Сложность многослойных d-мерных схем

Т. Р. Сытдыков[1], Г. В. Калачев[2]

В данной работе рассматривается модель многослойных схем с одним функциональным слоем. В качестве графов-носителей выступают λ-сепарируемые графы. Доказана нижняя оценка функции Шеннона для сложности данного вида схем $\max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$, где k — число слоев. Для d-мерных графов, которые являются частным случаем λ-сепарируемых графов для $\lambda = \frac{d-1}{d}$, таким образом получена нижняя оценка функции Шеннона $\frac{2^n}{\min(n, d\log k)}$. Для прямоугольных многомерных схем доказанная нижняя оценка асимптотически совпадает с верхней оценкой.

Ключевые слова: многослойные схемы, многомерные схемы, асимптотика функции Шеннона, сложность схем, сепараторы в графах.

1. Введение

Задача синтеза схем, вычисляющих булевы функции и обладающих в некотором смысле оптимальными или субоптимальными характеристиками, возникла в середине XX века в связи с бурным развитием вычислительной техники. С 1950-х гг. одной из наиболее интенсивно исследуемых моделей схем являются схемы из функциональных элементов (СФЭ). Одной из естественных характеристик оптимальности СФЭ является сложность — количество функциональных элементов в схеме. Соответственно, сложность булевой функции можно определить как минимальную сложность схемы, реализующей данную функцию. Маллер в [24] показал, что для любой булевой функции от n переменных порядок ее сложности не превосходит $\frac{2^n}{n}$. Лупанов в [12] доказал, что для почти всех булевых функций от n переменных сложность в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$. Также Лупанов получил асимптотические оценки сложности булевых функций для произвольного конечного базиса.

[1] *Сытдыков Тимур Рашидович* — инженер-программист, Google LLC, e-mail: s7t1r9@gmail.com.

Sitdikov Timur Rashidovich — Software Engineer, Google LLC, e-mail:s7t1r9@gmail.com.

[2] *Калачев Глеб Вячеславович* — к.ф.-м.н., м.н.с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Problems of Theorecical Cybernetics Lab.

На практике, однако, при синтезе схем необходимо учитывать такие моменты, как расположение функциональных элементов в пространстве, разводку проводов и др. В 1960-х гг. появились работы, в которых рассматривались модели схем, в той или иной степени учитывающие эти факторы. Коршунов в [10] получил оценки сложности для случая СФЭ, размещенных в трехмерном пространстве с ограниченными снизу расстояниями между элементами и расстояниями между проводами, а также ограниченными сверху длинами проводов. Кравцов в [11] рассматривал плоские схемы, элементы которых определенным образом размещены в клетках прямоугольной решетки, и получил порядок функции Шеннона 2^n. МакКолл в [22] получил порядок нижней оценки функции Шеннона 2^n для планарных схем.

Модели клеточных схем, аналогичные или идентичные модели Кравцова, рассматривались в ряде более поздних работ. Так, Альбрехт в [1] показал, что асимптотика функции Шеннона для клеточных схем имеет вид $c \cdot 2^n$, где c — некоторая константа, зависящая от базиса. Грибок в [2] получил асимптотику функции Шеннона 2^n для определенного базиса клеточных элементов. Также исследовалась взаимосвязь сложности и других характеристик клеточных схем. Черемисин в [15] показал невозможность реализации дешифратора клеточными схемами с одновременно минимальными по порядку сложностью и мощностью. Калачев в [5, 6, 7, 8, 9] исследовал одновременную минимизацию сложности и других характеристик плоских схем, таких как мощность и глубина. Ефимов в [3, 4] изучал энергопотребление объемных схем.

Одной из наиболее приближенных к практике моделей схем являются VLSI-схемы. В данной модели длина проводов схемы определяет время распространения сигнала между функциональными элементами. VLSI-схемы рассматривались в ряде работ (Томпсон [27], Ульман [28]). Крамер и ван Льювен [20] исследовали одновременную минимизацию сложности и времени работы VLSI-схем.

Еще одним направлением исследований является взаимосвязь между характеристиками схем из различных моделей. Сэведж в [25, 26] исследовал связь между VLSI-схемами и планарными схемами. В работе Шкаликовой [16] показана зависимость между площадью плоских схем и объемом трехмерных схем.

Оценки сложности, полученные для перечисленных выше моделей схем, превосходят по порядку оценку Лупанова $\frac{2^n}{n}$ сложности для СФЭ. Одной из причин данного различия является невозможность в условиях пространственных ограничений провести произвольное количество проводов для соединения функциональных элементов. В случае, когда схемы укладываются в граф (например, в прямоугольную решетку), число проводов, которое можно провести между фрагментами графа, естественным образом ограничивается размером реберного сепаратора, разделяющего данные фрагменты.

В данной работе исследуется зависимость функции Шеннона от характеристик сепарируемости графа, в который укладываются схемы. Рассматриваются схемы с ограничениями на укладку из работы [13]:

- В каждую вершину графа может быть уложено не более одного нетождественного функционального элемента СФЭ.

- В каждое ребро графа может быть уложено не более k ребер СФЭ.

Основным результатом работы является нижняя оценка функции Шеннона для графов с сепаратором размера $O(p^{\lambda})$, где p — число вершин графа, $0 < \lambda < 1$. Такие графы далее будем называть λ-сепарируемыми. Также будет доказана применимость полученной оценки к схемам, укладываемым в пространство размерности 2 и выше. Для прямоугольных многомерных схем с учетом полученной в [13] верхней оценки функции Шеннона будет доказана асимптотика указанной функции.

2. Основные определения и полученные результаты

2.1. Многослойные схемы

Модель многослойных схем с одним функциональным слоем рассматривалась в работе [13]. Кратко приведем основные определения.

Согласно [14, с. 148], схема из функциональных элементов (далее СФЭ) в базисе $B \subseteq P_2$ представляет собой размеченный ациклический ориентированный граф. Разметка вершин определяет, какие вершины являются входными или выходными, и всем вершинам, не являющимся входными, сопоставляет булевы функции из базиса B. Ребра СФЭ помечены натуральными числами, и разметка входных ребер вершины определяет порядок аргументов в функции, реализуемой данной вершиной.

Носителем будем называть произвольный непустой граф с конечным или счетным числом вершин. В общем случае носитель может иметь кратные ребра и петли.

Укладкой СФЭ S на носитель T будем называть произвольный гомоморфизм $h\colon S \to T$.

