

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Международная Академия Технологических Наук
Российская Академия Естественных Наук

Интеллектуальные Системы.

Теория и приложения

ТОМ 25 ВЫПУСК 2 * 2021

МОСКВА

УДК 519.95; 007:159.955
ББК 32.81

ISSN 2411-4448

Издается с 1996 г.*

Главный редактор: д.ф.-м.н., профессор В. Б. Кудрявцев

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев (зам. главного редактора)
д.ф.-м.н., проф. Э. Э. Гасанов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов (зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин (ответственный секретарь)
д.ф.-м.н., проф. В. В. Александров, д.ф.-м.н., проф. С. В. Алешин, д.ф.-м.н., проф.
Д. Н. Бабин, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю. Л. Ершов, академик РАН, д.ф.-м.н.,
проф. Ю. И. Журавлев, д.ф.-м.н., проф. В. Н. Козлов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
проф. А. В. Михалев, к.ф.-м.н., проф. В. А. Носов, д.ф.-м.н., проф. А. С. Подколзин,
д.т.н., проф. Д. А. Поспелов, д.ф.-м.н., проф. Ю. П. Пытьев, академик РАН, д.т.н.,
проф. А. С. Сигов, д.ф.-м.н., проф. А. В. Чечкин

Международный научный совет журнала:

С. Н. Васильев (Россия), К. Вашик (Германия), В. В. Величенко (Россия),
А. И. Галушкин (Россия), И. В. Голубятников (Россия), Я. Деметрович (Венгрия), Г.
Килибарда (Сербия), Ж. Кнап (Словения), П. С. Краснощеков (Россия), А. Нозаки
(Япония), В. Н. Редько (Украина), И. Розенберг (Канада), А. П. Рыжов (Россия) —
ученый секретарь совета, А. Саломая (Финляндия), С. Саксида (Словения), Б.
Тальхайм (Германия), Ш. Ушчумлич (Сербия), Фан Дин Зиеу (Вьетнам), А. Шайеб
(Сирия), Р. Шчепанович (США), Г. Циммерман (Германия)

Секретарь редакции: И. О. Бергер

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН, Секции «Информатики и кибернетики» РАЕН.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

ООО «Два Облака»

Разработка корпоративных информационных систем

<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: mail@intsysjournal.org

*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2021.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. Общие проблемы теории интеллектуальных систем

Бергер И.О. Алгоритм перевода конца цепочки в заданную точку в пространстве с метрикой городских кварталов 7

Горный Б.Э., Рыжов А.П., Строгалов А.С., Журавлев А.Д., Хусаинов А.А., Шергин И.А., Феценко Д.А., Абдуллаев А.М., Концевая А.В. Оценка риска неблагоприятного клинического исхода методами углубленного анализа данных 23

Часть 2. Специальные вопросы теории интеллектуальных систем

Коновалов А.Ю. Корректность базисной логики относительно абсолютной L -реализуемости 49

Пантелеев В. И., Тагласов Э. С. ES_I -замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов 55

Тропин А.М. Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества 81

Часть 3. Математические модели

Демидова А.А. Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом 111

Носов М.В. О формульном представлении функции Шеннона 129

Сытдыков Т. Р., Калачев Г. В. Сложность многослойных d -мерных схем . 131

Часовских А.А. Классы линейных p -автоматов с операциями суперпозиции 155

Часть 4. Материалы семинаров кафедры МатИС

Доклады семинара «Вопросы сложности алгоритмов поиска» 159

Часть 1.
Общие проблемы теории
интеллектуальных систем

Алгоритм перевода конца цепочки в заданную точку в пространстве с метрикой городских кварталов

И. О. Бергер¹

В работе рассматривается задача перемещения трехзвенной цепочки с одним закрепленным краем из начального положения в положение, в котором второй край попадает в заданную точку. В качестве начального положения берется положение, при котором все звенья цепочки лежат на оси абсцисс. При этом каждое звено цепи имеет фиксированную длину, но может изгибаться под углом 90 градусов в любой своей точке. В работе предложен алгоритм доставляющий минимум расстояния между начальным и конечным положениями цепочки, причем расстояние измеряется на основе метрики городских кварталов.

Ключевые слова: манхэттенская цепочка, манхэттенское расстояние, алгоритм, метрика городских кварталов.

1. Введение

Управление роботами — один из разделов интеллектуальных систем, активно развивающейся области науки. К этому разделу относятся, в частности, статьи [1], [2], описывающие алгоритм обучения робота-манипулятора, и статья [3], где были рассмотрены цепочки, концы звеньев которых перемещаются по окружности, евклидово расстояние между ними и расстояние Хэмминга. Такую цепочку можно представить как руку робота с n суставами. В статье [3] рассматривался вопрос, как перевести конец такой цепочки в нужную точку с минимальными затратами.

В данной статье при измерении расстояния между цепочками мы будем использовать манхэттенскую метрику, или метрику городских кварталов. Это метрика, в которой расстояние между двумя точками равно сумме модулей разностей их координат. Мы будем рассматривать другой вид цепочек — манхэттенские цепочки, конец которых перемещается по окружности в манхэттенской метрике, выглядящей, как квадрат наклонённый под углом в 45 градусов. Мы рассмотрим три алгоритма перевода конца таких цепочек в заданную точку и для цепочки длины

¹*Бергер Ирина Олеговна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ioberger@ya.ru.

Berger Irina Olegovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

3 со звеньями на оси абсцисс рассмотрим области, на которых эти алгоритмы выдают манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной. Для измерения расстояния между цепочками сложим все манхэттенские расстояния между соответствующими точками цепочек.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Цепочкой $A = A_0A_1\dots A_n$ длины n называется $n + 1$ точек A_0, A_1, \dots, A_n , $A_i \in \mathbb{R}^2, i = 0..n, A_i \neq A_{i+1}, i = 0..n - 1$.

Манхэттенской цепочкой называется цепочка, изображённая на плоскости следующим образом. Для всех $i, i = 0..n - 1$, рассмотрим точки A_i, A_{i+1} . Если отрезок A_iA_{i+1} параллелен оси OX или OY , то изобразим их соединёнными прямой. Если A_iA_{i+1} не параллелен осям координат, то A_i и A_{i+1} соединим линией, состоящей из двух отрезков, один из которых параллелен оси OX , другой — оси OY , как показано на рисунке. Соединим таким образом все соседние точки.

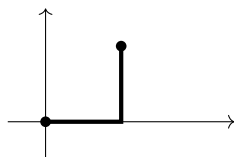


Рис.1: Вид звена манхэттенской цепочки.

Точка A_0 называется *центром манхэттенской цепочки*.

Линия, соединяющая A_i и A_{i+1} для любого $i = 0..n - 1$ называется *звеном*.

Пусть N и M — точки на плоскости. Обозначим через $\rho(N, M) = |x_N - x_M| + |y_N - y_M|$ манхэттенское расстояние между точками N, M .

Обозначим через $d_{i,i+1}^A = \rho(A_i, A_{i+1}), i = 0..n - 1$ *длину звена*.

Скажем, что *манхэттенская цепочка* $B = B_0B_1\dots B_n$ получена из *манхэттенской цепочки* $A = A_0A_1\dots A_n$ *перемещением конца*, если $B_0 = A_0$ и $\rho(A_i, A_{i+1}) = \rho(B_i, B_{i+1}), i = 0..n - 1$.

Обозначим через $\mathfrak{F}(A)$ множество манхэттенских цепочек, получаемых перемещением конца манхэттенской цепочки из A .

Область допустимых положений конца манхэттенской цепочки $A = A_0A_1\dots A_n$ назовём множеством точек $\mathfrak{K}(A) = \{P | P = B_n, B \text{ получена из } A \text{ перемещением конца манхэттенской цепочки}\}$.

Манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $A = A_0A_1\dots A_n$ и $B = B_0B_1\dots B_n$ определяется как $\rho(A, B) = \sum_{i=0}^n \rho(A_i, B_i)$.

Утверждение. Множество манхэттенских цепочек длины n — метрическое пространство с метрикой ρ .

Доказательство. Первые два свойства вытекают из соответствующих свойств для манхэттенской метрики на плоскости. Третье доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(A, C) &= \rho(A_0, C_0) + \rho(A_1, C_1) + \dots + \rho(A_n, C_n) \leq \\ &\leq \rho(A_0, B_0) + \rho(B_0, C_0) + \dots + \rho(A_n, B_n) + \rho(B_n, C_n) = \\ &= \rho(A, B) + \rho(B, C) \end{aligned}$$

Конец доказательства.

Обозначим через (O, d) окружность в манхэттенской метрике, центр которой O и радиус d .

Обозначим через $[O, d]$ круг в манхэттенской метрике, центр которого O и радиус d .

2.1. Область допустимых положений конца манхэттенской цепочки

Утверждение. Пусть $A = A_0A_1\dots A_n$ — манхэттенская цепочка длины n . Область допустимых положений конца манхэттенской цепочки A имеет следующий вид: $\mathfrak{K}(A) = \{P : \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} \leq \rho(P, A_0) \leq d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A\}$

Доказательство.

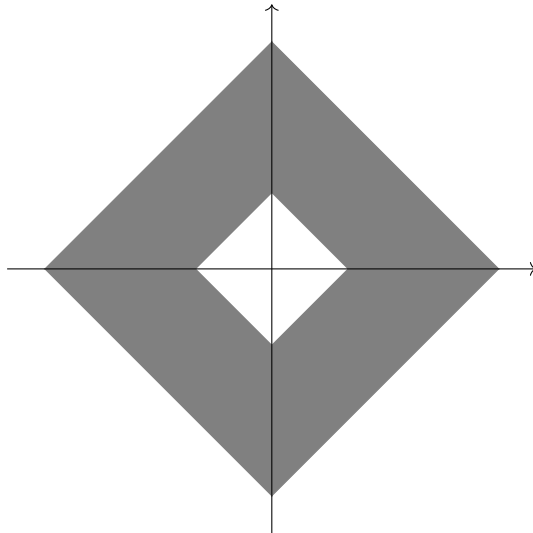


Рис. 2: Область допустимых положений конца цепочки.

Рассмотрим только случай, когда A_0 — центр координат O . Случай, для которых это не выполняется, получаются параллельным переносом.

Воспользуемся индукцией по длине n манхэттенской цепочки. База индукции: при $n = 1$ область допустимых положений конца манхэттенской цепочки OA_1 — манхэттенская окружность с центром в точке O и радиусом $d_{0,1}^A$, то есть множество $\{P : d_{0,1}^A \leq \rho(P, O) \leq d_{0,1}^A\}$, удовлетворяющее условию.

Предположим, мы нашли вид области допустимых положений конца манхэттенской цепочки для $n = k$, и он соответствует множеству, указанному в условии теоремы. Найдём её вид для $n = k + 1$.

Возьмём точку P на плоскости. Построить манхэттенскую цепочку $OA_1 \dots A_{k+1}$ с концом в точке P можно тогда и только тогда, когда манхэттенская окружность $(P, d_{k,k+1}^A)$ пересекает область допустимых положений конца манхэттенской цепочки $OA_1 \dots A_k$. Тогда и только тогда мы можем переместить конец манхэттенской цепочки $OA_1 \dots A_k$ в точку пересечения P_0 и соединить P_0 и P звеном.

Чтобы пересечение не было пустым, точка P должна располагаться на расстоянии, меньшем или равном $d_{k,k+1}^A$ от области допустимых положений конца манхэттенской цепочки $OA_1 \dots A_k$, то есть в области $\{P : \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{k,k+1}^A), 0\} \leq \rho(P, O) \leq d_{0,1}^A + \dots + d_{k,k+1}^A\}$ Конец доказательства.

2.2. Алгоритмы перевода конца манхэттенской цепочки в заданную точку

Алгоритм А1

Пусть нам даны манхэттенская цепочка длины n , $A = OA_1 \dots A_n$, и точка P на плоскости. Чтобы найти манхэттенскую цепочку $OA'_1 \dots A'_{n-1}P$, полученную переводом конца A в точку P , выполним следующую последовательность действий.

Индуктивно определим A'_i при $i = 0..n - 2$. Для $i = 0$ пусть A'_0 — это точка O .

Обозначим через \mathfrak{D}^i пересечение манхэттенской окружности $(A'_{i-1}, d_{i-1,i})$ и манхэттенского круга $[P, \sum_{k=i}^{n-1} d_{k,k+1}]$. Это множество таких точек, в одной из которых должен находиться конец i -ого звена, чтобы искомая манхэттенская цепочка существовала.

Пересечение манхэттенских круга и окружности — это множество, в которое могут входить точки и отрезки.

Возможны несколько случаев:

- Если \mathfrak{D}^i пусто, то искомой манхэттенской цепочки не существует, и алгоритм заканчивает свою работу.

- Если \mathfrak{D}^i представляет собой одну точку, то её и возьмём в качестве A'_i .
- Если \mathfrak{D}^i представляет собой совокупность отрезков, то выбираем на них ближайшую к A_i точку. Для этого рассмотрим концы отрезков и точку, принадлежащую \mathfrak{D}^i , с той же ординатой, что и у A_i , если эта точка есть. Эта точка получается проведением горизонтальной прямой из A_i . Сравниваем расстояния от A_i до этих точек и выбираем минимальное. Это будет точка A'_i .

Мы определили A'_i при $i = 1..n - 2$. Теперь найдём A'_{n-1} .

Пусть \mathfrak{D}^{n-1} — пересечение манхэттенских окружностей $(A'_{n-2}, d_{n-2,n-1})$ и $(P, d_{n-1,n})$.

Для нахождения пересечения попарно проверяем, пересекаются ли отрезки манхэттенских окружностей, и добавляем в ответ точку, если они пересекаются по точке, или пару точек, если они пересекаются по отрезку.

Возможны несколько случаев:

- Если \mathfrak{D}^{n-1} пусто, то искомая цепочка не существует, и алгоритм завершает работу.
- Если \mathfrak{D}^{n-1} — точка, то именно её выберем в качестве A'_{n-1} .
- Если \mathfrak{D}^{n-1} представляет собой две точки, то возьмём ближайшую к A_{n-1} .
- Если \mathfrak{D}^{n-1} — это отрезок или совокупность отрезков, то сравниваем расстояния от A_{n-1} до их концов и до точки \mathfrak{D}^{n-1} с той же ординатой, что и у A_{n-1} . Ближайшую точку выбираем в качестве A'_{n-1} .

Таким образом, мы индуктивно определили манхэттенскую цепочку, полученную из $OA_1A_2..A_n$ перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P .

Алгоритм А2

Пусть нам даны манхэттенская цепочка длины n , $A = OA_1..A_n$, и точка P на плоскости. Рассмотрим другой способ найти манхэттенскую цепочку $OA'_1..A'_{n-1}P$, полученную переводом конца A в точку P .

Индуктивно определим A'_i при $i = n..2$. Пусть при $i = n$ A'_n — это точка P .

Обозначим через \mathfrak{D}^i пересечение манхэттенской окружности $(A'_{i+1}, d_{i,i+1})$ и манхэттенского круга $[O, \sum_{k=0}^{i-1} d_{k,k+1}]$. Это множество таких точек, в одной из которых должен находиться конец i -ого звена, чтобы искомая манхэттенская цепочка существовала.

Пересечение манхэттенских круга и окружности — это множество, в которое могут входить точки и отрезки.

Возможны несколько случаев:

- Если \mathfrak{D}^i пусто, то искомой манхэттенской цепочки не существует, и алгоритм заканчивает свою работу.
- Если \mathfrak{D}^i представляет собой одну точку, то её и возьмём в качестве A'_i .
- Если \mathfrak{D}^i представляет собой совокупность отрезков, то выбираем на них ближайшую к A_i точку. Делаем это тем же способом, что и в алгоритме A1.

Мы определили A'_i при $i = n - 1..2$. Теперь найдём A'_1 .

Пусть \mathfrak{D}^1 — пересечение манхэттенских окружностей $(A'_2, d_{1,2})$ и $(O, d_{0,1})$.

Пересечение находим тем же образом, что в алгоритме A1.

Возможны несколько случаев:

- Если \mathfrak{D}^1 пусто, то искомой цепочки не существует, и алгоритм завершает работу.
- Если \mathfrak{D}^1 — точка, то именно её выберем в качестве A'_1 .
- Если \mathfrak{D}^1 представляет собой две точки, то возьмём ближайшую к A_1 .
- Если \mathfrak{D}^1 — это отрезок или совокупность отрезков, то ближайшую точку выбираем в качестве A'_1 .

Таким образом, мы получили вторую манхэттенскую цепочку, полученную из $OA_1A_2\dots A_n$ перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P .

Алгоритм A3

Следующий алгоритм заключается в том, что мы применяем оба алгоритма A1 и A2 и сравниваем их результаты. Тот результат, который находится ближе к оригинальной манхэттенской цепочке, выдаём в качестве ответа.

2.3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $d \in \mathbb{R} > 0$ и $A = OA_1A_2A_3$ — такая манхэттенская цепочка, что $O = (0, 0)$, $A_1 = (d, 0)$, $A_2 = (2d, 0)$, $A_3 = (3d, 0)$. Пусть точка $P \in \{(x, y) : d \leq \rho((x, y), O) \leq 3d\}$. Манхэттенская

цепочка, построенная с помощью алгоритма A1 для данных точки P и манхэттенской цепочки A , находится на минимальном расстоянии от $A = OA_1A_2A_3$ среди всех манхэттенских цепочек, полученных из $A = OA_1A_2A_3$ перемещением конца в P .

