus \mathrm{to}_K(A)\Big) \subset U_{d_{AK}}(K)$.

3. Следует из того, что $\mathrm{to}_K(A) = A \cap \Big(X \setminus U_{d_{AK}}(K)\Big)$ и $\Big(X \setminus U_{d_{AK}}(K)\Big)$ не пересекается с $B_d(K')$ для любых $d < d_{AK}$ и компакта $K' \subset K$.

4. Верна цепочка равенств:

$$A = A \cap \Bigg(\bigg(B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big) \sqcup \bigg(X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \bigg(A \cap B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg) \sqcup \Bigg(A \cap \bigg(X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)\Bigg) =$$

$$= \mathrm{from}_K(A) \sqcup \Big(A \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big).$$

5. Из пункта 4 получаем $A \setminus \mathrm{from}_K(A) = A \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$, поэтому $\big(A \setminus \mathrm{from}_K(A)\big) \subset \Big(X \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big)$.

6. По определению, $\mathrm{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$, но $B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$ не пересекается с $X \setminus B_d\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$ для любого $d > d_{KA}$.

Лемма доказана.

□

Компакт $\mathrm{from}_K(A) \cup \mathrm{to}_K(A)$ обозначим через $R_K(A)$ и будем называть *редукцией компакта A относительно компакта K* (см. рис. 4). Если редукции $R_{K_1}(A_1)$ и $R_{K_2}(A_2)$ совпадают как множества, то будем называть их совпадающими и обозначать это через $R_{K_1}(A_1) = R_{K_2}(A_2)$, а если к тому же $\mathrm{from}_{K_1}(A_1) = \mathrm{from}_{K_2}(A_2)$ и $\mathrm{to}_{K_1}(A_1) = \mathrm{to}_{K_2}(A_2)$, то будем говорить о равенстве редукций и обозначать его через $R_{K_1}(A_1) \simeq R_{K_2}(A_2)$.

Лемма 9. *Верны равенства:* $d_H\big(R_K(A), R_A(K)\big) = d_{R_K(A)R_A(K)} = d_{R_A(K)R_K(A)} = d_H(A, K)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $d_{R_K(A)R_A(K)} = d_H(A, K)$. По пункту 3 леммы 7, для любой пары точек $(a, k) \in \mathrm{to}_K(A) \times K$ выполняется $|ak| \ge d_{AK}$, а для любой пары точек $(a, k) \in \mathrm{from}_K(A) \times K$ выполняется $|ak| \ge d_{KA}$. Поэтому для любой $a \in \mathrm{to}_K(A)$ верно $|aR_A(K)| \ge d_{AK}$, а для любой $a \in \mathrm{from}_K(A)$ верно $|aR_A(K)| \ge d_{KA}$, следовательно, $d_{R_K(A)R_A(K)} = \sup_{a \in R_K(A)} |aR_A(K)| \ge d_H(A, K)$. Из пункта 4 леммы 7 следует, что $\mathrm{to}_K(A) \subset B_{d_{AK}}\big(\mathrm{from}_A(K)\big)$ и $\mathrm{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_K(A)\big)$, поэтому $d_{R_K(A)R_A(K)} \le d_H(A, K)$. Следовательно, $d_{R_K(A)R_A(K)} = d_H(A, K)$.

Показывая аналогично, что $d_{R_A(K)R_K(A)} = d_H(A, K)$, получаем равенство $d_H\big(R_K(A), R_A(K)\big) = d_H(A, K)$. Лемма доказана.

□

Однако если мы заменим на редукцию только один из двух компактов (например, A), то расстояние, как будет показано далее в следствии 13, может увеличиться.

Введем множество (см. рис. 7)

$$F_K(A) := R_K(A) \cup \Big(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big),$$

которое будем называть *K-облаком* компакта A.