Схемой с носителем T будем называть пару (S, h), где S — схема из функциональных элементов, h — укладка S на T. Для краткости будем говорить «схема» вместо «схема с носителем» в тех случаях, когда это не приведет к разночтениям. Будем говорить, что схема (S, h) *реализует* булеву функцию или булев оператор f, если СФЭ S реализует f.

С практической точки зрения данные определения можно трактовать следующим образом. Одной из задач синтеза СБИС является укладка (т. е. размещение) логических элементов и проводов схемы на плату, которую в некотором приближении можно считать графом — носителем схемы.

Обычно в задачах синтеза схем имеются те или иные ограничения на укладку. В данной работе будут рассматриваться следующие ограничения:

Ограничение 1. В каждую вершину носителя может быть уложено не более одного функционального элемента СФЭ, реализующего нетождественную булеву функцию.

Ограничение 2. В каждое ребро носителя может быть уложено не более k ребер СФЭ.

Данные ограничения можно толковать следующим образом: схема состоит из k «слоев», при этом лишь один из слоев является «функциональным» (т. е. может содержать нетождественные функциональные элементы). Остальные слои используются только для разводки проводов. Поэтому схемы, соответствующие ограничениям 1 и 2, будем называть *многослойными схемами.*

Обозначим через M_k^T множество всех k-слойных схем с носителем T.

Под *сложностью* многослойной схемы будем понимать количество вершин носителя, использованных при укладке. Если M — множество многослойных схем, f — булева функция, то естественным образом определяется $L(M, f)$ — сложность функции f в множестве M как минимальная сложность многослойной схемы в M, реализующей функцию f. Если таких схем не существует, можно формально считать сложность булевой функции равной бесконечности.

Стандартным образом определяется функция Шеннона сложности многослойных схем:

$$L(M_k^T, n) = \max_{f \in P_2(n)} L(M_k^T, f).$$

2.2. Носители

Свойства носителей играют важную роль при укладке схем, поскольку при одних и тех же ограничениях разные носители допускают, вообще говоря, совершенно различные укладки. В данной работе в качестве носителей будут рассматриваться λ-сепарируемые графы. Как важный частный случай λ-сепарируемых носителей будут также рассмотрены d-мерные графы.

Далее под *монотонным классом графов* будем понимать любое множество графов $\mathcal{G}$, замкнутое относительно операции «взятия подграфа». Очевидно, множество конечных подграфов любого носителя является монотонным классом графов.

2.2.1. Классы графов $\mathcal{G}(q,\theta)$ и $\mathcal{G}(\lambda,q,\theta)$

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $\theta > 1$ — некоторые константы. Определим класс графов $\mathcal{G}(q,\theta)$ как множество всех носителей T, обладающих следующими свойствами:

- Степень всех вершин T ограничена некотором числом q.
- Для любого целого p число различных с точностью до изоморфизма подграфов T с p вершинами не превосходит θ^p.

С точки зрения укладки схем ограниченность степени вершин графов является в некотором смысле «естественным» ограничением. Что касается второго условия, то оно выполнено для достаточно важных категорий графов — например, для планарных графов [17] и для d-мерных графов, которые будут определены ниже.

Формальное определение λ-сепарируемости будет приведено в разделе 3. С содержательной точки зрения в λ-сепарируемом носителе любой подграф с p вершинами может быть разбит на меньшие фрагменты сопоставимого размера удалением $O(p^\lambda)$ вершин (ребер), где $0 < \lambda < 1$.

Подкласс λ-сепарируемых носителей из класса $\mathcal{G}(q,\theta)$ обозначим через $\mathcal{G}(\lambda,q,\theta)$.

2.2.2. d-мерные графы

Пусть $d \geq 2$ — целое число, T — некоторый носитель. Будем говорить, что T является *d-мерным графом*, если существуют константы $c_v > 0, c_e > 0$ такие, что T можно уложить в d-мерное евклидово пространство так, что расстояние между любыми двумя вершинами будет не меньше c_v и длина любого ребра будет не больше c_e.

Замечание 1. Ограничения, использованные в данном определении, схожи с ограничениями в определении схем из объемных функциональных элементов из работы Коршунова [10].

Замечание 2. Легко видеть, что одну из констант c_v и c_e всегда можно считать равной 1. В дальнейшем будем предполагать, что $c_v = 1$.

Замечание 3. Ясно, что любой конечный носитель является d-мерным графом с достаточно большим c_e, поэтому для конечных носителей данное определение не имеет смысла. Однако, можно определить *монотонный класс d-мерных графов с параметром* c_e, в котором константа c_e — общая для всех графов класса. Легко видеть, что данное множество графов будет замкнуто относительно операции взятия подграфа. Далее будем опускать константу c_e, говоря о *классе d-мерных графов* в тех случаях, когда численное значение константы c_e не будет играть существенной роли.

Пример 1. Граф d-мерной целочисленной решетки является d-мерным графом. Достаточно положить $c_e = 1$.

Пример 2. Можно показать, что граф бесконечного полного бинарного дерева не является d-мерным ни для какого d. В самом деле, количество вершин, находящихся на расстоянии p от корня дерева, экспоненциально зависит от p, однако количество шаров диаметра 1, которые можно уложить в d-мерном шаре радиуса $c_e \cdot p$, равняется $O(p^d)$.

Укладка схем в d-мерную целочисленную решетку рассматривалась в работе [13]. Как и в указанной работе, будем называть такие схемы *прямоугольными многомерными схемами* и использовать сокращение M_k^d вместо $M_k^{\mathbb{Z}^d}$.

В разделе 5 будет доказано, что все d-мерные носители принадлежат классам $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ.

2.3. Прочие обозначения и соглашения

Выражение $\log a$ всюду будет обозначать двоичный логарифм a. Будем формально считать, что $x \log x = 0$ при $x = 0$.

Будем использовать обозначение $P_2(n, m)$ для множества всех булевых операторов с n входами и m выходами ($n \geq 0$, $m \geq 1$).

Запись $f(x) \lesssim g(x)$ будет обозначать соотношение $\overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$. Аналогично будет использоваться обозначение $f(x) \gtrsim g(x)$. В случае зависимости от нескольких параметров возможно использование сложного условия предельного перехода: например, $f(n, k) \lesssim g(n, k)$ при $k \to \infty$, $\log k \leq n$.