Теорема 2. Пусть $d \in \mathbb{R} > 0$ и $A = OA_1A_2A_3$ — такая манхэттенская цепочка, что $O = (0, 0)$, $A_1 = (d, 0)$, $A_2 = (2d, 0)$, $A_3 = (3d, 0)$. Если точка P лежит в области допустимых положений конца цепочки A , то манхэттенская цепочка, построенная с помощью алгоритма A3 для точки P и манхэттенской цепочки A , находится на минимальном расстоянии от $A = OA_1A_2A_3$ среди всех манхэттенских цепочек, полученных из $A = OA_1A_2A_3$ перемещением конца в P . Если точка P лежит вне области допустимых положений конца цепочки A , то ответ алгоритма A3 пуст.

3. Доказательство результатов

3.1. Доказательство теоремы 1

Разобьём область $M = \{(x, y) : d \leq \rho((x, y), O) \leq 3d\}$ на области:

- $M_1 = \{(x, y) : \rho((x, y), A_2) < d, y \leq 0\}$
- $M_2 = \{(x, y) : \rho((x, y), (d, d)) < d\}$
- $M_3 = \{(x, y) : \rho((x, y), (0, 2d)) < d\}$
- $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-d, d)) < d\}$
- $M_5 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-2d, 0)) < d, y \leq 0\}$
- границы этих областей

Если мы докажем утверждение теоремы для точки P , принадлежащей одной из этих областей, то оно справедливо для симметричной ей относительно оси OX области, так как данная в условии манхэттенская цепочка симметрична относительно оси OX .

Обозначим через $A' = OA'_1A'_2P$ манхэттенскую цепочку, полученную с помощью алгоритма A1.

1. Сначала рассмотрим P , лежащее в области $M_1 = \{(x, y) : \rho((x, y), A_2) < d, y \geq 0\}$.

В этом случае, согласно алгоритму A1, в качестве A'_1 мы выбираем точку A_1 , так как она лежит внутри манхэттенского круга $[P, 2d]$. Затем выбираем в качестве A'_2 точку пересечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A'_1, d) , находящуюся на минимальном манхэттенском расстоянии от A_2 .

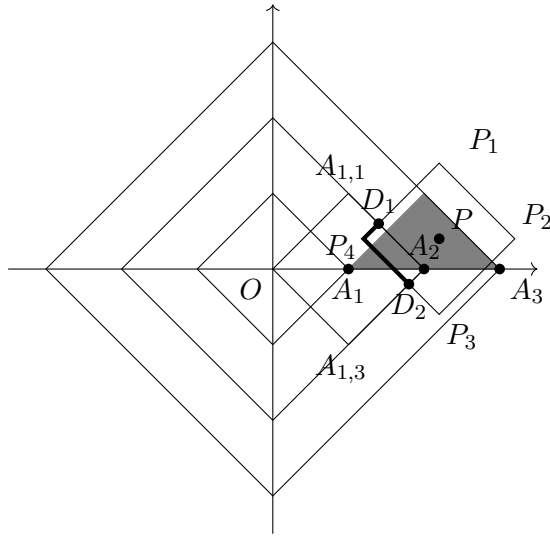


Рис.3: Случай 1.

Построим следующие манхэттенские окружности:

- (O, d) — множество точек, в которые можно переместить конец первого звена.
- (A_1, d) — множество точек, в которые можно переместить конец второго звена при условии, что первое звено остаётся на месте.
- (P, d) — множество, включающее в себя все возможные положения конца второго звена, при которых можно построить манхэттенскую цепочку, полученную из данной перемещением конца в точку P .

Построим также манхэттенский круг $[O, 2d]$. Этот манхэттенский круг — множество допустимых положений конца манхэттенской цепочки OA_1A_2 . Его пересечение с манхэттенской окружностью (P, d) — множество точек, при перемещении конца второго звена в которые мы можем построить манхэттенскую цепочку, полученную из данной перемещением конца в точку P . Это множество отмечено на рисунке жирной линией. Обозначим его \mathfrak{D} .

Обратим внимание, что манхэттенская окружность (A_1, d) пересекает манхэттенскую окружность (P, d) в точках множества \mathfrak{D} , для которых расстояние до точки A_2 наименьшее среди всех точек множества \mathfrak{D} . Одна из них — точка, обозначенная на рисунке через D_2 .

Пусть A_1'' лежит на манхэттенской окружности (O, d) . Обозначим D'' пересечение манхэттенских окружностей (A_1'', d) и (P, d) . A_2'' , если оно существует, будем считать равным $\arg \min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$.

Если A_2'' существует, манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $OA_1A_2A_3$ и $OA_1''A_2''P$ равно

$$\rho(OA_1A_2A_3, OA_1''A_2''P) = \rho(A_1'', A_1) + \rho(A_2'', A_2) + \rho(A_3, P)$$

Учитывая, что $\rho(A_1'', A_1) \geq 0$, $\rho(A_2'', A_2) \geq \rho(A_2, D_2)$, а $\rho(A_3, P)$ не зависит от выбора точек A_1'' и A_2'' , минимум расстояния будет достигаться при $A_1'' = A_1$ и $A_2'' = D_2$, и он равен $\rho(A_2, D_2) + \rho(A_3, P)$.

Значит, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной и заканчивающуюся в P , мы должны оставить конец первого звена на месте, а конец второго поместить в точку на пересечении (P, d) и (A_1, d) , манхэттенское расстояние до которой от A_2 минимально. Именно так строится нужная манхэттенская цепочка в алгоритме A1.

2. Рассмотрим P , лежащее в области $M_2 = \{(x, y) : \rho((x, y), (d, d)) < d\}$.

В этом случае, также, как в предыдущем, согласно алгоритму A1 точка A_1' совпадает с A_1 , так как точка A_1 находится внутри манхэттенского круга $[P, 2d]$ и является ближайшей к самой себе.

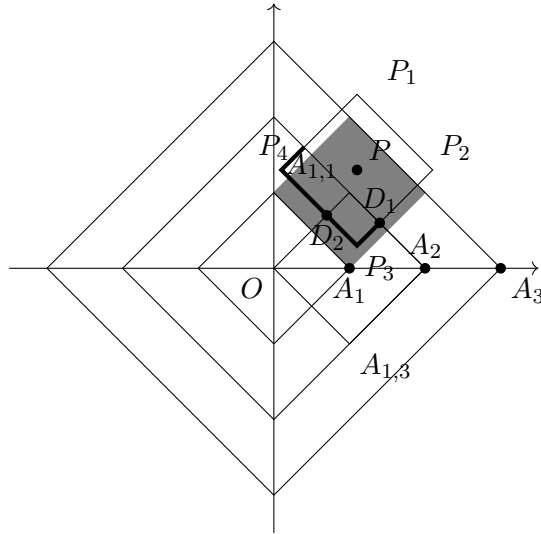


Рис.4: Случай 2.

Доказательство для этого случая практически полностью совпадает с доказательством для случая 1, только множество \mathfrak{D} выглядит иначе и ближайшая к A_2 точка на рисунке обозначена D_1 .

3. Рассмотрим область $M_3 = \{(x, y) : \rho((x, y), (0, 2d)) < d\}$.

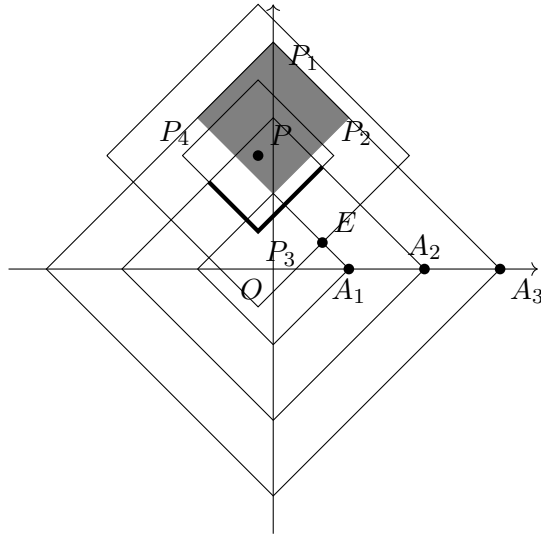


Рис.5: Случай 3.

Этот пункт отличается от предыдущих тем, что не существует манхэттенских цепочек, полученных из данной перемещением конца в точку P , таких, что первое звено остаётся на своём месте. Согласно алгоритму A_1 , в качестве точки A'_1 мы должны взять ближайшую к A_1 точку из точек манхэттенской окружности (O, d) , лежащих во внутренней манхэттенской окружности $(P, 2d)$. Эта точка на рисунке обозначена E .

Построим манхэттенскую окружность с радиусом d и центром в точке E . Она пересекает манхэттенскую окружность (P, d) по отрезку стороны P_2P_3 , поскольку он находится на манхэттенском расстоянии d .

Снова построим манхэттенский круг $[O, 2d]$. Его пересечение с манхэттенской окружностью (P, d) отмечено на рисунке жирной линией. Обозначим его \mathfrak{D} .

Обратим внимание, что точка E находится на манхэттенском расстоянии d от стороны P_2P_3 манхэттенской окружности (P, d) , и манхэттенская окружность (E, d) пересекает манхэттенскую окружность (P, d) по отрезку стороны P_2P_3 , для которого манхэттенское расстояние до точки A_2 наименьшее среди всех точек множества \mathfrak{D} . Обозначим это расстояние t .

Пусть A''_1 лежит на пересечении манхэттенской окружности (O, d) и манхэттенского круга $[P, 2d]$. Обозначим через D'' пересечение манхэттенских окружностей (A''_1, d) и (P, d) . A''_2 будем считать равным

$$\arg \min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$$

Манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $OA_1A_2A_3$ и $OA_1''A_2''P$ равно

$$\rho(OA_1A_2A_3, OA_1''A_2''P) = \rho(A_1'', A_1) + \rho(A_2'', A_2) + \rho(A_3, P)$$

Учитывая, что $\rho(A_1'', A_1) \geq \rho(E, A_1)$, $\rho(A_2'', A_2) \geq t$, а $\rho(A_3, P)$ не зависит от выбора точек A_1'' и A_2'' , минимум расстояния будет достигаться при $A_1'' = E$ и $A_2'' = \arg \min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$.

Значит, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной и заканчивающуюся в P , мы должны поместить конец первого звена в точку пересечения $[P, 2d]$ и $(0, d)$ находящуюся ближе всех к A_1 , а конец второго поместить в точку на пересечении (P, d) и (A_1, d) , манхэттенское расстояние до которой от A_2 минимально. Именно так строится нужная манхэттенская цепочка в алгоритме A1.

4. Рассмотрим область $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-d, d)) < d\}$.

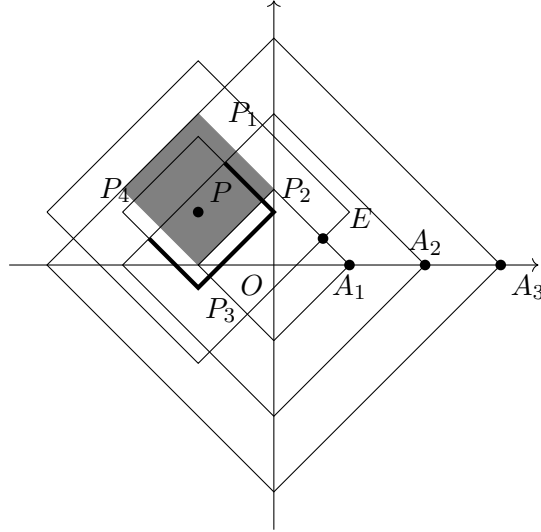


Рис.6: Случай 4.

Данный пункт доказывается аналогично предыдущему.

5. Рассмотрим область $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-2d, 0)) < d, y \geq 0\}$.

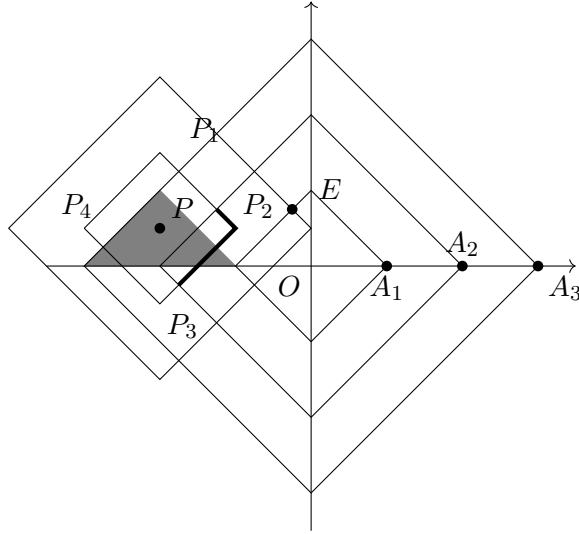


Рис.7: Случай 5.

В данном случае все точки пересечения $(O, d) \cap [P, 2d]$ равноудалены от точки A_1 , поэтому можно выбрать в качестве E любую из двух точек пересечения $(O, d) \cap (P, 2d)$. Далее доказательство аналогично предыдущему пункту.

6. Рассмотрим границы областей 1-5.

Если точка P находится на границе рассмотренных ранее областей, то в пересечение манхэттенских окружностей (P, d) и (A_1, d) или (E, d) попадает точка, которая находится ближе всего к A_2 среди точек, в которые мы можем поместить A'_2 . Далее доказательство аналогично предыдущим пунктам.

Конец доказательства.

3.2. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. Пусть A — манхэттенская цепочка, и P — точка на плоскости. Результатом работы алгоритмов A1 и A2 является отсутствие манхэттенской цепочки, полученной из A перемещением конца в точку P , тогда и только тогда, когда P лежит вне области допустимых положений конца манхэттенской цепочки A .

Доказательство. Алгоритм A1 выдаёт в качестве ответа отсутствие нужной манхэттенской цепочки тогда и только тогда, когда множество \mathcal{D}^1 пусто. Это происходит тогда и только тогда, когда манхэттенская окружность $(O, d_{0,1})$ и манхэттенский круг $[P, \sum_{k=1}^{n-1} d_{k,k+1}]$ не пересекаются, то есть тогда и только тогда, когда P лежит вне области допустимых положений конца манхэттенской цепочки A .

Для алгоритма A2 утверждение доказывается таким же образом. Лемма доказана.

В рассмотренных в предыдущей теореме областях на манхэттенской окружности с центром в такой точке, которая ближе всех к A_1 из всех возможных, лежала точка, ближайшая к A_2 из всех возможных. В области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d\}$ такого не происходит, поэтому, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной, в некоторых случаях нам придётся переместить конец первого звена не в ближайшую к A_1 точку, и алгоритм A1 работает неверно. Аналогично не всегда работает верно алгоритм A2. Докажем, что для этой области правильно работает алгоритм A3, выбирающий наиболее подходящий ответ из результатов работы алгоритмов A1 и A2.

Будем рассматривать только область $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d, y \geq 0\}$, так как оставшаяся часть области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d\}$ симметрична, и для неё теорема доказывается также.

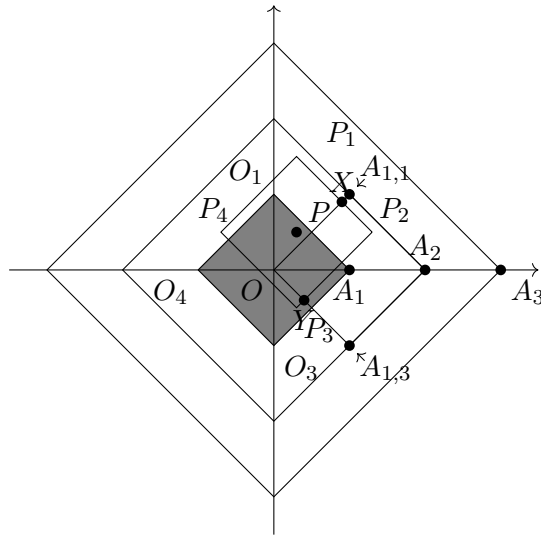


Рис.8: Случай, когда т. P находится на расстоянии меньше или равно d от начала цепочки.

Обозначим через $OA_{1,1}A_2A_{1,3}$ манхэттенскую окружность (A_1, d) .

Обозначим X и Y точки пересечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A_1, d) . Пусть $r_1 = \rho(A_{1,3}, Y)$, $r_2 = \rho(A_{1,1}, X)$.

Возьмём точку A'_1 на манхэттенской окружности (O, d) . Обозначим через D'' пересечение $(P, d) \cap (A'_1, d)$, через D — пересечение $(P, d) \cap (A_1, d)$.

Через $OA'_1A'_2P$ обозначим манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от $OA_1A_2A_3$ и полученную из неё перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P .

Пусть точка $A''_1 \in A_1O_1$ и $\rho(A''_1, A_1) < r_1$, либо $A''_1 \in A_1O_3$ и $\rho(A''_1, A_1) < r_2$. Построим манхэттенскую окружность с центром в точке A''_1 и радиусом d . Она пересекает манхэттенскую окружность (P, d) в двух точках X'' и Y'' , причём

$$\rho(A_2, \arg \min_{x \in D} (\rho(A_2, x))) \leq \rho(A_2, \arg \min_{x \in D''} (\rho(A_2, x)))$$

То есть при данных положениях точки A''_1 минимальное расстояние до возможных положений конца второго звена будет больше, чем если мы оставим конец первого звена на своём месте. Поэтому мы можем не рассматривать данные положения точки A''_1 в качестве возможных положений точки A'_1 .

Пусть точка $A''_1 \in A_1O_1$ и $\rho(A''_1, A_1) = r_1$, либо $A''_1 \in A_1O_3$ и $\rho(A''_1, A_1) = r_2$. В этом случае в D'' входит точка P_2 , которая является ближайшей к точке A_2 на манхэттенской окружности (P, d) . Она не входит в множество D .