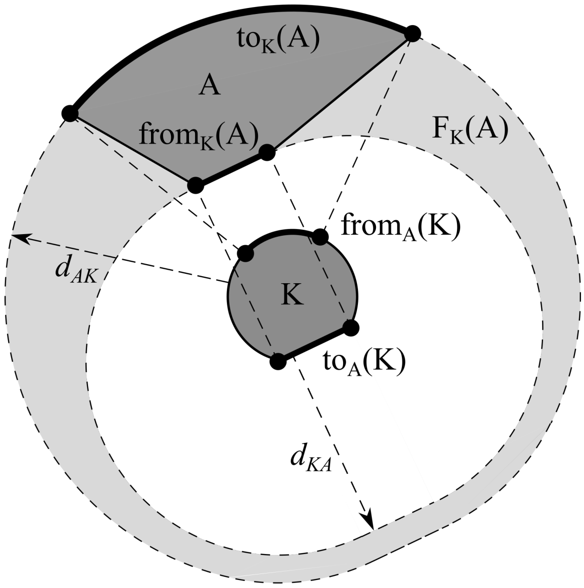

Рис. 7. Компакты A и K (закрашены темно-серым) и множество $F_K(A)$ (закрашено светло-серым).

Лемма 10. *Множество $F_K(A)$ обладает следующими свойствами:*

1) *Редукция $R_K(A)$ не пересекается с $\Big(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big)$;*

2) *Верно включение $A \subset F_K(A)$;*

3) *Для любого множества B такого, что $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$, верны равенства $\mathrm{to}_K(A) = B \setminus U_{d_{AK}}(K)$, $\mathrm{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$ и $B = \mathrm{to}_K(A) \sqcup \big(B \cap U_{d_{AK}}(K)\big) = \mathrm{from}_K(A) \sqcup \Big(B \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big)$.*

Доказательство. 1. Следует из пунктов 1 и 4 леммы 8.

2. Пересекая левые и правые части включений из пунктов 2 и 5 леммы 8, получаем

$$\big(A \setminus R_K(A)\big) \subset \Big(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big),$$

откуда следует доказываемое включение.

3. Поскольку $\mathrm{to}_K(A)$ не пересекается с $U_{d_{KA}}(K)$, то из определения B следует $\mathrm{to}_K(A) \subset B \subset \Big(\mathrm{to}_K(A) \sqcup U_{d_{AK}}(K)\Big)$. Вычитая из всех частей множество $U_{d_{KA}}(K)$, получаем $\mathrm{to}_K(A) \subset \Big(B \setminus U_{d_{KA}}(K)\Big) \subset \mathrm{to}_K(A)$, откуда $\mathrm{to}_K(A) = B \setminus U_{d_{KA}}(K)$.

Аналогично, поскольку $\mathrm{from}_K(A)$ лежит в $B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)$ и не пересекается с $X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)$, то из определения B следует

$$\mathrm{from}_K(A) \subset B \subset \left(\mathrm{from}_K(A) \sqcup \left(X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\right)\right).$$

Пересекая все части с $B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)$, получаем

$$\mathrm{from}_K(A) \subset \left(B \cap B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\right) \subset \mathrm{from}_K(A),$$

откуда $\mathrm{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)$.

Остальные два равенства следуют из доказанных.

Лемма доказана.

□

Из пункта 1 леммы 10 следует, что если вторая компонента в объединении непустая, то $F_K(A)$ не является компактом.

Пусть K — некоторый компакт. Будем говорить, что компакт B является *K-деформацией* компакта A, если $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. Из пункта 2 леммы 10 следует, что A является своей K-деформацией.

Лемма 11. *Пусть компакт B является K-деформацией компакта A. Тогда:*

1) $d_{BK} = d_{AK}$*;*

2) $d_{KB} \geq d_{KA}$*, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* $K \subset B_{d_{KA}}(B)$*;*

3) $d_H(K, B) \geq d_H(K, A)$*;*

4) $\mathrm{to}_K(B) = \mathrm{to}_K(A)$*;*

5) $\mathrm{from}_B(K) = \mathrm{from}_A(K)$*;*

6) Если $d_{KB} = d_{KA}$*, то* $\mathrm{to}_B(K) \supset \mathrm{to}_A(K)$*;*

7) Если $d_{KB} = d_{KA}$*, то* $\mathrm{from}_K(B) \supset \mathrm{from}_K(A)$*;*

8) Если $\mathrm{to}_B(K) = \mathrm{to}_A(K)$, *то* $d_{KB} = d_{KA}$.

Доказательство. 1. По определению $F_K(A)$, верно $B \subset B_{d_{AK}}(K)$, поэтому $d_{BK} \le d_{AK}$. Для любого $d < d_{AK}$ выполняется $\mathrm{to}_K(A) \not\subset B_d(K)$. Значит, $d_{BK} = d_{AK}$.