2.4. Полученные результаты

В данной работе для произвольного носителя $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ будет доказано, что

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Также будет доказано, что произвольный d-мерный носитель принадлежит классу $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ. Следовательно, для d-мерных носителей будет верна нижняя оценка

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)} \quad \text{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Для прямоугольных многомерных схем в работе [13] была получена верхняя оценка функции Шеннона, совпадающая с вышеприведенной нижней оценкой. Таким образом, для данного вида схем будет получена асимптотика сложности:

$$L(M_k^d, n) \sim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)} \quad \text{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

2.5. План работы

С организационной точки зрения доказательная часть данной работы разбита на три раздела.

В разделе 3 приведены общие определения, связанные с сепараторами в графах. Основным результатом указанного раздела является лемма 2. Неформально смысл указанной леммы заключается в том, что λ-сепарируемые графы, допускающие в некотором смысле «хорошее» разбиение на две части, допускают и «хорошее» разбиение на много частей.

В разделе 4 доказывается нижняя оценка функции Шеннона для носителей из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Ключевую роль будет играть лемма 7, из которой следует собственно теорема о нижней оценке.

В разделе 5 доказывается нижняя оценка функции Шеннона для d-мерных носителей и асимптотика для прямоугольных многомерных схем. Фактически будет доказано, что произвольный d-мерный носитель принадлежит классу $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ.

3. Сепараторы в графах и их свойства

3.1. Определения и простейшие свойства сепараторов

В данном разделе будут даны определения вершинных и реберных сепараторов в графах и доказаны некоторые простейшие свойства сепараторов.

Реберные сепараторы. Будем вводить терминологию о реберных сепараторах аналогично терминологии о вершинных сепараторах из [21].

Определение 1. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Назовем монотонный класс графов $\mathcal{G}$ *реберно $f(p)$-сепарируемым*, если существуют такие константы $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, $\beta \ge 0$, $m \ge 2$, что любой граф класса G, содержащий p вершин, где $p \ge m$, можно разбить на два непересекающихся порожденных подграфа, соединенных не более чем $\beta f(p)$ ребрами, при этом количество вершин обоих подграфов не превосходит αp.

Замечание 4. Константа m важна с технической точки зрения, поскольку позволяет не рассматривать некоторые вырожденные случаи. Например, граф K_1 с одной вершиной невозможно разбить на два непустых подграфа в принципе, поэтому можно всегда считать, что $m \ge 2$. В общем случае m может быть больше 2.

Определение 2. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, T — некоторый носитель. Назовем носитель T *реберно $f(p)$-сепарируемым*, если монотонный класс всех конечных подграфов T является реберно $f(p)$-сепарируемым.

Ясно, что интерес представляет случай, когда $f(p)$ — медленно растущая функция. По сути, это позволит применять технику разделяй-и-властвуй для получения эффективных алгоритмов и нетривиальных нижних оценок в доказательствах. В данной работе в качестве функции $f(p)$ рассматривается p^λ, где $0 < \lambda < 1$. Реберно p^λ-сепарируемые носители и монотонные классы графов для удобства будем называть *реберно λ-сепарируемыми*.

Вершинные сепараторы. Следующее определение представляет собой модификацию определения 2.1 вершинного сепаратора для графа из [23] применительно к монотонным классам графов.

Определение 3. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Назовем монотонный класс графов $\mathcal{G}$ *вершинно $f(p)$-сепарируемым*, если существуют такие константы $\frac{1}{2} \le \alpha < 1, \beta \ge 0, m \ge 1$, что для любого графа класса G, содержащего p вершин, где $p \ge m$, множество вершин $V(G)$ можно разбить на три непересекающиеся части A, B, C так, что будут выполнены три условия:

- Не существует ребер из A в B.
- $|A|, |B| \le \alpha p$.
- $|C| \le \beta f(p)$.

Очевидно, что из реберной $f(p)$-сепарируемости любого монотонного класса графов будет следовать вершинная $f(p)$-сепарируемость, так как в качестве вершинного сепаратора достаточно использовать концы ребер из реберного сепаратора. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, множество звезд (графов $K_{1,n}$) и их подграфов является вершинно 1-сепарируемым, но не является реберно 1-сепарируемым.

Следующее простое утверждение показывает, что для монотонных классов графов с ограниченной степенью вершин из вершинной сепарируемости следует реберная.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{G}$ — монотонный класс вершинно $f(p)$-сепарируемых графов с ограниченной числом q степенью вершин и параметрами α, β и m. Тогда $\mathcal{G}$ является реберно $f(p)$-сепарируемым с параметрами $\max\left(\frac{2}{3}, \alpha\right)$, $q\beta$ и $\max(m, 2)$.*

Доказательство. Покажем, как для произвольного графа класса получить реберный сепаратор из вершинного.

Пусть $G \in \mathcal{G}$, $|V(G)| = p \geq \max(m, 2)$. По определению вершинной сепарируемости, вершины G можно разбить на три множества A, B, C, где C — сепаратор. При этом $|A|, |B| \leq \alpha p, |C| \leq \beta f(p)$.

Дополним множества A и B вершинами из C до множеств A' и B' соответственно так, что мощности A' и B' были как можно ближе друг к другу. При таком методе дополнения A и B до A' и B' получим, что $1 \leq |A'|, |B'| \leq \max\left(\frac{2}{3}, \alpha\right) \cdot p$.

Далее, каждое ребро, соединяющее A' и B', в изначальном разбиении было смежно хотя бы с одной вершиной из C. В силу того, что степени вершин G ограничены числом q, общее число таких ребер не будет превосходить величины $q|C| \leq q\beta f(p)$.

Поскольку величины $\max\left(\frac{2}{3}, \alpha\right)$, $q\beta$ и $\max(m, 2)$ не зависят от графа, реберная $f(p)$-сепарируемость монотонного класса $\mathcal{G}$ доказана. $\square$

Таким образом, в определении класса носителей $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ не важно, о какой именно λ-сепарируемости идет речь (реберной или вершинной), поскольку степени вершин графов из данного класса ограничены числом q.

3.2. Разбиение λ-сепарируемых графов

Неформально, основным результатом данного раздела является следующее утверждение: если λ-сепарируемый граф можно разбить на две несвязанные части сопоставимого размера, удалив малое число ребер, то данный граф можно разбить на множество небольших несвязанных частей ограниченного размера, также удалив малое число ребер.