При $A''_1 \in O_1O_4 \cup O_3O_4$, при $A''_1 \in A_1O_1$ и $\rho(A_1, A''_1) > r_1$, при $A''_1 \in A_1O_3$ и $\rho(A_1, A''_1) > r_2$ манхэттенское расстояние между точкой A_2 и точками множества D'' будет больше или равно расстояния $\rho(A_2, P_2)$, так как P_2 — ближайшая к A_2 точка на манхэттенской окружности (P, d) . При этом расстояние $\rho(A_1, A''_1)$ будет больше, чем при ранее рассматриваемых случаях. Значит, для нахождения манхэттенской цепочки, находящейся на минимальном расстоянии от данной и полученной переводом конца в точку P , мы можем ограничиться лишь рассмотрением случаев, когда $A''_1 = A_1$ и когда $P_2 \in D''$.

Обозначим через \hat{A}_1 положение A''_1 , при котором $P_2 \in D''$ и $\rho(A_1, A''_1)$ минимально. Возможны два случая:

- $0 + \rho(A_2, \arg \min_{x \in D} (\rho(A_2, x))) + \rho(P, A_3) \leq \rho(A_1, \hat{A}_1) + \rho(A_2, P_2) + \rho(P, A_3)$.
- $0 + \rho(A_2, \arg \min_{x \in D} (\rho(A_2, x))) + \rho(P, A_3) > \rho(A_1, \hat{A}_1) + \rho(A_2, P_2) + \rho(P, A_3)$.

В первом случае для минимизации расстояния между манхэттенскими цепочками в качестве конца первого звена A'_1 выбираем точку A_1 , а в качестве конца второго звена A'_2 — ближайшую к A_2 точку пересечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A'_1, d) . В этом случае $\rho(OA_1A_2A_3, OA'_1A'_2P)$ будет минимальным. Это соответствует действиям в алгоритме А4.

Во втором случае мы выбираем P_2 в качестве A'_2 , а в качестве A'_1 — ближайшую к A_1 точку пересечения манхэттенских окружностей (O, d) и (P_2, d) . Это соответствует действиям, описываемым в алгоритме А5.

Таким образом, в заданной области всегда верен результат одного из алгоритмов А1 или А2.

Для области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) < d\}$ теорема доказана.

Для точек вне области допустимых положений конца цепочки A теорема следует непосредственно из леммы 1. Для оставшейся области теорема следует из теоремы 1.

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе рассмотрены три алгоритма перевода конца манхэттенской цепочки в заданную точку. Для прямых манхэттенских цепочек длины 3 указана область, в которой эти алгоритмы выдают оптимальное решение.

Список литературы

- [1] Голиков К.А., “Алгоритм обучения систем с дискретным управлением”, *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **23**:1 (2019), 7-38.
- [2] Голиков К.А., “Обучение систем с дискретным управлением”, *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **22**:4 (2018), 143-151.
- [3] Бергер И.О., “Алгоритмы перевода конца цепочки в заданную точку”, *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **21**:3 (2017), 41-64.

Algorithms of moving of the end of the chain to the given point in space with the taxicab metric

Berger I.O.

The paper considers the problem of moving a three-link chain with one fixed edge from the initial position to the position in which the second edge is placed in a given point. The initial position is the position at which all chain links lie on the abscissa axis. Moreover, each chain link has a fixed length, but it can bend at an angle of 90 degrees at any point. The paper proposes an algorithm that minimizes the distance between the initial and final positions of the chain, and the distance measure is based on the metric of taxicab geometry.

Keywords: Manhattan chains, Manhattan distance, algorithm, taxicab geometry.

References

- [1] Golikov K.A., “Learning algorithm of systems with discrete control”, *Intelligent systems: theory and applications*, **23**:1 (2019), 7-38 (in Russian).
- [2] Golikov K.A., “Learning systems with discrete control”, *Intelligent systems: theory and applications*, **22**:4 (2018), 143-151 (in Russian).
- [3] Berger I.O., “Algorithms of moving of the end of chain to the given point”, *Intelligent systems: theory and applications*, **21**:3 (2017), 41-64 (in Russian).

Оценка риска неблагоприятного клинического исхода методами углубленного анализа данных

Б. Э. Горный¹, А. П. Рыжов², А. С. Строгалов³, А. Д. Журавлев⁴,
А. А. Хусаенов⁵, И. А. Шергин⁶, Д. А. Фещенко⁷,
А. М. Абдуллаев⁸, А. В. Концевая⁹

¹*Горный Борис Эмануилович* — к.м.н, ведущий научный сотрудник отдела первичной профилактики ХНИЗ в системе здравоохранения ФГБУ “НМИЦТПМ”, e-mail: bgornyy@gnicpm.ru

Gornyi Boris Emanuilovich — Ph.D. in medical science, leading researcher of department of Primary Prevention of Chronic Non-Communicable Diseases in the Healthcare System, National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine

²*Рыжов Александр Павлович* — д.т.н., к.ф.-м.н., MBA, профессор кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: alexander.ryjov@gmail.com

Ryjov Alexander Pavlovich — Sc.D. in engineering, Ph.D. in mathematics, MBA, professor, Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Mathematical Theory of Intelligent Systems department

³*Строгалов Александр Сергеевич* — к.ф.-м.н., доцент кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: strogalov@mail.ru

Strogalov Alexander Sergeevich — Ph.D. in mathematics, associate professor, Moscow State University, faculty of Mechanics and Mathematics, Mathematical Theory of Intelligent Systems department

⁴*Журавлев Артем Дмитриевич* — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: artemzhuravlev.msu@gmail.com

Zhuravlev Artem Dmitrievich — postgraduate student, Moscow State University, faculty of Mechanics and Mathematics, Mathematical Theory of Intelligent Systems department

⁵*Хусаенов Артем Азатович* — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: a.khusaenov@mail.ru

Khusaenov Artem Azatovich — postgraduate student, Moscow State University, faculty of Mechanics and Mathematics, Mathematical Theory of Intelligent Systems department

⁶*Шергин Иван Андреевич* — студент 5 курса кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: i.a.shergin@gmail.com

Shergin Ivan Andreevich — 5 year student, Moscow State University, faculty of Mechanics and Mathematics, Mathematical Theory of Intelligent Systems department

⁷*Фещенко Дарья Анатольевна* — заведующая операционным блоком ФГБУ “НМИЦТПМ”; e-mail: dfeshenko@gnicpm.ru

Feshchenko Daria Anatol'evna — the head of surgical block of National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine, Moscow

⁸*Абдуллаев Алсан Мурадович* — аспирант отдела нарушений сердечного ритма и проводимости ФГБУ “НМИЦТПМ”; e-mail: abdullaevaslanm@mail.ru

Abdullaev Aslan Muradovich, postgraduate student, National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine, Moscow

⁹*Концевая Анна Васильевна* — д.м.н, заместитель директора ФГБУ “НМИЦТПМ”; e-mail: AKontsevaya@gnicpm.ru

Kontsevaya Anna Vasilievna, Doctor of Medicine, deputy director of National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine, Moscow

Возникновение неблагоприятных событий в процессе оказания медицинской помощи возникает у 10-15% госпитализированных пациентов. Снижение даже на несколько процентов возникновения таких событий позволит сохранить тысячи жизней. Одним из путей решения этой важнейшей проблемы является использование интеллектуальных информационных технологий, позволяющих прогнозировать риск возникновения неблагоприятного клинического исхода у пациентов. В работе представлены результаты исследования¹, выполненного совместно сотрудниками Национального медицинского исследовательского центра терапии и профилактической медицины МЗ РФ и механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, показывающего применимость методов анализа данных в решении этой важной проблемы.

Ключевые слова: профилактическая медицина, неблагоприятный клинический исход, углубленный анализ данных.

1. Введение

В конце прошлого столетия, когда стала регистрироваться высокая частота возникновения неблагоприятных событий в процессе оказания медицинской помощи, в ряде развитых стран были проведены исследования, которые подтвердили, что вред здоровью, обусловленный не болезнью, а связанный с оказанием медицинской помощи, возникает у 10-15 % госпитализированных пациентов [1]-[4]. В ряде стран были созданы подразделения, сообщающие об ошибках такого рода [5]-[7]. В России статистика врачебных ошибок не ведется, хотя по неофициальным данным, ошибки медицинских работников уносят каждый год жизни около 50 тысяч человек [8].

Положительный опыт использования методов интеллектуального анализа данных (Big Data, Data Mining) во многих сферах (от финансов до управления сложными технологическими процессами), позволяет поставить вопрос о применимости этих методов и в решении задач прогнозирования риска возникновения неблагоприятных клинических исходов.

Целью настоящей работы является изложение первых результатов совместного проекта Национального медицинского исследовательского центра терапии и профилактической медицины (НМИЦТиПМ МЗ РФ) и механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, показывающего применимость методов анализа данных в решении этой важной проблемы. В рамках проекта решается задача прогнозирования

¹ работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 19-29-01051 «Разработка алгоритмов принятия решений для управления рисками неблагоприятных клинических событий в высокотехнологичной медицинской организации на основе технологии data mining»

риска неблагоприятного клинического исхода на основе информации о пациенте, доступной в клинике НМИЦТиПМ МЗ РФ (медицинская информационная система «Медиалог»). Как и для всех проектов такого рода, заранее нельзя сказать, насколько успешным может быть этот подход к решению упомянутой выше задачи. Отчасти это связано со многими факторами неопределённости, для снятия которых необходимо провести серию экспериментальных работ и предварительно получить ответы на следующие вопросы:

- Что такое неблагоприятный клинический исход и можно ли его описать на языке накапливаемой в системе «Медиалог» информации о пациентах (признаки и их значения)? Изначально система «Медиалог» проектировалась для других целей и среди параметров системы признак неблагоприятного исхода отсутствует – поэтому ответ на этот вопрос далеко не очевиден.
- Достаточно ли данных (в смысле полноты представленной в системе информации о пациентах), чтобы такую задачу можно было решать или потребуются накапливать дополнительный набор признаков в описании (модели) пациента в системе?
- Достаточно ли представлен объем данных (в смысле количества пациентов) для возможности использования методов data mining (машинного обучения)?
- Достаточно ли данных (как количественных, так и качественных) накопленных в системе, чтобы к ним можно было достаточно эффективно применить методы data mining (машинного обучения)?
- Как оценивать качество прогноза? Какой уровень качества является приемлемым для клиницистов?
- Для использования клиницистами разрабатываемой системы прогнозирования, они должны доверять ей. Каким образом обеспечить такое доверие? Формальные критерии качества прогноза часто не убедительны для пользователей.

В ходе выполнения проекта были проведены несколько десятков встреч и совещаний между основными участниками проекта – сотрудниками клиники НМИЦТиПМ (будущими пользователями системы и носителями знаний о том, что «хорошо» и что «плохо»), сотрудниками ИТ подразделения НМИЦТиПМ (владельцами информации, понимающими все тонкости ее появления, накопления, изменения и хранения), сотрудниками механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (математиками, знающими как работают алгоритмы

анализа данных и как их настроить наилучшим образом для получения максимально хорошего результата). Первая часть обсуждений касалась понятия «неблагоприятный клинический исход» (основные участники – клиницисты и ИТ). Было сформулировано это понятие на языке признаков и их значений, имеющих в системе. Вторая часть обсуждений касалась доступности и качества накапливаемой информации (основные участники – ИТ и математики). Было сделано несколько десятков выгрузок из системы (критерии уточнялись по результатам анализа предыдущей выгрузки), пока не были получены выгрузки с приемлемым уровнем пропуска значений признаков. Третья часть обсуждений касалась «доводки» полученной выгрузки до уровня, с которым могут работать алгоритмы анализа данных (основные участники – математики и клиницисты) с целью получения значимых для клиницистов результатов. Рассматривались разные варианты заполнения отсутствующих в выгрузке значений признаков (медианные значения/ усредненные/ дополнительный класс «-1» и пр.). Наряду с экспертными мнениями клиницистов (что «разумно», что «не разумно») использовались и формальные прогнозы разными методами, позволяющие «нащупать» правильные алгоритмы заполнения недостающих данных. Четвертая часть обсуждений касалась выбора наилучших алгоритмов для полученного набора данных и их оптимизации (основные участники – математики и клиницисты). В частности, оказалось, что одним из важных критериев выбора класса алгоритмов является его интуитивная понятность для клиницистов. Для этого были разработаны методы выделения наиболее важных для прогноза признаков (это позволяло понять «разумность» прогноза), методы графического представления прогноза (это позволяло понять «логику» прогноза). Важность этого аспекта в начале проекта спрогнозировать было нельзя, поэтому пришлось делать много незапланированной работы. Тем не менее результаты работы этих алгоритмов были дополнительно проверены на менее понятной для клиницистов модели - нейронной сети. Результаты, полученные с помощью нейронной сети, показали хорошее качество предсказания риска развития неблагоприятных клинических исходов на отобранных ранее моделях.

В результате выполнения исследования были получены положительные ответы на сформулированные выше вопросы:

- 1) Задача может решаться на основе накапливаемой в ИТ системе НМИЦТиПМ информации;
- 2) Набор признаков (модель) достаточен, даже скорее избыточен, для применения методов анализа данных;

- 3) Качество информации находится в допустимых пределах, ее можно дополнить исходя из формальных соображений в случае необходимости;
- 4) Алгоритмы демонстрируют достаточно хорошее качество прогноза на имеющейся выборке;
- 5) Алгоритмы понятны врачам-клиницистам и они им доверяют.

Полученные результаты снимают потенциальные риски разработки прототипа системы, реализация которой составляет содержание следующих этапов проекта.

2. Обзор современного состояния исследований в области управления рисками неблагоприятных клинических событий в высокотехнологичной медицинской организации

Как уже упоминалось выше, возникновение неблагоприятных событий в процессе оказания медицинской помощи возникает у 10-15% госпитализированных пациентов. Один из главных путей решения этой важнейшей проблемы лежит в сфере информационных технологий, использование которых предоставляет возможность сделать оказание медицинской помощи более безопасным [9]-[11], а внедрение систем поддержки принятия клинических решений в управление качеством медицинской помощи дает возможность уменьшить врачебные ошибки, а также повысить безопасность хирургического лечения пациентов, оптимизировать процесс назначения лекарств и прогнозировать, а следовательно и уменьшать, риск неблагоприятных клинических событий [10]-[16]. Из немногочисленных примеров отечественных систем можно назвать клиническую информационную систему «ДОКА+» [17], ИС «Кардинет-онлайн» [18], которые содержат модуль, предупреждающий врачей о возможных ошибках с назначением лекарственных препаратов. Но системы, которые бы оказывали поддержку управленческим решениям, отсутствуют - во всяком случае нам не удалось найти информацию о таких системах.

Одной из нерешенных проблем использования информационных технологий в отечественном здравоохранении является слабое использование и управление медицинской информацией, которое затрудняет усилия по преобразованию ценности информации в ценность для отрасли [19], что приводит к росту расходов на медицинское обслуживание, к неоправданым затратам времени как для пациентов, так и для медицинских организаций. Все это обуславливает необходимость поиска эффективных

технологий, которые позволят медицинским организациям консолидировать организационные ресурсы для повышения безопасности и качества обслуживания пациентов, повышения организационной эффективности и, возможно, даже создания новых, более эффективных бизнес-моделей, основанных на использовании данных [20]-[22].

Многообещающим направлением в этой области является применение аналитики больших данных, которая включает в себя различные аналитические методы, такие как, например, описательная аналитика и интеллектуальная (прогнозная аналитика), которые идеально подходят для анализа большей части текстовых медицинских документов и других неструктурированных клинических данных (заметок, комментариев врача, медицинских изображений и пр.) [25]. Аналитика больших данных, разработанная на основе систем бизнес-аналитики позволит организациям здравоохранения анализировать огромный объем информации для принятия решений на основе фактических данных [23, 24].

Большинство моделей и методов, применяемых в настоящее время в различных отраслях медицины основаны на вероятностно-статистических моделях, которые сами по себе (как математические модели) неплохи, но часто дают плохие прогнозы, поскольку в приложениях начинают использовать неполные и недостоверные начальные данные, либо по малой выборке пытаются экстраполировать прогнозы на большие выборки и терпят неудачу. Кроме этого, сами модели используют методы, которые (в силу специфики современного образования) не понятны ни врачам-клиницистам, ни управленцам в медицинской области.

В настоящем исследовании предлагается использовать модели и методы обработки данных, возникших в технологиях интеллектуального (или углубленного) анализа данных (Big Data или Data Mining в англоязычной терминологии). Взаимодействие таких алгоритмов обработки данных может помочь в создании модели по выработке адекватных управленческих процессов с целью предотвращения неблагоприятных клинических событий, поскольку использует практически всю имеющуюся информацию, включая ту, которая не поддается обработке вероятностно-статистическими методами – в том числе слабоструктурированную, неполную, противоречивую и т.д.

Для отбора и предварительной обработки такой информации требуется наличие экспертов в предметной области и наличие самой информации, а также профессионалов - математиков по указанным выше областям. НМИЦГиПМ обладает достаточно репрезентативным корпусом информации (в том числе и в электронном виде) о пациентах, проходивших лечение в его клинике.

3. Используемый набор данных и предобработка данных

В современных высокотехнологических клиниках благодаря внедрению медицинских информационных систем (МИС) фиксируется и накапливается большой объем данных о каждом конкретном пациенте (демографические, клинические данные, результаты лабораторных и инструментальных методов диагностики, характер оперативного лечения и пр.), а также динамика происходящих с ним изменений.