2. По пункту 5 леммы 7,

$$d_{KA} = \inf\Big\{d : \mathrm{to}_A(K) \subset B_d\Big(\mathrm{from}_K(A)\Big)\Big\}.$$

Поскольку $B = \mathrm{from}_K(A) \sqcup \bigg(B \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)$ и

$$\inf_{k \in \mathrm{to}_A(K)} \bigg|k\bigg(B \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)\bigg| \ge d_{KA},$$

то $d_{KA} = \inf\big\{d : \mathrm{to}_A(K) \subset B_d(B)\big\}$. Значит,

$$d_{KB} = \min\{d : K \subset B_d(B)\} \ge \min\big\{d : \mathrm{to}_A(K) \subset B_d(B)\big\} =$$

$$= \min\Big\{d : \mathrm{to}_A(K) \subset B_d\Big(\mathrm{from}_K(A)\Big)\Big\} = d_{KA}.$$

При этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда $K \subset B_{d_{KA}}(B)$.

3. Следует из пунктов 1 и 2, поскольку $d_H(K,B) = \max\{d_{BK}, d_{KB}\} \ge \max\{d_{AK}, d_{KA}\} = d_H(K,A)$.

4. По определению, $\mathrm{to}_K(B) = B \setminus U_{d_{BK}}(K)$. Из пункта 1 следует $\mathrm{to}_K(B) = B \setminus U_{d_{AK}}(K)$. Поскольку из пункта 3 леммы 10 следует $B = \mathrm{to}_K(A) \sqcup \Big(B \cap U_{d_{AK}}(K)\Big)$, то $\mathrm{to}_K(B) = \mathrm{to}_K(A)$.

5. Следует из определения и пунктов 1 и 4.

6. По пункту 1 леммы 7, $\mathrm{to}_A(K) = \big\{k \in K : |k\,\mathrm{from}_K(A)| = d_{KA}\big\}$. Пусть $k \in \mathrm{to}_A(K)$. Поскольку $\mathrm{from}_K(A) \subset B$, то $|kB| \le d_{KA}$. Однако $\Big(B \setminus \mathrm{from}_K(A)\Big) \subset \bigg(X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\bigg)$, поэтому $\Big|k\Big(B \setminus \mathrm{from}_K(A)\Big)\Big| \ge d_{KA}$. Значит, $|kB| \ge d_{KA}$ и, окончательно, $|kB| = d_{KA}$. По пункту 1 леммы 7, с учетом $d_{KB} = d_{KA}$, имеем $\mathrm{to}_B(K) = \big\{k \in K : |kB| = d_{KA}\big\}$. Следовательно, $\mathrm{to}_A(K) \subset \mathrm{to}_B(K)$.

7. Следует из пункта 6 и определения $\mathrm{from}_K(B)$.

8. По пункту 2, $d_{KB} \ge d_{KA}$. Предположим, что $d_{KB} > d_{KA}$. Из определения следует, что $\mathrm{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big) \subset U_{d_{KB}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)$. Значит, для любой $a \in \mathrm{from}_K(A)$ выполняется $|a\,\mathrm{to}_A(K)| < d_{KB}$. Однако, по

пункту 3 леммы 7, для любой пары точек $(k, a) \in \mathrm{to}_B(K) \times B$ выполняется $|ka| \geq d_{KB}$. Поскольку $\mathrm{to}_A(K) \times \mathrm{from}_K(A) \subset \mathrm{to}_B(K) \times B$, получили противоречие. Значит, $d_{KB} = d_{KA}$.

Лемма доказана.

□

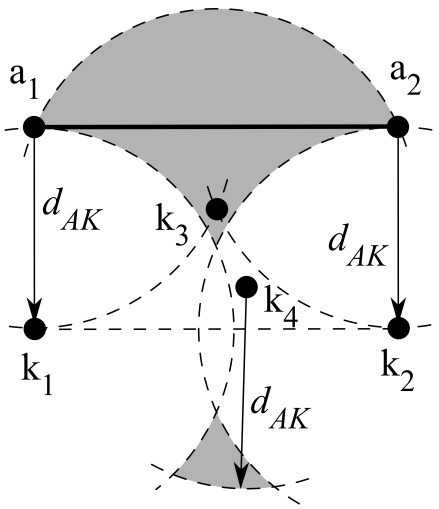

Рис. 8. К следствиям 13 и 15. Компакты $A = [a_1, a_2]$ и $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$. Множество $F_K(A)$ закрашено серым.