Следующая лемма представляет собой модификацию леммы 1 из [18] для планарных графов.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{G}$ — монотонный класс реберно λ-сепарируемых графов с параметрами α, β и m, где $0 < \lambda < 1$, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, $m \geq 2$. Тогда для любого $r \geq m-1$, для любого графа $G \in \mathcal{G}$ с p вершинами существует разбиение G на подграфы такое, что*

- *Число вершин каждого подграфа не превосходит r.*
- *Общее число ребер, соединяющих различные подграфы, не превосходит $\frac{\delta p r^\lambda}{r}$, где δ — константа, общая для всех графов класса и всех r.*

Будем называть полученное разбиение графа r^λ-*разбиением.*

Доказательство. По сути лемма доказывается аналогично лемме 1 из [18]. Приведем детальную версию доказательства для полноты картины.

Пусть $r \geq m-1$, $G \in \mathcal{G}$, $|V(G)| = p$. Если $p \leq r$, то тривиальное разбиение из одного графа G будет r^λ-разбиением, что доказывает лемму.

Пусть $p > r$. По определению реберной λ-сепарируемости, граф G можно разбить на две части A и B так, что количество ребер, соединяющих A и B, не превосходит βp^λ, при этом $|A| \leq \alpha p$, $|B| \leq \alpha p$. Рассмотрим соответствующие A и B порожденные подграфы G. Поскольку данные подграфы также принадлежат классу $\mathcal{G}$, к ним возможно применить аналогичное разбиение на две части. Будем рекурсивно разбивать полученные подграфы на части, пока не получим все подграфы с числом вершин, не превосходящим r.

Покажем, что полученное разбиение является r^λ-разбиением.

Ограничение на число вершин в подграфах разбиения (не больше r вершин в каждом подграфе) выполнено по построению.

Пусть X — общее количество ребер, удаленных при разбиении графа. Докажем ограничение сверху на X. Разобьем все подграфы, которые разбивались на каком-либо шаге разбиения, на множества $\mathcal{G}_i$ в зависимости от размера. В множество $\mathcal{G}_1$ включим подграфы с размерами из полуинтервала $(r, r\alpha^{-1}]$, в $\mathcal{G}_2$ — из полуинтервала $(r\alpha^{-1}, r\alpha^{-2}]$, и так далее. Если $t = \lceil \log_\alpha \frac{r}{p} \rceil$, то последнее множество $\mathcal{G}_t$ будет содержать подграфы с размерами из полуинтервала $(r\alpha^{-(t-1)}, r\alpha^{-t}]$.

Пусть $1 \leq i \leq t$. Рассмотрим множество $\mathcal{G}_i$. Заметим, что множества вершин подграфов из $\mathcal{G}_i$ не пересекаются, поскольку отношение размеров таких подграфов меньше α. Следовательно, сумма размеров всех подграфов из $\mathcal{G}_i$ не превосходит p, откуда $|\mathcal{G}_i| \leq \frac{p}{r} \cdot \alpha^{i-1}$. При этом количество ребер, удаленных при разбиении любого подграфа из $\mathcal{G}_i$, не превосходит величины $\beta(r/\alpha^i)^\lambda$.

Суммируя по всем подграфам из всех множеств $\mathcal{G}_i$, получим

$$X \le \beta \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha^{i-1} p}{r} \left(\frac{r}{\alpha^i}\right)^\lambda \le \frac{\beta}{\alpha^\lambda(1-\alpha^{1-\lambda})} \cdot \frac{pr^\lambda}{r},$$

что соответствует ограничению на количество ребер для r^λ-разбиения. □

Далее будем использовать следующее вспомогательное обозначение. Пусть $M, S > 0$. Обозначим через $K(M,S)$ множество кортежей $\bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^t$, удовлетворяющих условиям

$$1 \le x_i \le M, \qquad \sum_{i=1}^{t} x_i \le S. \tag{1}$$

Если $\mathcal{G}$ — λ-сепарируемый монотонный класс графов с ограниченной числом q степенью вершин, то свойства r^λ-разбиения можно переформулировать следующим образом. Пусть $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$ — кортеж размеров подграфов r^λ-разбиения, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ — кортеж количеств ребер, соединяющих подграфы r^λ-разбиения с остальной частью графа. Тогда

$$\bar{p} \in K(r,p), \qquad \bar{s} \in K\left(qr, \frac{\delta p r^\lambda}{r}\right). \tag{2}$$

4. Нижняя оценка для λ-сепарируемых носителей

В данном разделе доказывается ключевое утверждение работы — теорема о нижней оценке для произвольного носителя из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$:

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right).$$

Заметим, что доказанная оценка зависит только от функции сепарируемости, параметры q и θ на данную оценку не влияют.

С содержательной точки зрения доказательство будет получено следующим образом. Подграфы носителя разбиваются на небольшие фрагменты. Затем число булевых функций, допускающих реализацию в подграфах, будет оцениваться через число булевых операторов, которые могут быть реализованы во фрагментах, и число способов провести провода между фрагментами.

Поскольку доказательство достаточно громоздкое с технической точки зрения, предварительно будет доказано несколько вспомогательных лемм, которые будут выделены в отдельный раздел 4.1. Доказательство основной теоремы будет завершено в разделе 4.2.

4.1. Вспомогательные леммы

Следующее утверждение непосредственно следует из классической леммы, доказанной в [14].

Лемма 3 ([14], с. 198–200)**.** *Пусть $N(n,m,L)$ — число различных булевых операторов с не более n входами и не более m выходами, реализуемых СФЭ с не более чем L функциональными элементами. Тогда существует такая постоянная c, что*

$$N(n,m,L) \le \bigl(c(n+L)\bigr)^{n+m+L}.$$

Далее при выводе нижней оценки будет использоваться r^λ-разбиение подграфов носителя. Рассмотренная ниже техническая лемма 4 служит для упрощения оценки количества булевых операторов, реализуемых подграфами r^λ-разбиения.

Если p и s — целые положительные числа, будем обозначать через $Z(p,s)$ число булевых операторов с не более чем s входами и выходами в сумме, реализуемых СФЭ с не более чем p функциональными элементами.

Ранее было введено вспомогательное обозначение $K(M,S)$ для множества кортежей, удовлетворяющих условиям (1). В доказательстве леммы 4 нам поможет следующее простое свойство:

$$\text{Если} \quad \bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^t \in K(M,S), \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^t x_i \log x_i \le S \log M. \tag{3}$$

Также при доказательстве леммы 4 будет использоваться неравенство для неотрицательных x и y

$$(x+y)\log(x+y) \le x\log x + y\log y + x + y, \tag{4}$$

которое с учетом соглашения $0\log 0 = 0$ следует из оценки двоичной энтропии $-a\log a - (1-a)\log(1-a) \le 1$ при $a = \frac{x}{x+y}$.