В качестве данных для анализа были использованы 79 клинико-демографических и лабораторных параметров из МИС «Медиалог» НМИЦ-ТиПМ о 5062 пациентах, которым были выполнены высокотехнологичные эндоваскулярные (60%) и интервенционные аритмологические вмешательства (40%). В группу рентгенэндоваскулярных операций входили как диагностические (25% - коронарография, ангиография аорты и ее ветвей, ангиография брахиоцефальных артерий), так и лечебные процедуры (75% - ангиопластика и стентирование коронарных (77%), каротидных (7%) и периферических артерий (12,7%), транскатетерное протезирование аортального клапана (0,3%), ренальная денервация 3%). Аритмологические операции были представлены:

- 1) Внутрисердечными электрофизиологическими исследованиями;
- 2) Радиочастотными и криоабляциями аритмогенных очагов различных локализаций;
- 3) Имплантациями окклюдировующих устройств ушка левого предсердия;
- 4) Имплантациями электрокардиостимуляторов, кардиовертеров-дефибрилляторов, систем модулирующих сердечную сократимость, устройств для ресинхронизирующей терапии;
- 5) Имплантациями петлевых регистраторов ЭКГ

В среднем 15% операций проводились по экстренным показаниям.

По разным причинам исходные данные о пациентах содержали 58% пропусков (отсутствие записи), что считается довольно плохой оценкой для построения моделей машинного обучения. В связи с этим встал вопрос предобработки и очистки данных.

Целевой переменной являлся неблагоприятный клинический исход – adverse clinical event (ACE). Неблагоприятный клинический исход - это исход в периоперационном периоде, связанный с наступлением серьезно неблагоприятного сердечного-сосудистого и церебрального события

(смерть, инсульт, инфаркт миокарда и др.), а также клинически значимого кровотечения и/или специфического для каждого вида операций осложнения, приводящих к удлинению срока госпитализации и удорожанию стоимости лечения. В представленной выборке АСЕ принимал значение «1» в 84 случаях, значение «0» в 4978 случаях, соответственно. Так как целевая переменная принимала бинарные значения, то далее решалась задача классификации.

При анализе набора данных было обнаружено, что присутствуют некоторые признаки, которые можно не использовать в построении классификатора из-за того, что они либо неизвестны на момент поступления пациента в клинику, либо изначально не являются информативными. Такими признаками, например, являлись дата операции, дата выписки, количество койко-дней, id-пациента, город, должность и другие. Также было принято не использовать некоторые признаки, которые имеют достаточно большое количество пропусков. Такими признаками, например, являлись наличие плоского эпителия, солей в общем анализе мочи. В итоге был получен следующий набор данных в виде таблицы из 5062 строк (пациентов) и 66 столбцов (признаков). Процент пропусков, к сожалению, не изменился и составил 58%, поэтому была поставлена задача уменьшить процент пропусков в данных.

К этому вопросу нужно было подходить осторожно, поскольку размер исходных данных небольшой, а процент пропуска был довольно существенный. Существует несколько стандартных вариантов для решения:

- Отбрасывание записей. Это решение подходит только в том случае, если недостающие данные не являются информативными.
- Отбрасывание признаков. Такое решение может применяться только для неинформативных признаков.
- Внесение недостающих значений. Это решение подходит только в том случае, если в постановке задачи предусмотрено внесение искусственно созданных значений признаков пациента.
- Замена недостающих значений. Такое решение может применяться, когда возможны искусственные значения.

Для решения задачи нужны были данные только о реальных пациентах. Мы не могли просто отбросить все пропуски, так как имели небольшой объем данных, поэтому какой-то процент пропусков так или иначе должен быть. Было принято решение отбросить некоторое количество записей и признаков, учитывая особенности и размер исходных данных так, чтобы процент пропусков находился в промежутке 10-20%.

Эксперименты с набором данных показали, что для этого надо отбросить признаки, которые заполнены менее чем у 3000 пациентов, и отбросить пациентов, у которых заполнено менее чем 51 признак.

В итоге получился набор данных, содержащий сведения о 3146 пациентах и 23 признака, содержащих 16% пропусков. Задача достижения заданного процента пропусков с минимальным отбрасыванием данных нами не рассматривалась, поэтому описанная процедура, скорее всего, не является оптимальной. Результаты описанной процедуры предобработки данных в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Пропуски в исходном наборе данных

Номер	Признак	Количество пропусков
0	пол пациента	10
1	Натрий	2555
2	Кристаллы оксалатов	4324
3	Удельный вес	2993
4	АЧТВ	2927
5	Эритроциты (RBC)	349
6	Белок	3559
7	Аморфные фосфаты	4339
8	Гемоглобин (HGB)	341
9	Триглицериды	2708
10	Кристаллы трипельфосфатов	4325
11	Кислотность (pH)	2992
12	Фибриноген	2955
13	СОЭ(Скорость оседания эритроцитов)	1119
14	Цвет	419
15	Холестерин	2626
16	Лейкоциты (WBC)	340
17	Тромбоциты (PLT)	350
18	Калий	1934
19	Международ. Нормализов. Отношение	2752
20	Гематокрит	349
21	Липопротеиды очень низкой плотности	4294
22	Креатинин	1741
23	Мочевая кислота	2883
24	ХС ЛПНП	3612
25	Глюкоза	2301
26	ХС ЛПВП	3594

Номер	Признак	Количество пропусков
27	Гликозилированный гемоглобин	4791
28	Ураты	4705
29	Гиалиновые цилиндры	3035
30	Протромбиновое время	2752
31	Неблагоприятное клиническое последствие	0
32	Диаметр аорты на уровне синусов	3487
33	Диаметр восходящей аорты	3422
34	Максимальное раскрытие створок аортного клапана	3483
35	Параметры систолического кровотока в выносящем тракте левого желудочка	3877
36	Параметры аортального кровотока: максимальная скорость	3434
37	Размер левого предсердия	3397
38	Объем левого предсердия	4217
39	Размер правого предсердия	3405
40	Объем правого предсердия	4463
41	Конечно-диастолический размер левого желудочка	3306
42	Конечно-систолический размер левого желудочка	3317
43	Толщина межжелудочковой перегородки в диастолу в выносящем тракте левого желудочка	3533
44	Толщина межжелудочковой перегородки	3408
45	Толщина задней стенки левого желудочка	3324
46	Масса миокарда левого желудочка	3597
47	Индекс массы миокарда левого желудочка	3660
48	Конечно-диастолический объем левого желудочка	3358
49	Конечно-систолический объем левого желудочка	3361
50	Ударный объем левого желудочка	3391
51	Минутный объем кровотока	3939
52	Глобальная сократимость левого желудочка фракция выброса	3301

Номер	Признак	Количество пропусков
53	Передне-заднее укорочение полости левого желудочка	3917
54	Максимальная скорость раннего диастолического наполнения	3398
55	Максимальная скорость кровотока во время предсердной систолы	3678
56	Е/А	4500
57	Максимальный передне-задний размер правого желудочка	3330
58	Толщина передней стенки правого желудочка в диастолу	4086
59	Диаметр ствола легочной артерии	3461
60	Кровоток в стволе легочной артерии:	3511
61	Белок1	4320
62	ЧСС во время исследования	3434
63	РРТ	3611
64	Год рождения	0
65	Сезон госпитализации	0

Таблица 2. Пропуски в исходном наборе данных

Номер	Признак	Количество пропусков
0	Пол пациента	7
1	Натрий	689
2	Удельный вес	1093
3	АЧТВ	1041
4	Эритроциты (RBC)	128
5	Гемоглобин (HGB)	126
6	Триглицериды	869
7	Кислотность (pH)	1093
8	Фибриноген	1066
9	СОЭ (Скорость оседания эритроцитов)	326
10	Цвет	138
11	Холестерин	789
12	Лейкоциты (WBC)	125
13	Тромбоциты (PLY)	129
14	Калий	413
15	Международ.нормализов.отношение	956
16	Гематокрит	128

Номер	Признак	Количество пропусков
17	Креатинин	291
18	Мочевая кислота	989
19	Глюкоза	518
20	Протромбиновое время	956
21	Год рождения	0
22	Сезон госпитализации	0

Для заполнения пропусков в данных есть несколько стандартных вариантов:

- медианное значение
- среднее значение
- наиболее часто встречающееся значение
- искусственное значение (например, отрицательное).

После обсуждений с врачами НМИЦТиПМ было решено использовать медианное значение.

4. Решение задачи прогнозирования риска неблагоприятного клинического исхода

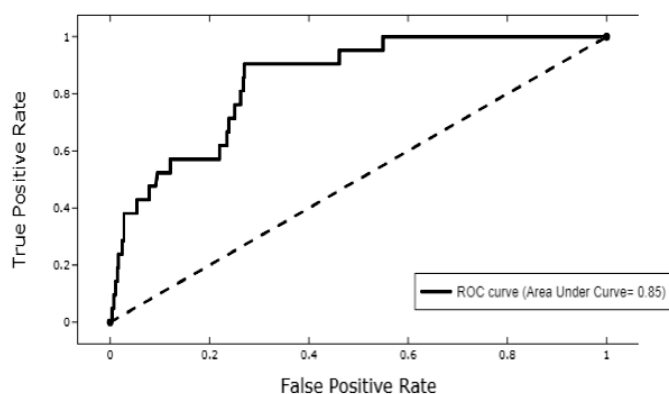
Для построения классификатора был выбран алгоритм построения дерева решений (Decision tree), так как требовалась хорошая интерпретируемость модели для медицинских специалистов, которые будут пользоваться классификатором. Именно в этом алгоритме, не прикладывая больших усилий, способен разобраться человек, далекий от математики. Для увеличения качества итогового дерева на исходных данных сначала использовался алгоритм случайного леса (Random Forest), заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев, каждое из которых само по себе даёт очень невысокое качество классификации, но за счёт их большого количества результат получается хорошим. Далее были выбраны 15 признаков с наибольшим вкладом в предсказание случайного леса, и итоговое дерево решений строилось на выборке, состоящей только из них.

Использовались меры качества алгоритма классификации F1-score и ROC AUC, так как они хорошо подходят для несбалансированных данных (значения целевой переменной относятся как 3079/67). Также для улучшения качества модели обучения использовалась кросс-валидация (cross-validation) - метод оценки аналитической модели и её поведения на независимых данных.

Во избежание переобучения алгоритмов Decision tree и Random forest были введены ограничения на их параметры:

- criterion - критерий, по которому происходит разбиение вершины: энтропия или Джини.
- max_depth - максимальная глубина дерева.
- min_samples_split - минимальное число элементов в вершине для разделения.
- min_samples_leaf - минимальное число элементов в листе.
- n_estimators - число деревьев в лесу. (только для Random forest)

Также был использован алгоритм случайного поиска лучших параметров классификатора по сетке - Random Search вместо перебора всевозможных вариантов - Grid Search по причине его трудоемкости.



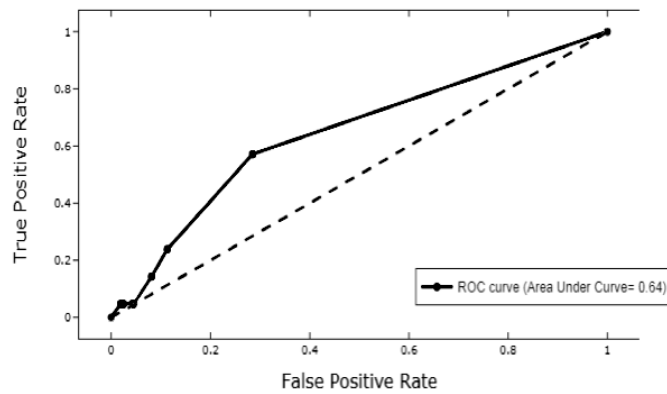
(a)

Для каждого алгоритма было проведено 50 запусков и выбран лучший классификатор по согласованным выше метрикам: случайный лес - F1-score = 0.97, ROC AUC = 0.85; дерево решений - F1-score = 0.96, ROC AUC = 0.64. Результаты представлены на рис. 1.

Отличие в значениях ROC AUC метрики на построенных классификаторах легко объясняется тем, что случайный лес изначально является более сильным алгоритмом, нежели дерево решений.

В рамках используемого подхода возможна оценка степени важности признака в решении задачи классификации. Таблица с первыми 15 наиболее важными признаками представлена в таблице 3.

Таблица 3. Список 15 наиболее важных признаков



(б)

Рис. 1. ROC-кривая случайного леса (а) и дерева решений (б)

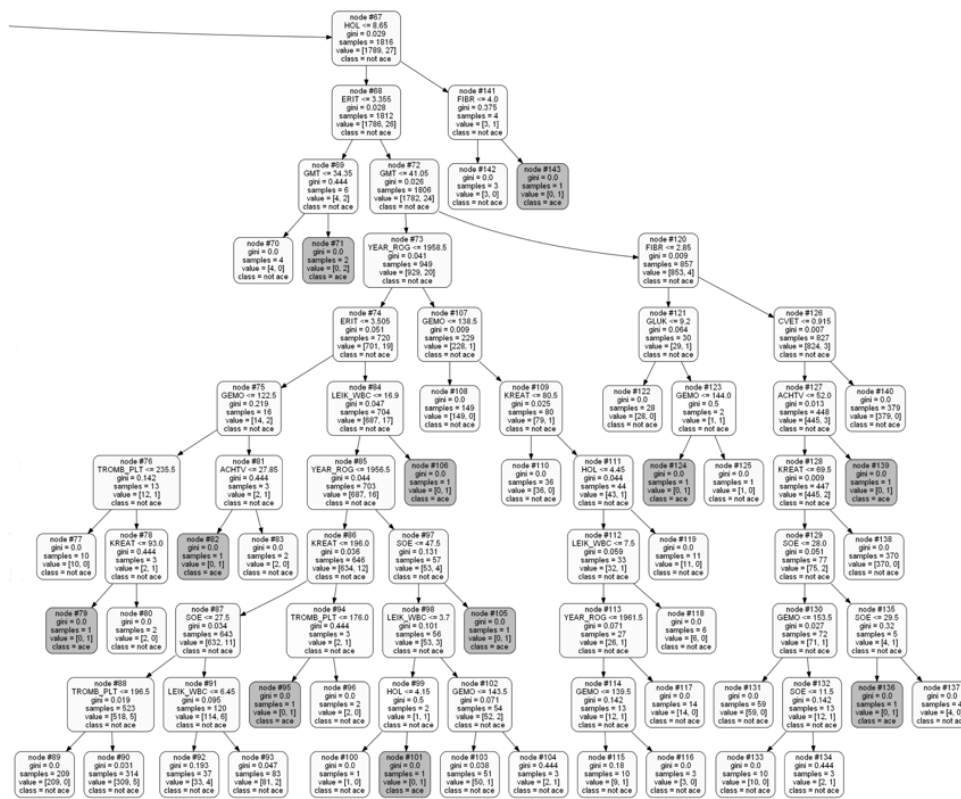
index	field_name	feature_importances_rand	field_description	
0	8.0	NATRII	0.120946	Натрий
1	3.0	SOE	0.118923	СОЭ(Скорость оседания эритроцитов)
2	10.0	TRIG	0.101272	Триглицериды
3	0.0	ERIT	0.088649	Эритроциты (RBC)
4	4.0	KREAT	0.083006	Креатинин
5	12.0	GLUK	0.071385	Глюкоза
6	13.0	LEIK_WBC	0.062446	Лейкоциты (WBC)
7	7.0	HOL	0.059461	Холестерин
8	11.0	ACHTV	0.056378	АЧТВ
9	1.0	GMT	0.046284	Гематокрит
10	6.0	TROMB_PLT	0.045132	Тромбоциты (PLT)
11	9.0	CVET	0.043179	Цвет
12	2.0	YEAR_ROG	0.041890	NaN
13	5.0	GEMO	0.040107	Гемоглобин (HGB)
14	14.0	KALII	0.020941	Калий

Отметим, что в целом этот набор признаков согласуется с экспертными представлениями. Некоторую дискуссию вызвала группа электролитов (натрий и калий), что может быть результатом ограниченности экспериментальной выборки и будет исследовано при разработке прототипа системы.

Структура итогового дерева решений представлена на рис. 2.



(a)



(б)

Рис. 2. Итоговое дерево решений: (а)-левая ветка, (б)-правая ветка

Кроме того, для проверки качества работы алгоритмов на исходных данных была создана и обучена нейронная сеть специального вида. Задача нейронной сети – выявление отклонений клинического состояния на начальном этапе их формирования.

Коротко опишем результаты использования этой модели. В качестве исходных данных использовались показатели 2959 пациентов по 23 признакам. Так как неблагоприятные события составляли 2% от доступных статистических данных, был разработан метод, используя который нейронная сеть была обучена в условиях отсутствия знаний о неблагоприятных событиях. Поскольку тип события может быть описан булевой логикой, то класс неблагоприятных событий может быть определен как отрицание благоприятного. То есть задача нейронной сети – выявить отклонение от благоприятного события относительно индивидуальных показателей пациента. В качестве исходного обучающего множества использовалось 2826 наблюдений благоприятных событий на основе 23 признаков, в качестве тестового множества использовалась совокупность из

66 неблагоприятных событий (2% от общего множества) и, сопоставимо, 66 благоприятных событий (выбраны случайным образом, в обучающем множестве не участвовали). Была разработана и обучена автоассоциативная нейронная сеть на основе алгоритма обратного распространение ошибки (градиентного спуска).