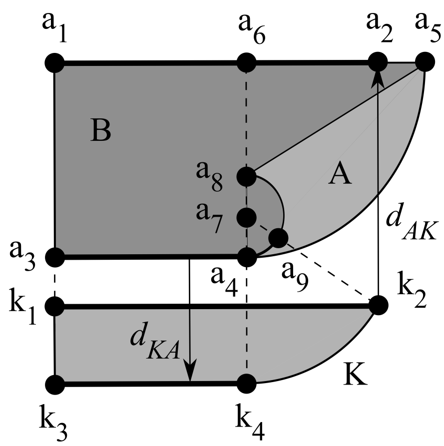

Рис. 9. К следствию 14. Компакты A и K (закрашены серым), компакт B (закрашен полосками).

Следствие 13. *В пункте 2 леммы 11 компакты K, A, B могут быть такими, что $d_{KB} > d_{KA}$, и тогда в пункте 3 имеем строгое неравенство: $d_H(K, B) > d_H(K, A)$. Пример таких $A = [a_1, a_2]$ и $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ изображен на рис. 8. Здесь $|k_1a_1| = |k_2a_2| = |k_3a_1| = |k_3a_2| = d_{KA} = d_{AK}$, k_4 лежит в четырехугольнике $a_1a_2k_2k_1$ и $|k_4a_1| > d_{AK}$, $|k_4a_2| > d_{AK}$, $|k_4A| < d_{AK}$. Тогда $\mathrm{to}_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{from}_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$, $\mathrm{from}_A(K) = \{k_1, k_2, k_3\}$, откуда $R_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $R_A(K) = \{k_1, k_2, k_3\}$. Следовательно, $B_{d_{AK}}\Big(R_K(A)\Big)$ не содержит k_4, откуда имеем $d_{KR_K(A)} > d_{KA}$. Положим $B = R_K(A)$.*

Кроме того, из отсутствия равенства между d_{KB} и d_{KA} перестает работать пункт 6, поскольку $\mathrm{to}_B(K) = \{k_4\}$ не пересекается с $\mathrm{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$.

Следствие 14. *В пунктах 6 и 7 леммы 11 компакты K, A, B могут быть такими, что $\mathrm{to}_B(K) \neq \mathrm{to}_A(K)$ и $\mathrm{from}_K(B) \neq \mathrm{from}_K(A)$. Пример таких K, A, B изображен на рис. 9. Здесь компактом A является объединение прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$ и четверти круга с центром в a_6 и радиуса $|a_4a_6|$, точка a_5 лежит в пересечении окружности и прямой a_1a_6 так, что $a_6 \in [a_1, a_5]$. На отрезке $[a_4, a_6]$ возмем точку a_7. Очевидно, что полукруг с центром в a_7 радиуса $|a_7a_4|$, построенный наружу относительно прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$, целиком содержится в A. Компакт K — выпуклая фигура $k_1k_2k_4k_3$, граница которой состоит из трех отрезков $[k_1, k_2]$, $[k_1, k_3]$, $[k_3, k_4]$ и дуги окружности с центром a_7 радиуса $|a_7k_4|$ с концами k_2 и k_4, причем k_1k_2 параллельно k_3k_4 и a_1a_5, $a_3 \in [a_1, k_3]$, $k_1 \in [a_3, k_3]$, $a_4 \in [a_6, k_4]$. Тогда $\mathrm{to}_A(K) = [k_3, k_4]$ и $\mathrm{from}_K(A) = [a_3, a_4]$. Построим точку a_8 на пересечении окружности с центром a_7 радиуса $|a_4a_7|$ с отрезком $[a_6, a_7]$ и точку a_9 на пересечении этой же окружности с отрезком $[a_7, k_2]$. Определим компакт B как объединение прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$, треугольника $\triangle a_5a_6a_8$ и полукруга с центром в a_7 и радиуса $|a_7a_4|$. Поскольку $R_K(A) \subset B \subset A$, то $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. При этом $\mathrm{to}_A(K) = [k_3, k_4] \cup \overset{\smile}{k_2k_4}$ и $\mathrm{from}_K(A) = [a_3, a_4] \cup \overset{\smile}{a_4a_9}$.*

Будем говорить, что компакты A и B *редуктивно эквивалентны относительно компакта K*, если $R_K(A) \simeq R_K(B)$ и $R_A(K) \simeq R_B(K)$.