Лемма 4. *Пусть $q \ge 1$, $b \ge 0$ и $d > 0$ — константы, k — параметр. Пусть $k \to \infty$. Обозначим $r = (k\log k)^d$. Пусть L, M — числа, $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ и $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^t$ — произвольная тройка кортежей, удовлетворяющая условиям:*

$$\bar{p} \in K(r,L), \qquad \bar{s} \in K\left(qkr, \frac{bL}{\log k}\right), \qquad u_i \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^t u_i \le M. \tag{5}$$

Тогда будет верно соотношение

$$\sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i+u_i) \le d\left(1+O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right)L\log k + M\log M + O(M). \tag{6}$$

Доказательство. Применяя лемму 3, имеем

$$Z(p_i, s_i + u_i) \le \big(c(p_i + s_i + u_i)\big)^{p_i+s_i+u_i}.$$

Логарифмируя и суммируя по всем элементам кортежей, получим

$$\sum_{i=1}^{t} \log Z(p_i, s_i + u_i) \le \sum_{i=1}^{t} (p_i + s_i + u_i)(\log c + \log(p_i + s_i + u_i)). \qquad (7)$$

Дважды применяя (4), затем (3) с учетом (5), оценим правую часть (7):

$$\sum_{i=1}^{t} (p_i + s_i + u_i)(\log c + \log(p_i + s_i + u_i)) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{t} (p_i \log p_i + s_i \log s_i + u_i \log u_i + (p_i + s_i + u_i)(\log c + 2)) \le$$

$$\le L \log r + \frac{bL}{\log k} \underbrace{\log(qkr)}_{O(\log k)} + M \log M + \underbrace{(\log c + 2) \left(L + \frac{bL}{\log k} + M \right)}_{O(L+M)} =$$

$$= L \log r + M \log M + O(L + M).$$

Подставляя полученную оценку в (7), получим

$$\sum_{i=1}^{t} \log Z(p_i, s_i + u_i) \le L \log r + M \log M + O(L + M) =$$

$$= Ld(\log k + \log\log k) + M \log M + O(L + M) =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right) Ld \log k + M \log M + O(M).$$

□

Следующие две леммы позволяют получить тривиальную нижнюю оценку функции Шеннона для схем с произвольным носителем.

Лемма 5 ([14], теорема 11.5)**.** *Для любой постоянной $\varepsilon > 0$ доля n-местных булевых функций f, для которых*

$$L(f) \ge (1 - \varepsilon)\frac{2^n}{n},$$

стремится к единице при $n \to \infty$.

Лемма 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$, T — произвольный носитель. Тогда*

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 5 и того факта, что сложность любой многослойной схемы не меньше сложности соответствующей СФЭ. □

4.2. Теорема о нижней оценке

В данном разделе будет завершено доказательство нижней асимптотической оценки величины $L(M_k^T, n)$, где T — произвольный носитель из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Также будет доказано следствие, позволяющее получить нижнюю оценку для носителей с функцией сепарируемости более общего вида — например, $\log p$, $\sqrt{p}\log\log p$ и др.

Лемма 7. *Пусть $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Пусть $N_k^T(n, m, L)$ — число булевых операторов с n входами и m выходами, реализуемых k-слойными схемами в T сложности не более L. Тогда при $k \to \infty$ будет выполнено*

$$\log N_k^T(n, m, L) \le \frac{L\log k}{1-\lambda}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right) + \\ + (n+m)\big(\log L + \log(n+m)\big) + O(n+m).$$

Доказательство. Обозначим $r = (k\log k)^{\frac{1}{1-\lambda}}$. Будем рассматривать достаточно большие k, при которых для указанного r выполнены условия леммы 2 и каждый конечный подграф G носителя T имеет r^λ-разбиение, которое будем обозначать $P(G)$.

Каждой k-слойной схеме сложности не более L, вычисляющей булев оператор из $P_2(n, m)$, можно сопоставить следующий набор объектов:

1) Подграф G носителя, в который уложена реализующая оператор СФЭ.

2) Кортеж $\bar{v}$ вершин G, в которые уложены входы и выходы СФЭ.

3) Набор ориентированных проводов между различными подграфами разбиения $P(G)$.

4) Набор булевых операторов, вычисляемых в подграфах разбиения $P(G)$.

Нетрудно видеть, что схемам, вычисляющим различные операторы, будут соответствовать разные наборы объектов. Таким образом, число различных булевых операторов оценивается сверху как число способов задать описанные наборы объектов. Очевидно, достаточно оценить число вариантов для каждого элемента набора и перемножить результаты.

Обозначим соответствующие числа вариантов как A_1, A_2, A_3, A_4 (где соответствие определяется вышеприведенной нумерацией).

Поскольку $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$, имеем

$$A_1 \le \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^L \le \frac{\theta^{L+1}}{\theta - 1}.$$

Оценим A_2. Очевидно, существует не более L^{n+m} кортежей из $n+m$ вершин носителя. Поэтому $A_2 \le L^{n+m}$.

Далее, число ребер между подграфами r^λ-разбиения ограничено величиной $\frac{\delta L r^\lambda}{r} = \frac{\delta L}{k \log k}$, где δ — константа. В каждом из данных ребер может быть проведено до k проводов. Таким образом, между различными подграфами r^λ-разбиения может быть проведено не более $\frac{\delta L}{\log k}$ проводов. Наконец, для каждого провода возможны три варианта: ориентирован в одну сторону, ориентирован в другую сторону и отсутствует. Следовательно,

$$A_3 \le 3^{\frac{\delta L}{\log k}}.$$

Для получения оценки на A_4 введем следующие обозначения. Пусть G_i — подграфы разбиения $P(G)$, t — число таких подграфов, p_i — число вершин i-го подграфа, s_i — число проводов, которые можно провести из i-го подграфа вовне, u_i — суммарное число входов и выходов схемы, размещенных в i-м подграфе (т. е. количество элементов кортежа $\bar{v}$, соответствующих вершинам из G_i). Ясно, что каждый булев оператор, вычисляемый подграфом G_i, будет иметь не более p_i функциональных элементов и не более $s_i + u_i$ входов и выходов в сумме. Следовательно, верно соотношение

$$A_4 \le \prod_{i=1}^{t} Z(p_i, s_i + u_i).$$

Перемножая оценки для A_i, получим соотношение

$$N_k^T(n, m, L) \le \frac{\theta^{L+1}}{\theta - 1} \cdot L^{n+m} \cdot 3^{\frac{\delta L}{\log k}} \cdot \prod_{i=1}^{t} Z(p_i, s_i + u_i).$$

Логарифмируя и отбрасывая отрицательное слагаемое, при $k \to \infty$ получим

$$\log N_k^T(n, m, L) \le \underbrace{(L+1)\log\theta}_{O(L)} + (n+m)\log L +$$
$$+ \underbrace{\frac{\delta L}{\log k}\log 3}_{o(L)} + \sum_{i=1}^{t} \log Z(p_i, s_i + u_i). \qquad (8)$$

Оценим сумму $\sum_{i=1}^{t} \log Z(p_i, s_i + u_i)$ в правой части неравенства (8). Покажем, что для оценки данной суммы применима лемма 4.