Топология сети: 23 нейрона входного слоя, 12 нейронов скрытого слоя, 23 нейрона выходного слоя (рис.3)

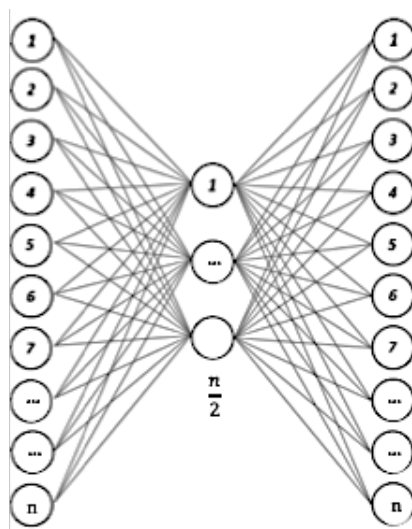


Рис. 3. Нейронная сеть

Результаты тестирования: на рассматриваемом тестовом множестве достигнуто 100% точности. Результат получен на основе 23 существенных признаков. При добавлении 12 несущественных признаков достигнута точность 96,96%, при этом 3% пришлось на ошибку второго рода, т.е. благоприятное событие принято за неблагоприятное.

Описание алгоритма: При обучении нейронная сеть в пространстве значительно меньшей размерности формирует комбинацию зависимостей, достаточных, чтобы на их основе интерпретировать в полной мере все 23 признака при обратном отображении. Нейронная сеть обучается до тех пор, пока не достигнет необходимой точности при обратном отображении. Скрытый слой может рассматриваться как нечеткое множество, содержащее 23 признака и функцию их принадлежности. Функция принадлежности формируется на основе весов связей между слоями. Таким образом зависимости фиксируются весами после обучения на максимально возможном множестве благоприятных событий. Далее при поступлении на вход неблагоприятного события возникают отклонения при

его обратном отображении. Событие определяется как неблагоприятное в случае возникновения отклонения хотя бы по одному из признаков.

Таблица 4. Список наиболее важных признаков

№	Признак	Важность
0	Пол пациента	0,238274
1	Удельный вес	0,220660
2	Натрий	0,161042
3	Эритроциты	0,147975
4	Гемоглобин (HGB)	0,138630
5	Гематокрит	0,137038
6	Рост пациента	0,129241
7	СОЭ (Скорость оседания эритроцитов)	0,114943
8	Холестерин	0,112352
9	Глюкоза	0,111754
10	Цвет	0,109221
11	Тромбоциты (PLT)	0,095458
12	Триглицериды	0,094066
13	Кислотность	0,090038
14	Протромбиновое время	0,088945
15	Мочевая кислота	0,083856
16	Международ. нормализов. отношение	0,083054
17	Креатинин	0,082132
18	Лейкоциты (WBC)	0,071010
19	Вес пациента	0,065011
20	Калий	0,064191
21	Фибриноген	0,054971
22	АЧТВ	0,054791

Степень значимости признака определяется на основе функций принадлежности признаков к нечеткому подмножеству, то есть на основе весов между первым и скрытым слоями. После обучения нейронной сети на множестве благоприятных событий может быть составлен рейтинг значимости признаков. Степени значимости признаков позволяют объяснить принятое нейронной сетью решение, поскольку отклонение по каждому из неблагоприятных событий фиксируется на основе конкретного признака.

Полученные результаты демонстрируют высокую эффективность разработанной нейронной сети при применении на медицинских данных подобного рода и подтверждают применимость подобной архитектуры

алгоритма для решения рассматриваемой задачи. Нейронная сеть была разработана на языке Python без использования специальных пакетов. Для операций с многомерными массивами использовались функции библиотеки NumPy, для предобработки и нормализации данных использовались функции библиотеки Pandas.

5. Заключение

Итоги проведенного исследования показали, что методы машинного обучения можно применять для анализа медицинских данных. Показано, что можно предсказывать неблагоприятный клинический исход пациента при поступлении в клинику, причем с хорошей точностью.

В ходе исследования были выявлены показатели, которые имели наибольшую прогностическую ценность (таблица 1.) Эндovasкулярные и аритмологические операции, несмотря на то, что имеют схожие черты и относятся к разновидностям малоинвазивной интервенционной радиологии, существенно отличаются друг от друга характером проводимого лечения и особенностями периоперационных осложнений. В литературных источниках доступна информация о предикторах неблагоприятного клинического исхода только для определенного типа операций. Однако такие клиничко-демографические параметры, как пожилой возраст пациента, наличие сопутствующих анемии (гемоглобин, гематокрит), воспалительного процесса (лейкоциты, СОЭ), нарушений в свертывающей системе крови (тромбоциты), метаболических (холестерин, триглицериды; глюкоза) и электролитных нарушений отражают неблагоприятное клиническое состояние пациента и ассоциированы с повышенным риском развития операционных осложнений, что нашло подтверждение в многочисленных клинических исследованиях и регистрах.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве рекомендации для медицинских работников при первичном осмотре поступивших пациентов, а также позволяют разработать систему прогнозирования риска неблагоприятного клинического исхода по технологии скоринговых систем. Получен вклад наиболее важных переменных в предсказание риска неблагоприятного клинического исхода. Имея значения этих признаков, медицинский работник может самостоятельно оценить риск неблагоприятного клинического исхода.

Список литературы

- [1] Brennan T.A. et al., "Incidence of adverse events and negligence in hospitalized patients: results of the Harvard Medical Practice Study I", *N. Engl. J. Med. Mass Medical Soc.*, **324**:6 (1991), 370–376.

- [2] Vincent C., Neale G., Woloshynowych M., “Adverse events in British hospitals: preliminary retrospective record review”, *Bmj. British Medical Journal Publishing Group*, **322**:7285 (2001), 517–519.
- [3] Wilson R.M. et al, “The quality in Australian health care study”, *Med. J. Aust. Sydney, Australia: Australian Medical Association*, **163**:9 (1914-, 1995), 458–471.
- [4] Baker G.R. et al, “The Canadian Adverse Events Study: the incidence of adverse events among hospital patients in Canada”, *Can. Med. Assoc. J. Can Med Assoc*, **170**:11 (2004), 1678–1686.
- [5] Runciman W.B., “246–251”, *BMJ Qual. Saf. BMJ Publishing Group Ltd*, **11**:3 (2002).
- [6] Kohn L.T., Corrigan J.M., Donaldson M.S., “Error reporting systems”, *National Academies Press (US)*, 2000.
- [7] Mayor S., “English NHS to set up new reporting system for errors”, *BMJ Br. Med. J. BMJ Publishing Group LTD*, **320**:7251 (2000), 1689.
- [8] Лудупова Е.Ю., “Врачебные ошибки. Литературный обзор”, *Вестник Росздравнадзора. Федеральное государственное бюджетное учреждение "Информационно-методический"*, 2016, № 2, 6–15.
- [9] Kass B.L., “Reducing and preventing adverse drug events to decrease hospital costs”, *Res. action*, **1** (2001), 1–20.
- [10] Bates D.W., Gawande A.A., “Improving safety with information technology”, *N. Engl. J. Med. Mass Medical Soc*, **348**:25 (2003), 2526–2534.
- [11] Parente S.T., McCullough J.S., “Health information technology and patient safety: evidence from panel data”, *Health Aff. Project HOPE-The People-to-People Health Foundation, Inc.*, **28**:2 (2009), 357–360.
- [12] Jao C.S., Hier D.B., “Clinical decision support systems: An effective pathway to reduce medical errors and improve patient safety”, *Decision Support Systems. InTech*, 2010.
- [13] Bates D.W. et al., “Reducing the frequency of errors in medicine using information technology”, *J. Am. Med. Informatics Assoc. BMJ Group BMA House, Tavistock Square, London, WC1H 9JR*, **8**:4 (2001), 299–308.
- [14] Berner E.S., “Clinical decision support systems”, *Springer*, **233** (2007).
- [15] Chaudhry B., “Computerized clinical decision support: will it transform healthcare?”, *Springer*, 2008.
- [16] Weaver C.A. et al., “Healthcare information management systems”, *Cham Springer Int. Publ. Springer*, 2016.
- [17] Шульман Е.И. et al., “Технические решения, свойства и возможности клинической информационной системы ДОКА”, *Системы*, 2009, 88.
- [18] Атьков О.Ю. et al., “Система поддержки принятия врачебных решений”, *Врач и информационные технологии. Общество с ограниченной ответственностью Издательский дом «Менеджер*, 2013, № 6.
- [19] Goodman J., Gorman L., Herrick D., “Health Information Technology: Benefits and Problems”, *Natl. Cent. Policy Anal. Washingt*, 2010.
- [20] Agarwal R. et al., “Research commentary—The digital transformation of healthcare: Current status and the road ahead”, *Inf. Syst. Res. INFORMS*, **21**:4 (2010), 796–809.
- [21] Goh J.M., Gao G., Agarwal R., “Evolving work routines: Adaptive routinization of information technology in healthcare”, *Inf. Syst. Res. INFORMS*, **22**:3 (2011), 565–585.

- [22] Ker J.-I. et al., “Deploying lean in healthcare: Evaluating information technology effectiveness in US hospital pharmacies”, *Int. J. Inf. Manage. Elsevier*, **34**:4 (2014), 556–560.
- [23] Ikehara S. et al., “Alcohol consumption and mortality from stroke and coronary heart disease among Japanese men and women: the Japan collaborative cohort study”, *Stroke. Am Heart Assoc*, **39**:11 (2008), 2936–2942.
- [24] Raghupathi W., Raghupathi V., “Big data analytics in healthcare: promise and potential”, *Heal. Inf. Sci. Syst. BioMed Central*, **2**:1 (2014), 3.
- [25] Groves P. et al., “The “big data” revolution in healthcare”, *Accelerating value and innovation. McKinsey Company*, 2016.

The adverse clinical outcome risk assessment by in-depth data analysis methods

**Gornyi B.E., Ryjov A.P., Strogalov A.S.,
Zhuravlev A.D., Khusaenov A.A., Shergin I.A.,
Feshchenko D.A., Abdullaev A.M., Kontsevaya A.V.**

The adverse events in the medical care providing process occurs in 10-15% of hospitalized patients. Even a few percent reducing of such events will save thousands of lives. One of the ways to solve this crucial problem is the usage of intelligent information technologies that allow the predicting of an unfavorable clinical outcome risk in patients. The paper presents the study results carried out jointly by the scientist of the National Research Center for Therapy and Preventive Medicine of the Ministry of Health of the Russian Federation and the scientist of Faculty of Mechanics and Mathematics of the Lomonosov Moscow State University, showing the applicability of data analysis methods in this important problem solving.

Keywords preventive medicine, adverse clinical outcome, in-depth data analysis.

References

- [1] Brennan T.A. et al., “Incidence of adverse events and negligence in hospitalized patients: results of the Harvard Medical Practice Study I”, *N. Engl. J. Med. Mass Medical Soc*, **324**:6 (1991), 370–376.
- [2] Vincent C., Neale G., Woloshynowych M., “Adverse events in British hospitals: preliminary retrospective record review”, *Bmj. British Medical Journal Publishing Group*, **322**:7285 (2001), 517–519.
- [3] Wilson R.M. et al, “The quality in Australian health care study”, *Med. J. Aust. Sydney, Australia: Australian Medical Association*, **163**:9 (1914-, 1995), 458–471.
- [4] Baker G.R. et al, “The Canadian Adverse Events Study: the incidence of adverse events among hospital patients in Canada”, *Can. Med. Assoc. J. Can Med Assoc*, **170**:11 (2004), 1678–1686.

- [5] Runciman W.B., “246–251”, *BMJ Qual. Saf. BMJ Publishing Group Ltd*, **11**:3 (2002).
- [6] Kohn L.T., Corrigan J.M., Donaldson M.S., “Error reporting systems”, *National Academies Press (US)*, 2000.
- [7] Mayor S., “English NHS to set up new reporting system for errors”, *BMJ Br. Med. J. BMJ Publishing Group LTD*, **320**:7251 (2000), 1689.
- [8] Ludupova E.Y., “Medical errors. Literature review”, *VESTNIK ROSZDRAVNADZORA. Federal State Budgetary Institution "Information and Methodological Center for Expert Evaluation, Recording and Analysis of Circulation of Medical Products"*, 2016, №2, 6–15 (In Russian).
- [9] Kass B.L., “Reducing and preventing adverse drug events to decrease hospital costs”, *Res. action*, **1** (2001), 1–20.
- [10] Bates D.W., Gawande A.A., “Improving safety with information technology”, *N. Engl. J. Med. Mass Medical Soc*, **348**:25 (2003), 2526–2534.
- [11] Parente S.T., McCullough J.S., “Health information technology and patient safety: evidence from panel data”, *Health Aff. Project HOPE-The People-to-People Health Foundation, Inc.*, **28**:2 (2009), 357–360.
- [12] Jao C.S., Hier D.B., “Clinical decision support systems: An effective pathway to reduce medical errors and improve patient safety”, *Decision Support Systems. InTech*, 2010.
- [13] Bates D.W. et al., “Reducing the frequency of errors in medicine using information technology”, *J. Am. Med. Informatics Assoc. BMJ Group BMA House, Tavistock Square, London, WC1H 9JR*, **8**:4 (2001), 299–308.
- [14] Berner E.S., “Clinical decision support systems”, *Springer*, **233** (2007).
- [15] Chaudhry B., “Computerized clinical decision support: will it transform healthcare?”, *Springer*, 2008.
- [16] Weaver C.A. et al., “Healthcare information management systems”, *Cham Springer Int. Publ. Springer*, 2016.
- [17] Shulman E.I. et al., “Technical solutions, properties and capabilities of the DOCA clinical information system”, *Systems*, 2009, 88 (In Russian).
- [18] Atkov O.Y. et al., “Clinical decision support system”, *Information technologies for the Physician. Manager of Health Care*, 2013, №6 (In Russian).
- [19] Goodman J., Gorman L., Herrick D., “Health Information Technology: Benefits and Problems”, *Natl. Cent. Policy Anal. Washingt*, 2010.
- [20] Agarwal R. et al., “Research commentary—The digital transformation of healthcare: Current status and the road ahead”, *Inf. Syst. Res. INFORMS*, **21**:4 (2010), 796–809.
- [21] Goh J.M., Gao G., Agarwal R., “Evolving work routines: Adaptive routinization of information technology in healthcare”, *Inf. Syst. Res. INFORMS*, **22**:3 (2011), 565–585.
- [22] Ker J.-I. et al., “Deploying lean in healthcare: Evaluating information technology effectiveness in US hospital pharmacies”, *Int. J. Inf. Manage. Elsevier*, **34**:4 (2014), 556–560.
- [23] Ikehara S. et al., “Alcohol consumption and mortality from stroke and coronary heart disease among Japanese men and women: the Japan collaborative cohort study”, *Stroke. Am Heart Assoc*, **39**:11 (2008), 2936–2942.
- [24] Raghupathi W., Raghupathi V., “Big data analytics in healthcare: promise and potential”, *Heal. Inf. Sci. Syst. BioMed Central*, **2**:1 (2014), 3.

- [25] Groves P. et al., “The “big data” revolution in healthcare”, *Accelerating value and innovation*. *McKinsey Company*, 2016.

Часть 2.
Специальные вопросы теории
интеллектуальных систем

Корректность базисной логики относительно абсолютной L -реализуемости

А. Ю. Коновалов¹

Для каждого счетного расширения L языка арифметики определяется абсолютная L -реализуемость предикатных формул. Доказывается, что базисная логика является корректной относительно этих семантик.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, формальная арифметика, базисная логика.

Понятие абсолютной L -реализуемости для предикатных формул, где L — произвольное расширение языка арифметики, впервые появляется в работах [1], [2], в которых показана некорректность интуиционистской логики предикатов относительно семантики абсолютной L -реализуемости. Таким образом, возникает вопрос о поиске более слабых исчислений, для которых бы семантика абсолютной L -реализуемости была бы корректна. Одним из таких исчислений может служить базисная логика предикатов ВQC [3]. В настоящей работе показана корректность исчисления ВQC относительно семантики абсолютной L -реализуемости. Аналогичный результат был ранее получен автором для семантик арифметической [4], гиперарифметической [5] и общерекурсивной [6] реализуемостей.

Перейдем к формальному изложению. Будем считать, что язык арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно рекурсивных функций, а также константы для обозначения всех натуральных чисел. Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P_i^n и функциональных символов f_i^n для всех $i \geq 0$, $n \geq 1$. Валентность символов P_i^n и f_i^n полагается равной n . Формулы языка LA' строятся обычным образом из атомов и логических констант \top, \perp при помощи логических связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ и кванторов \exists, \forall . Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \rightarrow \perp$. Бу-

¹Коновалов Александр Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. лаб. математических проблем искусственного интеллекта каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: konoval@yopmail.com.

Konovalev Aleksandr Yurevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, Laboratory of Mathematical Problem of Artificial Intelligence.

дем считать, что фиксирована геделева нумерация языка LA' . Формулу языка LA' с геделевым номером z обозначаем через Φ_z .

Фиксируем расширение L языка LA и интерпретацию \mathcal{N}_L языка L такие, что L — подязык языка LA' , а интерпретация \mathcal{N}_L является продолжением стандартной интерпретацией языка LA . Униформизацией формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ языка L , не содержащей параметров, отличных от x_1, \dots, x_n, y , будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge (\forall y_1 < y) \neg \Phi(x_1, \dots, x_n, y_1),$$

которую обозначим $\Phi^U(x_1, \dots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, где $f(k_1, \dots, k_n) = k$, если и только если $\mathcal{N}_L \models \Phi^U(k_1, \dots, k_n, k)$, т. е. формула $\Phi^U(k_1, \dots, k_n, k)$ истинна в интерпретации \mathcal{N}_L . Через I_n^L обозначаем множество геделев номеров формул языка L , не содержащих параметров отличных от x_1, \dots, x_n, y . Если $z \in I_n^L$, то посредством $\varphi_z^{L,n}$ обозначим n -местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_z^U . В выражениях вида $\varphi_z^{L,n}$ обычно будем опускать второй верхний индекс там, где он может быть восстановлен из контекста.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \dots, v_n)$, где P есть n -местная предикатная переменная, а v_1, \dots, v_n — предметные переменные, при помощи логических констант \top , \perp , связок \wedge , \vee , \rightarrow и кванторов \forall , \exists .