Лемма 12. *Если компакты A и B редуктивно эквивалентны относительно K, то B является K-деформацией A и A является K-деформацией B.*

Доказательство. Из пункта 5 леммы 7 и равенства $\mathrm{to}_K(A) = \mathrm{to}_K(B)$ получаем

$$d_{BK} = \min\{d : \mathrm{to}_K(B) \subset B_d(K)\} = \min\{d : \mathrm{to}_K(A) \subset B_d(K)\} = d_{AK}.$$

Аналогично, $d_{KA} = d_{KB}$.

По пункту 2 леммы 8, $\Big(B \setminus \mathrm{to}_K(B)\Big) \subset U_{d_{BK}}(K)$, поэтому, с учетом равенств $\mathrm{to}_K(A) = \mathrm{to}_K(B)$ и $d_{BK} = d_{AK}$, получаем (1) $\Big(B \setminus \mathrm{to}_K(A)\Big) \subset U_{d_{AK}}(K)$.

По пункту 5 леммы 8, $\Big(B \setminus \mathrm{from}_K(B)\Big) \subset \Big(X \setminus B_{d_{KB}}\Big(\mathrm{to}_B(K)\Big)\Big)$, поэтому, с учетом равенств $\mathrm{from}_K(A) = \mathrm{from}_K(B)$, (3) $\mathrm{to}_A(K) = \mathrm{to}_B(K)$ и $d_{KA} = d_{KB}$, получаем (2) $\Big(B \setminus \mathrm{from}_K(A)\Big) \subset \Big(X \setminus B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{to}_A(K)\Big)\Big)$.

Пересечение левых и правых частей (1) и (2) дает $\Big(B \setminus R_K(A)\Big) \subset \Big(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)\Big)$ и, следовательно, $B \subset F_K(A)$. Кроме того, $R_K(A) = R_K(B) \subset B$. Таким образом, B является K-деформацией A.

Аналогично получаем, что A является K-деформацией B. Лемма доказана.

□

Лемма 13. *Если компакты A и B редуктивно эквивалентны относительно компакта K, то $d_H(K, B) = d_H(K, A)$.*

Доказательство. Из леммы 12 следует, что B является K-деформацией A и что A является K-деформацией B. Тогда из леммы 11 следует, что $d_H(K, B) \geq d_H(K, A)$ и $d_H(K, A) \geq d_H(K, B)$, значит, $d_H(K, B) = d_H(K, A)$. Лемма доказана.

□

Следствие 15. *Из того, что B является K'-деформацией A, не следует редуктивной эквивалентности A и B относительно компакта K. Рассмотрим компакты $A = [a_1, a_2]$ и $K' = \{k_1, k_2, k_3\}$, изображенные на рис. 8, и определим $B = \{a_1, a_2\}$. Тогда $\mathrm{to}_B(K') = \{k_1, k_2, k_3\}$, $\mathrm{to}_A(K') = \{k_1, k_2\}$, поэтому $R_B(K') \not\simeq R_A(K')$.*

Будем говорить, что компакты A и B *K-связаны*, если $\mathrm{to}_B(K) = \mathrm{to}_A(K)$.

Лемма 14. *Если компакт B является K-деформацией компакта A, и A и B K-связаны, то A и B редуктивно эквивалентны относительно K.*

Доказательство. Согласно пунктам 4 и 5 леммы 11, $\mathrm{to}_K(B) = \mathrm{to}_K(A)$ и $\mathrm{from}_B(K) = \mathrm{from}_A(K)$. Также по условию $\mathrm{to}_B(K) = \mathrm{to}_A(K)$, что, по пункту 8 леммы 11, влечет $d_{KB} = d_{KA}$. По пункту 3 леммы 10, $\mathrm{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$. По определению с учетом полученных ранее равенств имеем $\mathrm{from}_K(B) = B \cap B_{d_{KB}}\big(\mathrm{to}_B(K)\big) = B \cap B_{d_{KA}}\big(\mathrm{to}_A(K)\big)$. Значит, $\mathrm{from}_K(B) = \mathrm{from}_K(A)$ и, окончательно, $R_K(B) \simeq R_K(A)$ и $R_B(K) \simeq R_A(K)$. Лемма доказана.