Применяя соотношения (2), для кортежей $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ получим $\bar{p} \in K(r, L)$, $\bar{s} \in K\left(qkr, \frac{\delta L}{\log k}\right)$. Для кортежа $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^t$ очевидным образом выполнено $u_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^t u_i \leq n + m$. Наконец, по условию леммы $q \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\frac{1}{1-\lambda} > 0$, $k \to \infty$ и $r = (k \log k)^{\frac{1}{1-\lambda}}$. Таким образом, все условия леммы 4 выполнены. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i) \leq \frac{L \log k}{1-\lambda}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right) + \\ + (n+m)\log(n+m) + O(n+m).$$

Объединяя оценки для слагаемых в правой части неравенства (8), получим

$$\log N_k^T(n, m, L) \leq \frac{L \log k}{1-\lambda}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right) + \\ + (n+m)\big(\log L + \log(n+m)\big) + O(n+m).$$

□

В данной работе интерес представляет случай, когда $n + m$ мало по сравнению с L. В этом случае утверждение леммы 7 можно упростить.

Следствие 1. *В условиях леммы 7 при $k \to \infty$, $n+m \leq L/\log L$ выполнено*

$$\log N_k^T(n, m, L) \leq \frac{L \log k}{1-\lambda}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right).$$

Лемма 8. *Пусть $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$, $k \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда будет выполнено*

$$L(M_k^T, n) \geq \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right).$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что при достаточно больших n для любого k будет выполнено

$$L(M_k^T, n) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}. \tag{9}$$

Пусть $k \to \infty$, $n \to \infty$. Обозначим для краткости $L = L(M_k^T, n)$. Используя определенную в лемме 7 величину $N_k^T(n, m, L)$, запишем тождество

$$N_k^T(n, 1, L) = 2^{2^n}.$$

Из (9) следует, что $n = O(\log L) = o(L/\log L)$. Применяя следствие 1 леммы 7, получим

$$2^n \leq \frac{L\log k}{1-\lambda}\left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right),$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. *Тогда*

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right) \quad \textit{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Непосредственно следует из лемм 6 и 8. $\square$

Таким образом, получена нижняя оценка для λ-сепарируемых носителей, т. е. для носителей с функцией сепарируемости вида p^λ. Используя данную теорему, нетрудно вывести нижнюю оценку для носителей с функцией сепарируемости вида $\log p$, $\sqrt{p}\log\log p$ и др.

Следствие 2. *Пусть* $0 \leq \lambda_0 < 1$, $f(p) = O(p^\lambda)$ *для всех* $\lambda > \lambda_0$, $T \in \mathcal{G}(q, \theta)$ — *произвольный* $f(p)$*-сепарируемый носитель. Тогда*

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda_0)}{\log k}\right) \quad \textit{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\lambda > \lambda_0$. Очевидно, T является p^λ-сепарируемым носителем. Из теоремы 1 следует, что $L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ при $k \to \infty$, $n \to \infty$.

Введем обозначение $g(\lambda, k, n) = \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$. Имеем

$$\liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda, k, n)} \geq 1 \quad \text{при} \quad \lambda_0 < \lambda < 1.$$

Легко видеть, что $\frac{g(\lambda,k,n)}{g(\lambda_0,k,n)} \geq \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0}$, отсюда

$$A := \liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda_0, k, n)} \geq \liminf_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0}\cdot\frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda, k, n)} \geq \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0}$$

для всех $\lambda_0 < \lambda < 1$.

Таким образом, $A \geq \sup\limits_{1>\lambda>\lambda_0} \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0} = 1$, откуда следует (10). $\square$

5. Нижняя оценка для d-мерных схем

В данном разделе будет доказана нижняя оценка для d-мерных схем и асимптотика для прямоугольных d-мерных схем. С содержательной точки зрения нижняя оценка для d-мерных схем будет являться следствием нижней оценки для λ-сепарируемых носителей, поскольку будет доказано, что все d-мерные носители принадлежат классам $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$.

5.1. Свойства d-мерных графов

Фактически требуется доказать, что d-мерные носители обладают тремя свойствами: ограниченность степени вершин, не более чем экспоненциальный рост числа неизоморфных подграфов фиксированного размера, а также λ-сепарируемость.

Лемма 9. *Пусть T — d-мерный носитель (соответственно $\mathcal{G}$ — класс d-мерных графов) с параметром c_e. Тогда степень любой вершины T (соответственно степень любой вершины произвольного графа из $\mathcal{G}$) ограничена числом $(2c_e+1)^d$.*

Доказательство. При размещении произвольного d-мерного графа в d-мерном пространстве окрестность любой вершины окажется в шаре радиуса c_e. Поскольку d-мерные шары радиуса 0.5 с центрами в вершинах графа не пересекаются и целиком лежат в шаре радиуса $c_e+0.5$, то количество таких шаров не может превосходить отношение объемов d-мерных шаров радиуса $c_e + 0.5$ и 0.5 соответственно. Это отношение равняется $(2c_e+1)^d$. □

Лемма 10. *Пусть T — d-мерный граф. Тогда число неразмеченных подграфов T с n вершинами не превосходит величины θ^n, где θ — некоторая константа.*

Доказательство. Непосредственно следует из замечания к лемме 2 из [10]. □

Для доказательства λ-сепарируемости d-мерных графов воспользуемся результатами работы [23]. Введем следующее вспомогательное определение.

Определение 4 ([23], определение 2.3)**.** Пусть $\alpha \geq 1$, и пусть $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ — система замкнутых d-мерных шаров, внутренности которых не пересекаются. *Граф α-пересечений* для B есть неориентированный граф с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, p\}$ и ребрами

$$E = \{\{i,j\}\colon B_i \cap (\alpha \cdot B_j) \neq \varnothing \text{ и } (\alpha \cdot B_i) \cap B_j \neq \varnothing\}$$

где $\alpha \cdot B_j$ обозначает шар с тем же центром, что и B_j, и в α раз большим радиусом.