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c , которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2 , так что выполняются соотношения $p_1(c(x, y)) = x$ и $p_2(c(x, y)) = y$. В выражениях вида $p_1(t)$, $p_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Следуя [8], n -местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A . Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения всех натуральных чисел. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Для каждого натурального числа e , произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e \mathbf{r}_f^L A$ (число e реализует A при оценке f):

- 1) неверно $e \mathbf{r}_f^L \perp$;
- 2) верно $e \mathbf{r}_f^L \top$;
- 3) $e \mathbf{r}_f^L P(a_1, \dots, a_n) \iff e \in f(P)(a_1, \dots, a_n)$, если P есть n -местная предикатная переменная;

- 4) $e \mathbf{r}_f^L (\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 e \mathbf{r}_f^L \Phi$ и $\mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_f^L \Psi$;
5) $e \mathbf{r}_f^L (\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\mathbf{p}_1 e = 0$ и $\mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_f^L \Phi)$ или $(\mathbf{p}_1 e = 1$ и $\mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_f^L \Psi)$;
6) $e \mathbf{r}_f^L \exists x \Phi(x) \Leftrightarrow \mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_f^L \Phi(\mathbf{p}_1 e)$;
7) $e \mathbf{r}_f^L \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow e \in I_{n+1}^L$ и для всех¹ натуральных чисел s, a_1, \dots, a_n , если $s \mathbf{r}_f^L \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то определено $\varphi_e^L(a_1, \dots, a_n, s)$ и имеет место $\varphi_e^L(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_f^L \Psi(a_1, \dots, a_n)$;
8) $e \mathbf{r}_f^L \forall x_1, \dots, x_n \Phi \Leftrightarrow e \mathbf{r}_f^L \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора \forall , и логическая связка \rightarrow не является главной в Φ .

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно L -реализуемой*, если для любой оценки f формулы A найдется такое натуральное число e , что $e \mathbf{r}_f^L A$. По аналогии с определением примитивно рекурсивно реализуемой секвенции из работы С. Салехи [7] распространим на секвенции понятие абсолютной L -реализуемости.

$$e \mathbf{r}_f^L A(\bar{x}) \Rightarrow B(\bar{x}) \Leftrightarrow e \mathbf{r}_f^L \forall \bar{x} (A(\bar{x}) \rightarrow B(\bar{x})),$$

где $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$. Будем говорить, что секвенция $A \Rightarrow B$ является *абсолютно L -реализуемой*, если для любой оценки f предикатных формул A и B найдется такое натуральное число e , что $e \mathbf{r}_f^L A \Rightarrow B$.

Базисная логика предикатов в виде секвенциального исчисления ВQC описана в [3]. Мы будем рассматривать вариант исчисления ВQC в языке без предметных констант, функциональных символов и равенства. Этот фрагмент задается следующими схемами аксиом, где $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}$ — списки предметных переменных:

- A1) $A \Rightarrow A$;
A2) $A \Rightarrow \top$;
A3) $\perp \Rightarrow A$;
A4) $A \wedge \exists x B \Rightarrow \exists x (A \wedge B)$, где переменная x не свободна в A ;
A5) $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
A6) $\forall \mathbf{x} (A \rightarrow B) \wedge \forall \mathbf{x} (B \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (A \rightarrow C)$;
A7) $\forall \mathbf{x} (A \rightarrow B) \wedge \forall \mathbf{x} (A \rightarrow C) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (A \rightarrow B \wedge C)$;
A8) $\forall \mathbf{x} (B \rightarrow A) \wedge \forall \mathbf{x} (C \rightarrow A) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (B \vee C \rightarrow A)$;
A9) $\forall \mathbf{x} (A(\mathbf{x}) \rightarrow B(\mathbf{x})) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (A(\mathbf{t}) \rightarrow B(\mathbf{t}))$, где \mathbf{t} — список переменных, каждая из которых свободна для соответствующей переменной в формулах $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$;

A10) $\forall \mathbf{x} (A(\mathbf{x}) \rightarrow B(\mathbf{x})) \Rightarrow \forall \mathbf{y} (A(\mathbf{x}) \rightarrow B(\mathbf{x}))$, где каждая переменная из списка \mathbf{y} не входит свободно в левую часть секвенции;

¹ Однако, если в списке x_1, \dots, x_n на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j , то мы не допускаем рассмотрение тех списков a_1, \dots, a_n , в которых $a_i \neq a_j$.

A11) $\forall \mathbf{x}, x (B \rightarrow A) \Rightarrow \forall \mathbf{x} (\exists x B \rightarrow A)$, где переменная x не свободна в A .

Исчисление ВQC имеет следующие правила вывода:

$$R1) \frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C};$$

$$R2) \frac{A \Rightarrow B \quad A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C};$$

$$R3) \frac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B} \text{ (a)}, \quad \frac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow C} \text{ (б)};$$

$$R4) \frac{B \Rightarrow A \quad C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A};$$

$$R5) \frac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A} \text{ (a)}, \quad \frac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A} \text{ (б)};$$

R6) $\frac{A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x})}{A(\mathbf{t}) \Rightarrow B(\mathbf{t})}$, где каждая переменная из списка \mathbf{t} свободна для соответствующей переменной из списка \mathbf{x} в формулах $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$;

$$R7) \frac{B \Rightarrow A}{\exists x B \Rightarrow A}, \text{ где переменная } x \text{ не свободна в } A;$$

$$R8) \frac{\exists x B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}, \text{ где переменная } x \text{ не свободна в } A;$$

R9) $\frac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \mathbf{x} (B \rightarrow C)}$, где каждая переменная из списка \mathbf{x} не свободна в A .

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая выводимая в базисной логике предикатов секвенция является абсолютно L -реализуемой.*

Доказательство теоремы 1 осуществляется индукцией по построению вывода в исчислении ВQC. Ход доказательства с незначительными изменениями повторяет [4, теорема 2].

Если в исчислении ВQC выводится секвенция $\Gamma \Rightarrow A$, то в этом случае говорят, что формула A выводится в ВQC. Следующая теорема получается как следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *Всякая замкнутая предикатная формула, выводимая в базисной логике предикатов, является абсолютно L -реализуемой.*

Понятие L -реализуемости является прямым обобщением арифметической [4] и гиперарифметической [5] реализуемостей. Еще большего уровня абстракции можно достичь, если использовать в определении реализуемости вместо какого-то конкретного класса функций произвольный класс функций V , свойства которого задаются аксиоматически. Понятие V -реализуемости определяется в статьях [9], [10] для формул языка арифметики. В работах [11], [12], [13] рассматриваются различные варианты определения понятия V -реализуемости для предикатных формул и исследуется корректность классической логики и принципа Маркова

относительно V -реализуемости. В дальнейшей работе планируется обобщить полученные для L -реализуемости результаты о интуиционистской и базисной логиках на V -реализуемость.

Список литературы

- [1] А. Ю. Коновалов, “Некорректность интуиционистской логики относительно L -реализуемости”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 41–44.
- [2] А. Ю. Коновалов, “Абсолютная L -реализуемость и интуиционистская логика”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2019, № 2, 50–53.
- [3] W. Ruitenburg, “Basic predicate calculus”, *Notre Dame J. Formal Logic*, **39**:1 (1998), 18–46.
- [4] А. Ю. Коновалов, “Арифметическая реализуемость и базисная логика”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2016, № 1, 52–56.
- [5] В. Е. Плиско, А. Ю. Коновалов, “О гиперарифметической реализуемости”, *Математические заметки*, **98**:5 (2015), 725–746.
- [6] А. Ю. Коновалов, “Общерекурсивная реализуемость и базисная логика”, *Алгебра и логика*, **59**:5 (2020), 542–566.
- [7] S. Salehi, “Provably total functions of Basic Arithmetic”, *Mathematical Logic Quarterly*, **49**:3 (2003), 316–322.
- [8] В. Е. Плиско, “Абсолютная реализуемость предикатных формул”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 315–334.
- [9] А. Ю. Коновалов, “Критерий совпадения V -реализуемости формул расширения L языка арифметики с классической семантикой языка L ”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 127–130.
- [10] А. Ю. Коновалов, “Обобщенная реализуемость для расширений языка арифметики”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2019, № 4, 50–54.
- [11] А. Ю. Коновалов, “Условие корректности и полноты классической логики для семантики относительно V -реализуемости”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 133–136.
- [12] А. Ю. Коновалов, “Равномерная V -реализуемость принципа Маркова в V -перечислимой области”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 99–103.
- [13] А. Ю. Коновалов, “Обобщенная реализуемость и принцип Маркова”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2020, № 1, 60–64.

Basic Logic is sound with respect to absolute L -realizability Kononov A.Yu.

An absolute L -realizability of predicate formulas is introduced for all countable extensions L of the language of arithmetic. It is proved that the basic logic is sound with this semantics.

Keywords: constructive semantics, realizability, absolute realizability, formal arithmetic, basic logic.

References

- [1] A. Yu. Konovalov, “Nekorrektnost’ intuicionistskoj logiki otnositelno L -realizuemosti [Intuitionistic Logic is not sound with respect to the L -realizability]”, *Intellektual’nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **22:3** (2018), 41–44 (in Russian), <http://mi.mathnet.ru/ista148>.
- [2] A. Yu. Konovalov, “Absolute L -realizability and intuitionistic logic”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74:2** (2019), 79–82 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132219020086.
- [3] W. Ruitenburg, “Basic predicate calculus”, *Notre Dame J. Formal Logic*, **39:1** (1998), 18–46, DOI: 10.1305/ndjfl/1039293019.
- [4] A. Yu. Konovalov, “Arithmetical realizability and basic logic”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **71:1** (2016), 35–38 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132216010071.
- [5] V. E. Plisko, A. Yu. Konovalov, “On hyperarithmetical realizability”, *Mathematical Notes*, **98:5** (2015), 778–797 (in Russian), DOI: 10.1134/S0001434615110073.
- [6] A. Yu. Konovalov, “General Recursive Realizability and Basic Logic”, *Algebra and Logic*, **59** (2020), 367–384 (in Russian), DOI: 10.1007/s10469-020-09610-y.
- [7] S. Salehi, “Provably total functions of Basic Arithmetic”, *Mathematical Logic Quarterly*, **49:3** (2003), 316–322, DOI: 10.1002/malq.200310032.
- [8] V. E. Plisko, “Absolute realizability of predicate formulas”, *Mathematics of the USSR - Izvestiya*, **22:2** (1984), 291–308 (in Russian), DOI: 10.1070/IM1984v022n02ABEH001444.
- [9] A. Yu. Konovalov, “Kriterij sovpadeniya V -realizuemosti formul rasshireniya L yazyka arifmetiki s klassicheskoj semantikoj yazyka L [The V -realizability for L -formulas coincides with the classical semantics iff V contains all L -definable functions]”, *Intellektual’nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **22:3** (2018), 127–130 (in Russian), <http://mi.mathnet.ru/eng/ista153>.
- [10] A. Yu. Konovalov, “Generalized Realizability for Extensions of the Language of Arithmetic”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74:4** (2019), 167–170 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132219040065.
- [11] A. Yu. Konovalov, “Uslovie korrektnosti i polnoty klassicheskoj logiki dlya semantiki otnositel’noj V -realizuemosti [The condition for soundness and completeness of Classical Logic with respect to the semantics of relative V -realizability]”, *Intellektual’nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **23:1** (2019), 133–136 (in Russian), <http://intsysjournal.org/pdfs/23-1/Konovalov2.pdf>.
- [12] A. Yu. Konovalov, “Ravnomernaya V -realizuemost’ principa Markova v V -pereichislimoj oblasti [Markov’s Principle is uniformly V -realizable in any V -enumerable domain]”, *Intellektual’nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **23:1** (2019), 99–103 (in Russian), <http://mi.mathnet.ru/eng/ista219>.
- [13] A. Yu. Konovalov, “Generalized Realizability and Markov’s Principle”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **75:1** (2020), 38–41 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132220010064.

ES_I -замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов

В. И. Пантелеев¹, Э. С. Тагласов²

Мультифункции представляют собой функции, задаваемые на конечном множестве и возвращающие в качестве своих значений все подмножества рассматриваемого множества. Оператор суперпозиции приводит к континууму замкнутых множеств. Поэтому возникает необходимость рассмотрения операторов замыкания, которые наряду с суперпозицией содержат другие операции. В работе рассматривается ES_I -замыкание мультифункций, полученное применением операции суперпозиции, основанной на пересечении множеств, и оператора разветвления по предикату равенства. Для мультифункций, задаваемых на двухэлементном множестве, указаны все предполные множества, сформулирован и доказан критерий полноты. Приведена классификация мультифункций, основанная на принадлежности предполным множествам, описаны все типы базисов.

Ключевые слова: замыкание; предикат равенства; мультифункция; замкнутое множество; суперпозиция; критерий полноты.

Введение

Теория гиперопераций — функций, которые отображают наборы элементов из множества A в непустые подмножества A берет начало в 30-х годах прошлого века, когда Ф. Марти [17] определил гипергруппы, начал анализировать их свойства и применять их к группам, рациональным дробям и алгебраическим функциям. Под гипергруппой понималось множество A с бинарной операцией умножения $(a, b) \rightarrow ab$, сопоставляющей любой паре элементов из A непустое подмножество в A .

Впоследствии эта идея была развита и гипергруппы стали рассматриваться как частный случай гиперструктур — множеств с заданными

¹Пантелеев Владимир Иннокентьевич — д.ф.-м.н, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com;

Panteleev Vladimir Innokentievich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University

²Тагласов Эдуард Станиславович — магистрант ИМИТ ИГУ, e-mail: taglasov1@gmail.com

Taglasov Eduard Stanislavovich, student, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University

на них гипероперациями. С различными приложениями гиперструктур можно ознакомиться в [12, 1]. Следующим шагом в теории гиперструктур стало изучение частичных гиперструктур — множеств с заданными на них частичными гипероперациями¹. Частичные гипероперации отображают наборы элементов из множества A в произвольные (в том числе и пустое) подмножества A .

Наряду с изучением гиперструктур стали активно изучаться и алгебры (частичных) гиперопераций. При этом отдельно выделяют алгебры операций и алгебры частичных операций. Операции на множестве понимаются в обычном смысле, а частичные операции отображают наборы элементов из множества A в элементы множества A , но возможно и в пустое подмножество A . Отождествив одноэлементное подмножество $\{a\}$ с элементом a , можно говорить об алгебрах операций, частичных операций и гиперопераций как подалгебрах алгебры частичных гиперопераций. Стоит заметить, что наряду с термином «операция» достаточно часто в литературе используется и термин «функция»². Алгебре функций и алгебре частичных функций на конечном множестве посвящена монография [14]. Алгебру функций на конечном множестве A часто называют алгеброй $|A|$ -значных функций.

Говоря об алгебре функций, частичных функций, гиперфункций или частичных гиперфункций подразумевают, что используется оператор суперпозиции. Суперпозиция связана с такими понятиями как терм и значение терма на наборе значений неизвестных. Это приводит к тому, что во-первых, формально, суперпозиция не является алгебраической операцией на множестве функций. В монографии [3] показано, как это формальное противоречие можно преодолеть. Во-вторых для гиперфункций и мультифункций при вычислении значения терма на заданном наборе значений переменных возможна ситуация, когда приходится доопределять функции, заданные на одном множестве, до функций, заданных на другом множестве. И это доопределение можно выполнить различными способами. И в-третьих, решетки подалгебр функций, частичных, гипер- и частичных гиперфункций являются счетными или континуальными, поэтому интерес вызывают алгебры, которые наряду с операцией суперпозиции, содержат и другие операции, приводящие к конечному множеству подалгебр. Одной из таких является операция разветвления по предикату [4].

В представленной работе рассматриваются мультифункции, заданные на множестве $E_2 = \{0, 1\}$. При этом, традиционно, вместо терми-

¹В работе [19] вместо термина «частичная гипероперация» используется термин «мультиоперация».

²Вместо термина «частичная гиперфункция» мы, следуя [19], используем термин «мультифункция».

на «алгебра» используется термин «замкнутое множество», вместо «порождающее множество» — «полное множество». Замыкание множеств мультифункций использует суперпозицию и разветвление по предикату равенства (E -замыкание). Сформулирован и доказан критерий полноты множества мультифункций, перечислены все предполные множества, выполнена классификация мультифункций относительно принадлежности предполным множествам и найдены все типы базисов. Применен подход, основанный на рассмотрении мультифункций, как не всюду определенных функций.

E -замыкание для множеств частичных функций изучалось в [5, 6, 7], а для гиперфункций — в [9, 18].

1. Основные понятия и определения

Всюду определенной n -местной функцией на конечном множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ называется отображение $f : A^n \rightarrow A$.

Пусть $A \subseteq C$, тогда $f : A^n \rightarrow C$ называется n -местной не всюду определенной функцией на A , а множество $C \setminus A$ — множеством «неопределенностей» функции f .

Пусть $f(f_1, \dots, f_m)$ — суперпозиция с внешней функцией f и внутренними функциями f_1, \dots, f_m .