□

Следствие 16. *Если компакты A и B K-связаны, то A и B редуктивно эквивалентны относительно K тогда и только тогда, когда B является K-деформацией A.*

Следствие 17. *Если компакт B является K-деформацией компакта A, и A и B K-связаны, то $d_H(K,B) = d_H(K,A)$.*

Пусть K — некоторый компакт. Будем говорить, что компакт B является *верхней K-деформацией* компакта A, если $A \subset B \subset F_K(A)$. Очевидно, что если B является верхней K-деформацией компакта A, то он является и K-деформацией A.

Лемма 15. *Если компакт B является верхней K-деформацией компакта A, то A и B K-связаны.*

Доказательство. По определению, $K \subset B_{d_{KA}}(A)$. Поскольку $A \subset B$, то $B_{d_{KA}}(A) \subset B_{d_{KA}}(B)$. Значит, $K \subset B_{d_{KA}}(B)$. Отсюда и из пункта 2 леммы 11 следует, что $d_{KB} = d_{KA}$. Следовательно, применим пункт 6 леммы 11 и получим, что $\mathrm{to}_B(K) \supset \mathrm{to}_A(K)$. По определению имеем

$$\mathrm{to}_B(K) = \Big(K \cap \Big(X \setminus U_{d_{KB}}(B)\Big)\Big) \subset \Big(K \cap \Big(X \setminus U_{d_{KA}}(A)\Big)\Big) = \mathrm{to}_A(K).$$

Таким образом, $\mathrm{to}_B(K) = \mathrm{to}_A(K)$. Лемма доказана.

□

Из лемм 14, 13 и 15 получаем следствие.

Следствие 18. *Пусть компакт B является верхней K-деформацией компакта A. Тогда A и B редуктивно эквивалентны относительно K и $d_H(K,B) = d_H(K,A)$.*

Будем говорить, что компакт A from-*покрывает* компакт K, если

$$\Big(K \setminus \mathrm{to}_A(K)\Big) \subset U_{d_{KA}}\Big(\mathrm{from}_K(A)\Big).$$

Лемма 16. *Если компакт B является K-деформацией компакта A и A* from-*покрывает K, то A и B K-связаны.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{from}_K(A) \subset B$, то из from-покрытия следует, что $\Big(K \setminus \mathrm{to}_A(K)\Big) \subset U_{d_{KA}}(B)$. Значит, $K \subset \Big(U_{d_{KA}}(B) \cup \mathrm{to}_A(K)\Big)$. Так как $\mathrm{to}_A(K) \subset B_{d_{KA}}\Big(\mathrm{from}_K(A)\Big) \subset B_{d_{KA}}(B)$, то $K \subset B_{d_{KA}}(B)$. По пунктам 2 и 6 леммы 11, из последнего включения следует $d_{KB} = d_{KA}$ и $\mathrm{to}_B(K) \supset \mathrm{to}_A(K)$.

Из того, что $\Big(K \setminus \mathrm{to}_A(K)\Big) \subset U_{d_{KA}}(B)$, следует $\Big(K \cup \mathrm{to}_A(K)\Big) \subset \Big(U_{d_{KA}}(B) \cup \mathrm{to}_A(K)\Big)$, откуда

$$\Big(\Big(K \cup \mathrm{to}_A(K)\Big) \setminus U_{d_{KA}}(B)\Big) \subset \Big(\mathrm{to}_A(K) \setminus U_{d_{KA}}(B)\Big) = \mathrm{to}_A(K).$$

Значит, $\Big(\big(K \setminus U_{d_{KA}}(B)\big) \cup \big(\mathrm{to}_A(K) \setminus U_{d_{KA}}(B)\big)\Big) \subset \mathrm{to}_A(K)$. Поскольку $\mathrm{to}_A(K)$ и $U_{d_{KA}}(B)$ не пересекаются по построению, то $\Big(\big(K \setminus U_{d_{KA}}(B)\big) \cup \mathrm{to}_A(K)\Big) \subset \mathrm{to}_A(K)$, откуда $\big(K \setminus U_{d_{KA}}(B)\big) \subset \mathrm{to}_A(K)$. Но по определению с учетом равенства $d_{KB} = d_{KA}$ имеем $\mathrm{to}_B(K) = K \setminus U_{d_{KA}}(B)$, откуда $\mathrm{to}_B(K) \subset \mathrm{to}_A(K)$. Значит, $\mathrm{to}_B(K) = \mathrm{to}_A(K)$.