Следующая лемма показывает связь между d-мерными графами и графами α-пересечений.

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{G}$ — класс d-мерных графов с параметром c_e. Тогда каждый граф из $\mathcal{G}$ можно дополнить некоторым (возможно, нулевым) количеством ребер так, что полученный граф будет графом $2c_e$-пересечений в d-мерном пространстве.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{G}$. По определению d-мерных графов, вершины G можно разместить в d-мерном пространстве так, что расстояние между любыми двумя вершинами будет не меньше 1, при этом любые смежные вершины будут находиться на расстоянии не более c_e.

Рассмотрим G' — граф $2c_e$-пересечений для системы шаров с радиусом 0.5 и центрами в вершинах графа. Поскольку расстояние между центрами шаров не меньше 1, а радиус равен 0.5, внутренности шаров не пересекаются. Далее, если между некоторыми вершинами графа G имелось ребро, то расстояние между центрами соответствующих шаров не превосходит c_e. Следовательно, шары с соответствующими центрами и радиусами 0.5 и $0.5 \cdot 2c_e = c_e$ будут пересекаться. Соответственно, все ребра G являются ребрами G'. □

Лемма 12 ([23], теорема 2.4)**.** *Пусть $d \geq 1$, $\alpha \geq 1$ — константы. Тогда существует функция*

$$f(p) = O\left(\alpha \cdot p^{\frac{d-1}{d}} + c(\alpha, d)\right)$$

такая, что любой граф α-пересечений в d-мерном пространстве будет являться вершинно $f(p)$-сепарируемым. При этом сепаратор будет разделять графы класса для части, число вершин которых не превосходит $\frac{d+1}{d+2}$ от изначального числа вершин.

Фактически лемма утверждает о $\frac{d-1}{d}$-сепарируемости всех графов α-пересечений в d-мерном пространстве.

Замечание 5. В первоисточнике [23] данная лемма была сформулирована несколько иначе. В частности, рассматривался произвольный граф α-пересечений в d-мерном пространстве и утверждалось о его сепарируемости с размером сепаратора, ограниченным $O\left(\alpha \cdot p^{\frac{d-1}{d}} + c(\alpha, d)\right)$. Поскольку функция сепарируемости является общей для всех графов монотонного класса, для упрощения понимания в данной работе формулировка леммы была изменена так, чтобы подчеркнуть независимость функции сепарируемости от выбора графа.

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{G}$ — класс d-мерных графов. Тогда $\mathcal{G}$ является $p^{\frac{d-1}{d}}$-сепарируемым.*

Доказательство. Непосредственно следует из лемм 11 и 12. $\square$

5.2. Оценки функции Шеннона

d-мерные схемы. Используя доказанные в предыдущем разделе свойства d-мерных графов, сформулируем теорему о нижней оценке для d-мерных схем.

Теорема 2. *Пусть T — произвольный d-мерный носитель. Тогда*

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)} \quad \textit{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 1, лемм 9, 10 и следствия 3. $\square$

Прямоугольные многомерные схемы. Прямоугольные многомерные схемы являются частным случаем d-мерных схем, поэтому к ним также применима нижняя оценка из теоремы 2.

В работе [13] для прямоугольных многомерных схем была доказана верхняя оценка функции Шеннона.

Лемма 13 ([13], теорема 1)**.**

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)} \quad \textit{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

Используя теорему 2 и лемму 13, получим асимптотику функции Шеннона для прямоугольных многомерных схем.

Следствие 4.

$$L(M_k^d, n) \sim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)} \quad \textit{при} \quad k \to \infty,\ n \to \infty.$$

6. Заключение

В данной работе была доказана нижняя оценка функции Шеннона сложности $L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ для произвольного λ-сепарируемого носителя T. Важным частным случаем подобных носителей являются d-мерные графы, для которых таким образом получена нижняя оценка $L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d\log k)}$.

Естественным направлением для развития результатов, полученных в данной работе, является исследование классов графов с функцией сепарируемости, отличной от p^λ. Например, интерес представляют графы, допускающую укладку в гиперболической плоскости. В работе [19] доказано, что подобные графы обладают логарифмической функцией сепарируемости. Следствие 2 теоремы 1 позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона для подобных графов. Однако вопрос о верхней оценке остается открытым.

Список литературы

[1] А. Альбрехт, "О схемах из клеточных элементов", *Проблемы кибернетики*, **33** (1977), 209–214.

[2] С. В. Грибок, "Об одном базисе для схем из клеточных элементов", *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, **4** (1999), 36–39.

[3] А. А. Ефимов, "Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 117–132.

[4] А. А. Ефимов, "Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 105–124.

[5] Г. В. Калачев, "Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции", *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 49–74.

[6] Г. В. Калачев, "Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы", *Интеллектуальные системы*, **20**:2 (2016), 203–266.

[7] Г. В. Калачев, "Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:1 (2017), 28–96.

[8] Г. В. Калачев, "Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:2 (2017), 163–192.

[9] Г. В. Калачев, "О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:1 (2018), 111–117.

[10] А. Д. Коршунов, "Об оценках сложности схем из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов", *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.

[11] С. С. Кравцов, "О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов", *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.

[12] О. Б. Лупанов, "О синтезе некоторых классов управляющих систем", *Проблемы кибернетики*, **10** (1963), 63–97.

[13] Т. Р. Сытдыков, "Сложность синтеза многомерных клеточных схем", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:3 (2019), 61–80.

[14] А. В. Чашкин, *Дискретная математика*, Академия, Москва, 2012, 352 с.

[15] О. В. Черемисин, “Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций”, *Дискретная математика*, **15**:2 (2003), 113–122.

[16] Н. А. Шкаликова, “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики.* Т. 2, Наука, Москва, 1989, 177–197.

[17] N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Poulalhon, G. Schaeffer, “Planar Graphs, via Well-Orderly Maps and Trees”, *Graphs and Combinatorics*, **22** (2006), 185–202.

[18] G. N. Frederickson, “Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications”, *SIAM Journal on Computing*, **16**:6 (1987), 1004–1022.

[19] S. Kisfaludi-Bak, “Hyperbolic Intersection Graphs and (Quasi)-Polynomial Time”, *Proceedings of the Thirty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA ’20, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Utah, Salt Lake City, 2020, 1621–1638.

[20] M. R. Kramer, J. van Leeuwen, “The VLSI complexity of Boolean functions”, *Logic and Machines: Decision Problems and Complexity*, eds. Börger E., Hasenjaeger G., Rödding D., Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 397–407.