Если функции f, f_1, \dots, f_m всюду определены на A , то значение суперпозиции $f(f_1, \dots, f_m)$ на наборе $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ определяется как

$$f(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)).$$

Для не всюду определенных функций в общем случае набор

$$(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n))$$

принадлежит C^m и не принадлежит A^m , что не позволяет вычислить

$$f(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)).$$

Доопределим некоторым образом функцию f до функции $f^\# : C^m \rightarrow C$, причем для произвольного набора $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ должно выполняться

$$f(a_1, \dots, a_m) = f^\#(a_1, \dots, a_m).$$

Тогда значение суперпозиции $f(f_1, \dots, f_m)$ на наборе (a_1, \dots, a_n) можно определить следующим образом:

$$f(f_1, \dots, f_m)(a_1, \dots, a_n) = f^\#(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)).$$

В соответствии с этим определением находится значение супепозиции на всех наборах и значит суперпозиция $f(f_1, \dots, f_m)$ задает некоторую не всюду определенную функцию g на множестве A .

Первые исследования в теории дискретных не всюду определенных функций были посвящены так называемым частичным функциям. Множество неопределенностей для таких функций состоит из одного элемента, обозначаемого символом $*$. Первый важный результат для этих функций был получен в [11]. В этой работе сформулирован и доказан критерий полноты для частичных функций, заданных на двухэлементном множестве. В [2] есть ссылка на более раннюю публикацию этого результата в Китае.

Доопределение частичной функции $f : A^n \rightarrow A \cup \{*\}$ до функции $f^\# : (A \cup \{*\})^n \rightarrow A \cup \{*\}$ выполняется следующим образом: для произвольного набора (a_1, \dots, a_n) , содержащего $*$, выполняется

$$f^\#(a_1, \dots, a_n) = *.$$

В [10] тоже рассматривались не всюду определенные функции, задаваемые на двухэлементном множестве $A = \{0, 1\}$. Множество неопределенностей также состояло из одного элемента, который обозначался символом 2 , но фактически это было множество $\{0, 1\}$, т.е. речь в работе шла о гиперфункциях.

Дадим строгие определения множеств мультифункций (\mathcal{M}), гиперфункций (\mathcal{H}), частичных (\mathcal{O}^*) и всюду определенных (\mathcal{O}) функций на конечном множестве A . Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\mathcal{M}_n = \{f \mid f : A^n \rightarrow 2^A\}, \quad \mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n,$$

$$\mathcal{H}_n = \{f \mid f : A^n \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}\}, \quad \mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n,$$

$$\mathcal{O}_n^* = \{f \mid f : A^n \rightarrow A \cup \{\emptyset\}\}, \quad \mathcal{O}^* = \bigcup_n \mathcal{O}_n^*,$$

$$\mathcal{O}_n = \{f \mid f : A^n \rightarrow A\}, \quad \mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n.$$

Мощность множества A называется рангом мультифункций.

Отождествив одноэлементное подмножество $\{a\}$, $a \in A$ с элементом a , получим следующие вложения:

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{M}, \quad \mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}.$$

С учетом вышеприведенного отождествления мультифункции можно рассматривать как не всюду определенные на множестве A функции,

а пустое подмножество и подмножества, мощность которых больше 1, как неопределенности.

Доопределение m -местной мультифункции f , заданной на множестве A до всюду определенной функции $f^\#$ на множестве 2^A удовлетворяет условию

$$f^\#(\{a_1\}, \dots, \{a_m\}) = f(a_1, \dots, a_m)$$

для всех $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$. Если для некоторого $j \in \{1, \dots, m\}$ выполняется $B_j = \emptyset$, то значение $f^\#(B_1, \dots, B_m)$ естественно положить равным \emptyset .

Для остальных наборов (B_1, \dots, B_m) (в наборе есть подмножество мощности больше 1), принадлежащих $(2^A \setminus \{\emptyset\})^m$ часто встречаемым [15, 16, 19, 20, 13] является следующее определение

$$f^\#(B_1, \dots, B_m) = \bigcup_{\beta_1 \in B_1, \dots, \beta_m \in B_m} f(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (1)$$

используемое в гиперструктурах.

Набор $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in A^m$ называется уточнением набора $(B_1, \dots, B_m) \in (2^A \setminus \{\emptyset\})^m$, если для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ выполняется $\beta_i \in B_i$.

Таким образом, значение функции $f^\#$ на наборе (B_1, \dots, B_m) определяется как объединение значений f полученных при всех возможных уточнениях набора (B_1, \dots, B_m) .

Стоит заметить, что, как показывает следующий пример, при таком доопределении не выполняется равенство

$$[f(g_1, \dots, g_n)]^\# = f^\#(g_1^\#, \dots, g_n^\#).$$

Пример 1. [10] Пусть мультифункции f, φ, ψ , заданы на множестве $A = \{0, 1\}$ следующим образом

f	0	1	φ	0	1	ψ	0	1
0	{1}	{1}	0	{1}	{0, 1}	0	{1}	{0}
1	{1}	{0}	1	{0, 1}	{0}	1	{0}	{0, 1}

Доопределим их до функций $f^\#, \varphi^\#, \psi^\#$ (при этом не будем отображать наборы, содержащие \emptyset)

$f^\#$	{0}	{1}	{0, 1}	$\varphi^\#$	{0}	{1}	{0, 1}	$\psi^\#$	{0}	{1}	{0, 1}
{0}	{1}	{1}	{1}	{0}	{1}	{0, 1}	{0, 1}	{0}	{1}	{0}	{0, 1}
{1}	{1}	{0}	{0, 1}	{1}	{0, 1}	{0}	{0, 1}	{1}	{0}	{0, 1}	{0, 1}
{0, 1}	{1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}	{0, 1}

Пусть $g = f(\varphi, \psi)$. В соответствии с (1) получим

g	0	1		$g^\#$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	u	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$		$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
				$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

Таким образом

$$[f(\varphi, \psi)]^\#(\{1\}, \{0, 1\}) = \{1\},$$

$$\text{но } [f^\#(\varphi^\#, \psi^\#)](\{1\}, \{0, 1\}) = f^\#(\varphi^\#(\{1\}, \{0, 1\}), \psi^\#(\{1\}, \{0, 1\})) =$$

$$= f^\#(\{0, 1\}, \{0, 1\}) = \{0, 1\}.$$

И значит $[f(\varphi, \psi)]^\# \neq f^\#(\varphi^\#, \psi^\#)$.

В работе [8] вводится доопределение f до $f^\#$, отличное от (1). Среди всех множеств, являющихся значениями мультифункции f при всех возможных уточнениях набора $(B_1, \dots, B_m) \in (2^A \setminus \{\emptyset\})^m$ выбирается общее подмножество, если оно отлично от пустого. Иначе, когда не найдены общие подмножества, берется объединение.

Данный подход находит объяснение, например, при интерпретации подмножеств как множеств различных истинностных значений или ответов экспертов. При этом естественным является процесс нахождения общих элементов (ответов), если они есть. Если таких элементов нет, то записываются все возникающие истинностные значения (ответы).

Дадим строгое определение.

Для мультифункции $f(x_1, \dots, x_m)$, заданной на конечном множестве A доопределение до функции $f^\#(x_1, \dots, x_m)$ на множестве 2^A выполняется следующим образом: если $(B_1, \dots, B_m) \in 2^A$, то

$$f^\#(B_1, \dots, B_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_1 \in B_1, \dots, \beta_m \in B_m} f(\beta_1, \dots, \beta_m), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_1 \in B_1, \dots, \beta_m \in B_m} f(\beta_1, \dots, \beta_m), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Везде, ниже, мы будем использовать это доопределение и не будем отличать множество $\{a\}$ и элемент a (если это не вызывает недоразумения) и, соответственно, отождествлять утверждение $a \in a$ с утверждением $a \in \{a\}$ для $a \in A$.

Несложно убедиться в справедливости неравенства из примера 1 и для определения (2).

Определим множество $\mathcal{M}^\#$ как $\mathcal{M}^\# = \{f^\# \mid f \in \mathcal{M}\}$. Множество $\mathcal{M}^\#$ является подмножеством множества всюду определенных функций на множестве 2^A . Каждая функция из множества $\mathcal{M}^\#$ на наборах, составленных из одноэлементных подмножеств может принимать произвольное значение, на наборах, содержащих пустое подмножество, она

возвращает пустое подмножество, а на остальных наборах ее значение находится по формуле (2).

Приведенный выше пример 1 показывает, что справедливо

Предложение 1. *Множество $M^\#$ не замкнуто относительно суперпозиции всюду определенных функций на множестве 2^A .*

Напомним, что значение суперпозиции $f(f_1, \dots, f_m)$ на произвольном наборе $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ определяется как

$$f(f_1, \dots, f_m)(a_1, \dots, a_n) = f^\#(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)). \quad (3)$$

В соответствии с этим, положим по определению

$$f(B_1, \dots, B_m) = f^\#(B_1, \dots, B_m) \quad (4)$$

для произвольного набора $(B_1, \dots, B_m) \in (2^A)^m$.

Для всюду определенных функций определение (3) совпадает с обычным определением суперпозиции, так как в этом случае набор

$$(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n))$$

принадлежит A^m , а на таких наборах функция $f^\#$ совпадает с f .

Следующий пример показывает, что для суперпозиции мультифункций не выполняется тождество обобщенной ассоциативности, т.е. в общем случае

$$[f(g_1, \dots, g_m)](u_1, \dots, u_t) \neq f(g_1(u_1, \dots, u_t), \dots, g_m(u_1, \dots, u_t)).$$

Пример 2. Пусть мультифункции $g(x_1, x_2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $u(x)$, задаются следующими таблицами

x_1	x_2	g	x	f_1	f_2	u
0	0	{0}	0	{0}	{0}	{0, 1}
0	1	{1}	1	{1}	{1}	{0, 1}
1	0	{0, 1}	0	{0}	{0}	{0, 1}
1	1	{0}	1	{1}	{1}	{0, 1}

Рассмотрим суперпозицию $f(x) = g(f_1(x), f_2(x))$. Имеем

$$f(0) = \{0\} \text{ и } f(1) = \{0\}.$$

Для $f(u)$ выполняется

$$f(u)(0) = f(u(0)) = f(\{0, 1\}) = f(0) \cap f(1) = \{0\}.$$

А для $g(f_1(u(x)), f_2(u(x)))$ справедливо

$$\begin{aligned} g(f_1(u(x)), f_2(u(x)))(0) &= g(\{0, 1\}, \{0, 1\}) = \\ &= g(0, 0) \cup g(0, 1) \cup g(1, 0) \cup g(1, 1) = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

В теории дискретных функций важную роль играет понятие сохранение предиката функцией. Распространим это понятие на мультифункции.

Пусть ρ^m — m -местный предикат, заданный на множестве 2^A .

Для мультифункции $f(x_1, \dots, x_n)$ будем говорить, что она сохраняет предикат ρ^m , если для любых n наборов

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$$

из предиката выполняется то, что набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

также принадлежит предикату.

В соответствии с формулой (4) данное определение является корректным.

Множество функций, сохраняющих предикат R , обозначим как $\text{Pol } R$.

Замечание 1. Если m -местный предикат R содержит всего t наборов, то его удобно задавать в виде матрицы размерности $m \times t$ в которой столбцами являются наборы из предиката.

Пусть задана n -местная мультифункция g и наборы $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi})$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), принадлежащие некоторому m -местному предикату, тогда столбец $\begin{pmatrix} g(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ g(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{pmatrix}$ будем обозначать как $g \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ и называть значением функции на данных наборах.

В соответствии с этим, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет m -местный предикат

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1t} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mt} \end{pmatrix},$$

если для любых n столбцов $(\beta_{1j}, \dots, \beta_{mj})^T, j \in \{1, \dots, n\}$ из R выполняется

$$f \begin{pmatrix} \beta_{11} \dots \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \dots \beta_{mn} \end{pmatrix} \in R.$$

В общем случае множество мультифункций, сохраняющих некоторый предикат, не обязательно замкнуто относительно суперпозиции. Для m -местного предиката R определим m -местный предикат R' следующим

образом:

$$(B_1, \dots, B_m) \in R' \Leftrightarrow (B_1, \dots, B_m) \in R \text{ и } |B_i| = 1 \text{ для всех } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Предикат R' содержит те и только те наборы из предиката R , в которых не встречается пустое подмножество и подмножества мощности больше 1. Тогда справедлива следующая основная лемма.

Лемма 1. Пусть мультифункции g, g_1, \dots, g_t заданы на конечном множестве A . Если мультифункция f получена суперпозицией мультифункций g, g_1, \dots, g_t , сохраняющих некоторый m -местный предикат R , заданный на множестве 2^A , то на наборах, которые принадлежат R' , значение функции f принадлежит R .

Доказательство. Пусть наборы $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ принадлежат R' . Так как все эти наборы построены из одноэлементных подмножеств, то при вычислении значения функции f не будет использоваться формула (2). Поэтому

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(a_{11}, \dots, a_{1n}) \\ \dots \\ f(a_{m1}, \dots, a_{mn}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g(g_1(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, g_t(a_{11}, \dots, a_{1n})) \\ \dots \\ g(g_1(a_{m1}, \dots, a_{mn}), \dots, g_t(a_{m1}, \dots, a_{mn})) \end{pmatrix} = \\ &= g \begin{pmatrix} g_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) & \dots & g_t(a_{11}, \dots, a_{1n}) \\ \dots & & \\ g_1(a_{m1}, \dots, a_{mn}) & \dots & g_t(a_{m1}, \dots, a_{mn}) \end{pmatrix} = \\ &= g \left(g_1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \dots, g_t \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Справедливость леммы следует из того, что мультифункции g, g_1, \dots, g_t , сохраняют предикат R . \square

Лемма 2. Пусть мультифункция $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получена из мультифункции $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ введением фиктивной переменной x_i , предикат R задан на множестве 2^A . Мультифункция f сохраняет предикат R тогда и только тогда, когда мультифункция g сохраняет предикат R .

Доказательство. Доказательство леммы следует из того, что для любого набора $(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$ из $(2^A)^n$ выполняется

$$\begin{aligned}
 & f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) = \\
 & = \begin{cases} \bigcap_{\alpha_i \in A_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\alpha_i \in A_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), & \text{иначе} \end{cases} = \\
 & = \begin{cases} \bigcap_{\alpha_i \in A_i} g(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\alpha_i \in A_i} g(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), & \text{иначе} \end{cases} = \\
 & = g(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n)
 \end{aligned}$$

□

Замечание 2. Пусть мультифункция $f(y_1, \dots, y_{n-1})$ получена из мультифункции $g(x_1, \dots, x_n)$ отождествлением переменных x_i и x_j . Пусть g сохраняет некоторый предикат R , тогда необязательно, что f сохраняет предикат R .

Ниже, в работе рассматриваются мультифункции, задаваемые на множестве $A = E_2 = \{0, 1\}$. При этом для множества E_2 используется обозначение «-» (прочерк), а для пустого множества — обозначение *. Наряду с термином мультифункция используется термин функция, если это не вызывает недоразумения.

Так как мы не различаем множество из одного элемента и элемент этого множества, то наборы из элементов множества E_2 считаем наборами из элементов множества 2^{E_2} , а наборы, состоящие из одноэлементных подмножеств, считаем также наборами из элементов множества E_2 .

Для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ противоположный набор $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ определяется обычным образом, т.е. $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$.

Мультифункция f , зависящая от n переменных, записывается в виде вектора $(\tau_{\bar{0}}, \dots, \tau_{\bar{1}})$ длины 2^n , где каждый элемент $\tau_{\bar{\sigma}}$ есть $f(\bar{\sigma})$, а $\bar{0}, \dots, \bar{1}$ — все двоичные представления чисел $0, \dots, 2^n - 1$, соответственно. Для одноместных и двухместных мультифункций такой вектор имеет вид $(f(0) f(1))$ и $(f(0, 0) f(0, 1) f(1, 0) f(1, 1))$, соответственно.

Пусть f — мультифункция, зависящая от n переменных, f_1, \dots, f_m — мультифункции или переменные. Для мультифункции g , задаваемой суперпозицией $f(f_1, \dots, f_m)$ по правилам (3) и (2), будем говорить, что она получена S_I -суперпозицией из функций f, f_1, \dots, f_m .

В соответствии с (4) мы можем находить значение мультифункции на наборах, составленных из элементов множества 2^{E_2} . При этом, на любом наборе, содержащем *, мультифункция возвращает *.

Пример 3.

$$f(0, -, 1) = \begin{cases} f(0, 0, 1) \cap f(0, 1, 1), & \text{если пересечение не пусто;} \\ f(0, 0, 1) \cup f(0, 1, 1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

и $f(0, *, 1) = *$

Функция g на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\emptyset\})^n$ возвращает $*$, тогда и только тогда, когда на любом уточнении этого набора она принимает значение $*$.

Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\emptyset\})^n$, а C_β — множество всех возможных уточнений набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Для мультифункции $g(x_1, \dots, x_n)$ через $g(C_\beta)$ обозначим множество $\{g(\tilde{\alpha}), \tilde{\alpha} \in C_\beta\}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения о связи значения мультифункции g на наборе и уточнениях набора.*

- $g(C_\beta) \in \{\{-\}, \{0, 1\}, \{0, 1, -\}, \{*, -\}, \{*, 1, -\}, \{*, 0, -\}, \{*, 1, 0\}, \{*, 1, -, 0\}\}$ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = -$.
- $g(C_\beta) \in \{\{0\}, \{0, -\}, \{0, *\}\}$ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = 0$.
- $g(C_\beta) \in \{\{1\}, \{1, -\}, \{1, *\}\}$ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = 1$.
- $g(C_\beta) \in \{\{*\}\}$ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = *$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из формулы (2). \square

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из функций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5)$$

Определим ES_I -замыкание множества $Q \subseteq \mathcal{M}_2$ как множество всех мультифункций из \mathcal{M}_2 , которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных, S_I -суперпозиции и разветвления по предикату равенства. ES_I -замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$. Мультифункции, отличающиеся только фиктивными переменными, будем обозначать одинаковыми символами.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием называется ES_I -замкнутым множеством. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ порождает ES_I -замкнутое множество Q (ES_I -полно в

множестве Q), если $[R] = Q$. ES_I -полные множества в множестве \mathcal{M}_2 называем ES_I -полными множествами или просто полными множествами. ES_I -полные множества в множестве \mathcal{O}_2 (\mathcal{O}_2^*) называем E -полными.