Лемма доказана.

$\square$

Из лемм 14, 13 и 16 получаем следствие.

Следствие 19. *Пусть компакт B является K-деформацией компакта A и A from-покрывает K. Тогда A и B редуктивно эквивалентны относительно K и $d_H(K,B) = d_H(K,A)$.*

Перейдем к деформации границ и оценке длины минимальной астросети. Пусть K — некоторый компакт, и даны $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots B_n\}$. Границу $\mathcal{B}$ назовем *K-деформацией* (*верхней K-деформацией*) границы $\mathcal{A}$, если B_i является K-деформацией (верхней K-деформацией) компакта A_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что границы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *редуктивно эквивалентны относительно компакта K* (*K-связаны*), если A_i и B_i редуктивно эквивалентны относительно компакта K (K-связаны) для каждого $i = 1, \dots, n$. Скажем, что граница $\mathcal{A}$ from-*покрывает* K, если каждый A_i from-покрывает K.

Теорема 5. *Если для границ $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots B_n\}$ и астрокомпакта Штейнера $K_{\mathcal{A}}$ для границы $\mathcal{A}$ выполняется хотя бы одно из условий:*

1) *$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ редуктивно эквивалентны относительно $K_{\mathcal{A}}$;*

2) *$\mathcal{B}$ является $K_{\mathcal{A}}$-деформацией $\mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ K-связаны;*

3) *$\mathcal{B}$ является верхней $K_{\mathcal{A}}$-деформацией $\mathcal{A}$;*

4) *$\mathcal{B}$ является $K_{\mathcal{A}}$-деформацией $\mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ from-покрывает $K_{\mathcal{A}}$;*

то $S_{\mathcal{B}} \le S_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Из леммы 13, следствий 17, 18 и 19 следует равенство $S_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{A}})$ для пунктов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Поскольку $K_{\mathcal{A}}$ — астрокомпакт Штейнера для $\mathcal{A}$, то $S_{\mathcal{B}} \le S_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}$. Теорема доказана.

$\square$

Следствие 20. *На практике редуктивная эквивалентность границ неудобна для поиска границы $\mathcal{B}$, поэтому далее при изучении примеров границы $\mathcal{A}$, для которых найдено $\Sigma(\mathcal{A})$, мы будем использовать $K_{\mathcal{A}}$-деформацию $\Big(K_{\mathcal{A}} \in \Sigma(\mathcal{A})\Big)$ с дополнительным условием ($K_{\mathcal{A}}$-связанность, включение $A_i \subset B_i$, from-покрытие).*

Следствие 21. *Вообще говоря, деформации границы $\mathcal{A}$ относительно различных астрокомпактов Штейнера различаются.*

Следствие 22. *Продемонстрируем полученные результаты на границе $\mathcal{A}^1 = \{A_1^1, A_2^1\}$ из следствия 6. Положим $\mathcal{A} := \mathcal{A}^1$, $A_i := A_i^1$. Поскольку граница состоит из двух элементов, то $S_{\mathcal{A}} = d_H(A_1, A_2) = \frac{1}{2}$. Из статьи [6] следует, что для каждого $d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ компакт $K_d := B_d(A_1) \cap B_{\frac{1}{2}-d}(A_2)$ является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$.*

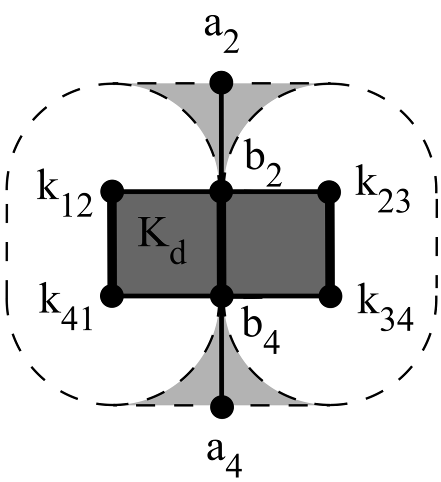

Рис. 10. K_d-облако компакта $A_2 = [a_2, a_4]$ (открытая компонента выделена светло-серым).