[21] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, “A separator theorem for planar graphs”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **36**:2 (1979), 177–189.

[22] W. F. McColl, “Planar circuits have short specifications”, *2nd STACS. Lecture Notes in Computer Science*, **182** (1985), 231–242.

[23] G. L. Miller, S. Teng, W. Thurston, S. A. Vavasis, “Geometric separators for finite-element meshes”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19**:2 (1998), 364–386.

[24] D. E. Muller, “Complexity in Electronic Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**:1 (1956), 15–19.

[25] J. E. Savage, “Planar Circuit Complexity and The Performance of VLSI Algorithms”, *VLSI Systems and Computations*, eds. Kung H.T., Sproull B., Steele G., Springer, Berlin, Heidelberg, 1981, 61–68.

[26] J. E. Savage, “The performance of multilective VLSI algorithms”, *Journal of Computer and System Sciences*, **29**:2 (1984), 243–273.

[27] C. D. Thompson, “Area-Time Complexity for VLSI”, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’79, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1979, 81–88.

[28] J. D. Ullman, *Computational Aspects of VLSI*, W. H. Freeman & Co, USA, 1984.

The complexity of multilayer d-dimensional circuits

Sitdikov T. R., Kalachev G. V.

In this paper we research a model of multilayer circuits with a single logical layer. We consider λ-separable graphs as a support for circuits. We establish the Shannon function lower bound $\max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ for this type of circuits where k is the number of layers. For d-dimensional graphs, which are λ-separable for $\lambda = \frac{d-1}{d}$, this gives the Shannon

function lower bound $\frac{2^n}{\min(n, d\log k)}$. For multidimensional rectangular circuits the proved lower bound asymptotically matches to the upper bound.

Keywords: multilayer circuits, multidimensional circuits, Shannon function asymptotics, circuit complexity, graph separators.

References

[1] A. Albrecht, "On circuits of cellular elements", *Problemi Kibernetiki*, **33** (1978), 209–214 (in Russian).

[2] S. V. Gribok, "On one base for circuits of cellular elements", *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15: Vichislitelnaya matematika i kibernetika*, **4** (1999), 36–39 (in Russian).

[3] A. A. Efimov, "The top assessment of energy consumption in a class of volume schemes", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:1 (2019), 117–132 (in Russian).

[4] A. A. Efimov, "The upper estimate of the volumetric power consumption of the circuits that implement boolean operators.", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:2 (2019), 105–124 (in Russian).

[5] G. V. Kalachev, "Order of power of planar circuits implementing Boolean functions", *Discrete Mathematics*, **26**:1 (2014), 49–74 (in Russian); English translation in *Discrete Mathematics and Applications*, **24**:4 (2014), 185–205.

[6] G. V. Kalachev, "On the simultaneous minimization of area, power and depth of planar circuits computing partial Boolean operators", *Intelligent Systems*, **20**:2 (2016), 203–266 (in Russian).

[7] G. V. Kalachev, "Bounds on power of planar circuits computing functions with limited number of ones", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **21**:1 (2017), 28–96 (in Russian).

[8] G. V. Kalachev, "Bounds on power of planar circuits computing monotone functions", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **21**:2 (2017), 163–192 (in Russian).

[9] G. V. Kalachev, "On the lower bound for the maximum potential of plain circuits with several outputs through the area", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22**:1 (2018), 111–117 (in Russian).

[10] A. D. Korshunov, "On the complexity bounds of circuits of volumetric elements and volumetric Boolean circuits", *Problemi Kibernetiki*, **19** (1967), 275–283 (in Russian).

[11] S. S. Kravtsov, "On the realization of Boolean functions in one class of logic elements and connectors", *Problemi Kibernetiki*, **19** (1967), 285–293 (in Russian).

[12] O. B. Lupanov, "On the synthesis of some classes of control systems", *Problemi Kibernetiki*, **10** (1963), 63–97 (in Russian).

[13] T. R. Sitdikov, "The complexity of multidimensional rectangular circuits design", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:3 (2019), 61–80 (in Russian).

[14] A. V. Chashkin, *Discrete Mathematics*, Akademiya, Moscow, 2012 (in Russian), 352 pp.

[15] O. V. Cheremisin, "On the activity of cell circuits realising the system of all conjunctions", *Discrete Mathematics*, **15**:2 (2003), 113–122 (in Russian); English translation in *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:2 (2003), 209–219.

[16] N. A. Shkalikova, "On the implementation of Boolean functions by schemes of cellular elements", *Mathematical Problems of Cybernetics.* V. 2, Nauka, Moscow, 1989, 177–197 (in Russian).

[17] N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Poulalhon, G. Schaeffer, "Planar Graphs, via Well-Orderly Maps and Trees", *Graphs and Combinatorics*, **22** (2006), 185–202.

[18] G. N. Frederickson, "Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications", *SIAM Journal on Computing*, **16**:6 (1987), 1004–1022.

[19] S. Kisfaludi-Bak, "Hyperbolic Intersection Graphs and (Quasi)-Polynomial Time", *Proceedings of the Thirty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '20, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Utah, Salt Lake City, 2020, 1621–1638.

[20] M. R. Kramer, J. van Leeuwen, "The VLSI complexity of Boolean functions", *Logic and Machines: Decision Problems and Complexity*, eds. Börger E., Hasenjaeger G., Rödding D., Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 397–407.

[21] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, "A separator theorem for planar graphs", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **36**:2 (1979), 177–189.

[22] W. F. McColl, "Planar circuits have short specifications", *2nd STACS. Lecture Notes in Computer Science*, **182** (1985), 231–242.

[23] G. L. Miller, S. Teng, W. Thurston, S. A. Vavasis, "Geometric separators for finite-element meshes", *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19**:2 (1998), 364–386.

[24] D. E. Muller, "Complexity in Electronic Switching Circuits", *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**:1 (1956), 15–19.

[25] J. E. Savage, "Planar Circuit Complexity and The Performance of VLSI Algorithms", *VLSI Systems and Computations*, eds. Kung H.T., Sproull B., Steele G., Springer, Berlin, Heidelberg, 1981, 61–68.

[26] J. E. Savage, "The performance of multilective VLSI algorithms", *Journal of Computer and System Sciences*, **29**:2 (1984), 243–273.

[27] C. D. Thompson, "Area-Time Complexity for VLSI", *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '79, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1979, 81–88.

[28] J. D. Ullman, *Computational Aspects of VLSI*, W. H. Freeman & Co, USA, 1984.