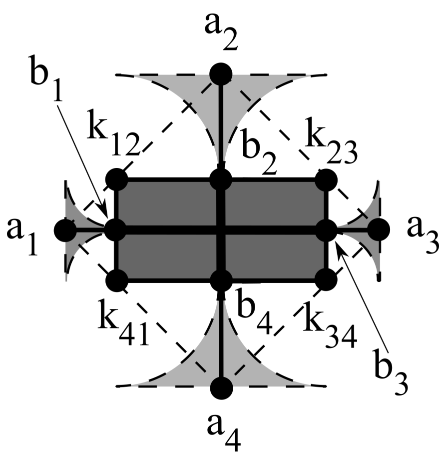

Рис. 11. K_d-облака компактов A_1, A_2 (открытые компоненты выделены серым и светло-серым).

Обозначим вершины K_d через k_{ij}, если они лежат на сторонах $[a_i, a_j]$ квадрата P. Тогда $\mathrm{to}_{K_d}(A_2) = \{a_2, a_4\}$, $\mathrm{to}_{A_2}(K_d) = [k_{12}, k_{41}] \cup [k_{23}, k_{34}]$ *и* $\mathrm{from}_{K_d}(A_2) = [b_2, b_4]$, *где b_i — ближайшая к a_i точка пересечения компакта $A_1 \cup A_2$ с границей компакта K_d, $i = 1, 2, 3, 4$. Множество $F_{K_d}(A_2)$ построено на рис. 10 и состоит из двух открытых криволинейных треугольников, объединенных с $R_{K_d}(A_2) = \{a_2, a_4\} \cup [b_2, b_4]$. Также заметим, что* $\Big(K_d \setminus \mathrm{to}_{A_2}(K_d)\Big) \subset U_{d_{K_d A_2}}\Big(\mathrm{from}_{K_d}(A_2)\Big)$, *то есть* A_2 from-*покрывает* K_d.

Аналогично получаем, что A_1 from-*покрывает K_d, следовательно, граница $\mathcal{A}$* from-*покрывает K_d. Согласно теореме 5, если граница $\mathcal{B}$ является K_d-деформацией $\mathcal{A}$, то $S_{\mathcal{B}} \le S_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}$. Оба K_d-облака граничных компактов A_1, A_2 построены на рис. 11. Таким образом, для каждого из континуума астрокомпактов Штейнера K_d для границы $\mathcal{A}$ существует континуум K_d-деформаций границы, не увеличивающих длину минимальной астросети.*

Список литературы

[1] V. Jarnik, M. Kössler, "O minimalnich grafech, obsahujicich n danych bodu", *Casopis pro pestovani matematiky a fysiky*, **63**:8 (1934), 223–235.

[2] S. Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 c.

[3] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2004, 512 с.

[4] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*, Наука, Москва, 1990, 384 с.

[5] A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 432 c.

[6] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., "Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance", *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590

[7] Е. В. Шикин, *Линейные пространства и отображения*, Изд-во МГУ, Москва, 1987, 309 с.

An estimate for the length of a minimal parametric network in hyperspaces under deformation of the boundary set

Tropin A.M.

The Fermat—Steiner problem is to find a point in the metric space Y (which we will call the Steiner astrovertex) such that the sum of the distances from it to the points of some finite fixed subset $A \subset Y$, called the boundary, is minimal. We will call the minimal sum of distances the length of the minimal astronet. We consider this problem in the hyperspace $Y = H(X)$ of nonempty, closed, and bounded subsets of the proper space X, which are compact in this space.

This article describes a wide class of deformations of boundary compact sets that do not increase the length of the minimal astronet. Averaging in the sense of the Minkowski sum of a finite number of boundaries consisting of an equal number of elements is also considered, and it is shown that such averaging also does not increase the length of the minimal astronet.

Keywords: Fermat—Steiner problem, Steiner minimal tree, minimal parametric network, minimal astronet, Steiner astrocompact, hyperspace, Hausdorff distance.

References

[1] V. Jarnik, M. Kössler, "On minimal graphs containing n given points", *Journal for Cultivation of Mathematics and Physics*, **63**:8 (1934), 223–235

[2] S. Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 c.

[3] Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, **33**, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001 (in Russian), 415 c.

[4] O. Melnikov, R. Tyshkevich, V. Yemelichev, V. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994 (in Russian), 371 c.

[5] A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 432 c.

[6] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., "Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance", *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590

[7] E. V. Shikin, *Linear spaces and mappings*, MGU, Moscow, 1987 (in Russian), 309 c.