Множество $R \subseteq \mathcal{M}_2$ называется ES_I -предполным, если ES_I -замыкание R отлично от \mathcal{M}_2 , но ES_I -замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с \mathcal{M}_2 для любой мультифункции $f \notin R$.

2. Замкнутые множества

Введем в рассмотрение следующие девять множеств мультифункций ранга 2:

$$K_1 = \text{Pol } R_1, R_1 = (0 *);$$

$$K_2 = \text{Pol } R_2, R_2 = (1 *);$$

$$K_3 = \mathcal{O}_2^*;$$

$$K_4 = \mathcal{H}_2;$$

$$K_5 = \{f \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{*, 1, -\} \text{ для любого } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n\};$$

$$K_6 = \{f \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{*, 0, -\} \text{ для любого } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n\};$$

$$K_7 = \text{Pol } R_7; R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix};$$

$$K_8 = \text{Pol } R_8; R_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

$$K_9 = \text{Pol } R_9; R_9 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Множества $K_1 - K_9$ являются ES_I -замкнутыми.*

Доказательство. Множества $K_3 - K_6$ — это множества функций, которые не принимают одно из 4-х значений, поэтому эти множества являются ES_I -замкнутыми.

Рассмотрим остальные множества. Замкнутость этих множеств относительно введения фиктивных переменных следует из Леммы 2.

Для множеств K_1, K_2, K_8, K_9 замкнутость относительно суперпозиции следует из Леммы 1, так как соответствующие предикаты, во-первых, содержат все возможные наборы со $*$, а во-вторых, не содержат набора, в котором есть подмножество мощности больше 1.

Соответствующие этим множествам предикаты обладают тем свойством, что

- они содержат все возможные наборы со $*$;
- нет двух двоичных наборов $(\alpha_1\alpha_2)$ и $(\beta_1\beta_2)$ для которых $\alpha_1 = \beta_1$, но $\alpha_2 \neq \beta_2$ или $\alpha_1 \neq \beta_1$, но $\alpha_2 = \beta_2$.

Поэтому множества замкнуты относительно операции разветвления по предикату равенства.

Рассмотрим множество K_7 . Покажем, что оно замкнуто относительно суперпозиции.

Пусть функции f, f_1, \dots, f_m сохраняют предикат R_7 , а функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

не сохраняет предикат R_7 , т.е.

$$g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \right) \in \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & * & * & * & - & - & - \\ 0 & * & - & 1 & * & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & * \end{array} \right\},$$

где для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $(\alpha_i \beta_i)^T \in R_7$ и при этом $(\alpha_i \beta_i) \neq (**)$.

В силу того, что набор $(\alpha_i \beta_i)^T$ принадлежит предикату R_7 , тогда и только тогда, когда набор $(\beta_i \alpha_i)^T$ тоже принадлежит предикату R_7 , рассмотрим только случаи

$$g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \right) \in \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & - \\ 0 & * & - & 1 & * & - & * \end{array} \right\},$$

Пусть

$$g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \right) \in \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & - \\ * & * & * \end{array} \right\}.$$

Тогда для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ найдется уточнение $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ такое, что $g(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \in \{0, 1, -\}$, но на противоположном наборе $(\overline{\alpha'_1}, \dots, \overline{\alpha'_n})$, который является уточнением набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ функция g возвращает *. Противоречие с Леммой 1.

Из оставшихся 4-х случаев достаточно рассмотреть два, так как два других рассматриваются двойственным образом.

- Пусть $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$. Для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ найдется уточнение $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ такое, что $g(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$. На противоположном наборе $(\overline{\alpha'_1}, \dots, \overline{\alpha'_n})$ функция g не возвращает 1. Противоречие с Леммой 1.

- Пусть $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, g(\beta_1, \dots, \beta_n) = -$. На любом уточнении набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ функция g , очевидно, не возвращает 1. Поэтому по Лемме 1 нет уточнения $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, для которого выполняется $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = *$ для некоторого набора $(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \in C_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$. Противоречие с Леммой 1 получим в случае $g(\overline{\beta'_1}, \dots, \overline{\beta'_n}) \neq *$. Значит для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть уточнение, на котором функция g возвращает * и нет уточнения на котором функция g возвращает -. (Если есть уточнения, на которых функция возвращает * и -,

то на самом наборе функция возвращает $-$.) Поэтому по Лемме 1 для набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ нет уточнения $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ такого, что $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = -$ или $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = 0$. А из этого следует, что $g(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq -$. Получили противоречие.

Пусть $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \neq *$ для любого $(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \in C_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$.

Тогда для любого уточнения $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ выполняется $g(\beta_1, \dots, \beta_n) = -$. Так как найдется уточнение $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ для которого $g(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$, то снова получаем противоречие с Леммой 1.

А теперь покажем, что множество K_7 замкнуто относительно разветвления по предикату равенства.

Пусть функция $g(x_1, \dots, x_m)$ получена по формуле (5).

Предположение о том, что функция g не сохраняет предикат R_7 снова приводит к тому, что найдется двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что

$$g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \end{array} \right)$$

не принадлежит предикату R_7 .

Можно заметить, что при вычислении $g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \end{array} \right)$ в верхней строке элементы в i и j позициях совпадают, тогда и только тогда, когда они совпадают в нижней строке.

Таким образом $g \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \end{array} \right)$ совпадает с $f_1 \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \end{array} \right)$ или совпадает с $f_2 \left(\begin{array}{c} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \end{array} \right)$. И далее получаем противоречие с тем, что функции f_1 и f_2 сохраняют предикат R_7 . □

Теорема 2. Для множеств K_1, \dots, K_9 выполняется $K_i \not\subseteq K_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из таблицы 1 в которой на пересечении i -ой строки и j -го столбца находится мультифункция f такая, что $f \in K_i$ и $f \notin K_j$. □

3. Критерий полноты

Для $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_2$ определим f_0 — 0-характеристическую функцию следующим образом: $f_0(\tilde{\sigma}) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\sigma}) \in \{0, -\}$, в противном случае $f_0(\tilde{\sigma}) = 0$ ($\tilde{\sigma} \in E^n$). Аналогично определяется f_1 — 1-характеристическая функция для f : $f_1(\tilde{\sigma}) = 1$ тогда и только тогда,

Таблица 1. Попарная различность множеств $K_1 - K_9$

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
K_1	\times	$0-$	$0-$	$**$	00	01	00	$0-$	00
K_2	11	\times	-1	$**$	01	01	11	11	11
K_3	11	00	\times	$**$	01	01	11	11	11
K_4	11	00	$--$	\times	00	11	00	$--$	$--$
K_5	$--$	$--$	$--$	$**$	\times	11	11	11	-1
K_6	$--$	$--$	$--$	$**$	00	\times	00	00	00
K_7	10	10	$--$	$**$	01	01	\times	$--$	$--$
K_8	10	10	$*-$	$**$	01	01	$-*$	\times	10
K_9	$1*$	$*0$	$*-$	$**$	01	01	$-*$	0111	\times

когда $f(\tilde{\sigma}) \in \{1, -\}$. Отметим, что характеристические функции принадлежат \mathcal{O}_2 .

Определим бинарную функцию $x \triangleright y$:

$$1 \triangleright 0 = 0, 0 \triangleright 1 = 1, 0 \triangleright 0 = *, 1 \triangleright 1 = -.$$

Лемма 4. Множество функций $R = P \cup \{\triangleright\}$, где P — E -полное множество в \mathcal{O}_2 , является полным в \mathcal{M}_2 .

Доказательство. Доказательство следует из равенства $f = f_0 \triangleright f_1$ справедливого для любой $f \in \mathcal{M}_2$. \square

Определим унарную функцию $\lambda(x)$: $\lambda(0) = *, \lambda(1) = -$.

Лемма 5. Множество функций $S = P \cup \{\lambda\}$, где P — E -полное множество в классе \mathcal{O}_2 , является полным в классе \mathcal{M}_2 .

Доказательство. Доказательство следует из Леммы 4 и представления \triangleright следующей суперпозицией: $x \triangleright y = x \rightarrow (y \cdot (\lambda(x \vee y)))$, где \rightarrow, \cdot, \vee это импликация, умножение и дизъюнкция (функции из \mathcal{O}_2). \square

Будем в дальнейшем использовать обозначение f_{K_i} для функции, не принадлежащей множеству K_i ($i \in \{1, \dots, 9\}$).

Лемма 6. Справедливо $[0, 1, f_{K_3}, f_{K_4}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Из f_{K_3} и f_{K_4} подстановкой констант 0 и 1 можно получить функции-константы $(*)$ и $(-)$. В [5] показано, что $[0, 1, *] = \mathcal{O}_2^*$.

Разветвление по предикату равенства позволяет из $(*)$ и $(-)$ получить функцию $(*-*)$. Подставив в эту функцию вместо первой переменной константу 0, получим функцию $(*-)$. И далее применяем Лемму 5. \square

Лемма 7. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (10)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_7}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Подставляя в функцию f_{K_7} на соответствующие места функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, получим одну из функций: (00) , (11) , $(0*)$, $(*0)$, $(1*)$, $(*1)$, $(0-)$, (-0) , $(1-)$, (-1) , $(*-)$, $(-*)$. Первые десять случаев легко сводятся к константам и Лемме 6. Последние две функции сводятся друг к другу, поэтому рассмотрим одну из них: $u_1(x) = (-*)$.

Суперпозиция $g_2(u_1, g_2)$ определяет функцию $(0*)$, из которой с помощью функции g_1 легко получить константу 0 и свести доказательство к Лемме 6. \square

Лемма 8. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (11)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_5}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно получить константу 0 и воспользоваться Леммой 6. Для функции f_{K_5} возьмем набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f_{K_5}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Рассмотрим функцию $h(x)$, где $h(x) = f_{K_5}(u_1(x), \dots, u_n(x))$,
и $u_i(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если } \alpha_i = 0; \\ 1, & \text{если } \alpha_i = 1 \end{cases}$.

Тогда $h(x)$ одна из следующих функций: (00) , $(0*)$, $(0-)$, (01) . Так как первые три функции очевидным образом сводятся к константе 0 с помощью функции g_1 , то осталось рассмотреть функцию $t(x) = (01)$.

Пусть $p(x, y) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x = y; \\ t(x) & \text{если } x \neq y. \end{cases}$

Суперпозиция $p(g_2, g_1)$ определяет константу 0. \square

Лемма 9. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (00)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_6}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Доказательство этой леммы двойственно доказательству Леммы 8. \square

Теорема 3. Множество мультифункций R является ES_I -полным в \mathcal{M}_2 тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_9$.

Доказательство. Отождествлением переменных из функции f_{K_9} можно получить одну из восьми следующих одноместных функций:

$f_{K_9}^1 = (--)$, $f_{K_9}^2 = (00)$, $f_{K_9}^3 = (11)$, $f_{K_9}^4 = (10)$, $f_{K_9}^5 = (0-)$, $f_{K_9}^6 = (-0)$, $f_{K_9}^7 = (1-)$, $f_{K_9}^8 = (-1)$.

Так как $f_{K_9}^6(f_{K_9}^6(x)) = f_{K_9}^5$ и $f_{K_9}^5(f_{K_9}^5(x)) = (00)$, $f_{K_9}^7(f_{K_9}^7(x)) = f_{K_9}^8$ и $f_{K_9}^8(f_{K_9}^8(x)) = (11)$, то достаточно рассмотреть первые четыре случая.

Случай 1. $f_{K_9}^1 = (-)$. Из функции f_{K_5} отождествлением переменных можно получить функцию $h(x, y)$ такую, что на наборах (01) и (10) она принимает одно из следующих четырех значений — (00), (01), (0*), (0–).

Определим функцию $t(x, y)$: $t(x, y) = \begin{cases} -, & \text{если } x = y; \\ h(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$

Суперпозиция $t(x, -)$ определяет одноместную функцию $p(x) = (0\beta)$, где $\beta \in \{0, -, 1\}$. Первые два случая сводятся к Лемме 9. Рассмотрим оставшийся случай: $p(x) = (01)$.

Оператор разветвления по предикату равенства позволяет из функции $p(x)$ и $(-)$ получить функцию $(-01-)$, а с помощью суперпозиции $(-)$ (10). Справедливость утверждения следует из Леммы 7.

Случай 2. $f_{K_9}^2 = (00)$. Подставляя константу 0 в функцию f_{K_1} , получим одну из двух функций: (1) или $(-)$.

Для первой функции воспользуемся Леммой 6. Для второй — Леммой 9.

Случай 3. $f_{K_9}^3 = (11)$. Подставляя константу 1 в функцию f_{K_2} , получим одну из двух функций: (0) или $(-)$.

И далее применяем Лемму 6 или Лемму 8.

Случай 4. $f_{K_9}^4 = (10)$. Функция f_{K_8} на некоторой паре противоположных наборов возвращает одну из следующих пар — (00), (11), (0–), (–0), (1–), (–1). А это означает, что, подставляя в функцию f_{K_8} на соответствующие места переменных функцию (10), можно получить одну из следующих одноместных функций — (00), (11), (0–), (–0), (1–), (–1), (–), которые легко сводятся к случаю 1. □

Следствие 1. Множества $K_1–K_9$ являются ES_I -предполными.

4. Классификация мультифункций

Для каждой мультифункции ранга 2 однозначным образом определим вектор принадлежности ES_I -предполным множествам. Длина такого вектора равна 9 и i -я координата равна 1, если мультифункция принадлежит предполному множеству K_i , и 0, иначе.

На множестве всех мультифункций определим отношение эквивалентности следующим образом: эквивалентными будут функции, у которых совпадают векторы принадлежности ES_I -предполным множествам. Так как число ES_I -предполных множеств равно 9, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно 2^9 .

Через \bar{K} обозначим множество функций, не принадлежащих множеству K .

Лемма 10. *Число классов эквивалентности мультифункций, принадлежащих множествам K_1 и K_2 , относительно принадлежности ES_1 -предполным множествам равно 22.*

Доказательство. Если мультифункция принадлежит множеству $K_1 \cap K_2$, то она, очевидно, принадлежит множеству K_9 . Осталось рассмотреть принадлежность множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$.

Для перечисления всех классов разобьем множество рассматриваемых функций на 4 множества — $K_3 \cap K_4, K_3 \cap \bar{K}_4, \bar{K}_3 \cap K_4$ и $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

а) Множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. Так как булева функция на нулевом наборе возвращает 0, а на единичном 1, то она не принадлежит множествам K_5 и K_6 . Также несложно заметить, что она принадлежит множеству K_7 тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству K_8 . Таким образом в этом случае получили не более 2-х функций.

б) Рассмотрим второе множество $K_3 \cap \bar{K}_4$ — множество функций, которые хотя бы на одном наборе возвращают * и ни на одном из наборов не возвращают —. В этом случае разобьем оставшееся множество функций на 4 множества — $K_5 \cap K_6, K_5 \cap \bar{K}_6, \bar{K}_5 \cap K_6$ и $\bar{K}_5 \cap \bar{K}_6$.

Множество $K_5 \cap K_6$ состоит из одной функции — *, которая принадлежит множествам K_7 и K_8 .

Функция, принадлежащая множеству $K_5 \cap \bar{K}_6$, на какой-то паре противоположных наборов возвращает значения: (11), (1*). Поэтому нет функций, принадлежащих K_7 . И остается не более 2-х функций.

То же самое выполняется и для множества $\bar{K}_5 \cap K_6$.

Так как функция, принадлежащая множеству $\bar{K}_5 \cap \bar{K}_6$, ни на одном из наборов не возвращает —, то нет функций, принадлежащих K_7 и не принадлежащих K_8 . Остается не более 3-х функций.

в) Функция из множества $\bar{K}_3 \cap K_4$ на некотором наборе возвращает — и ни на одном из наборов не возвращает *. В этом случае очевидно, что функция, принадлежащая K_9 , не принадлежит K_5 и K_6 . Кроме этого функция не принадлежит K_8 . И остается не более 2-х функций.

г) Рассмотрим последнее множество — $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

Если мультифункция не возвращает только одну из констант 0 или 1, то нет мультифункций, принадлежащих K_7 , так как найдется пара противоположных наборов, на которых функция принимает значения $(\alpha\beta)$, где $\alpha \in \{0, 1\}, \beta \in \{\alpha, -, *\}$. Всего не более 4-х функций.

Иначе нет мультифункций принадлежащих K_7 и принадлежащих K_8 . Остается не более 6-ти вариантов.

В табл. 2 приведены 22 функций из множества $K_1 \cap K_2$, принадлежащие различным классам.

Лемма доказана. \square

Таблица 2. Функции из множества $K_1 \cap K_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(01)	1 1 1 1 0 0 1 1 1	2	(0001)	1 1 1 1 0 0 0 0 1
3	(**)	1 1 1 0 1 1 1 1 1	4	(*1)	1 1 1 0 1 0 0 1 1
5	(*111)	1 1 1 0 1 0 0 0 1	6	(0*)	1 1 1 0 0 1 0 1 1
7	(000*)	1 1 1 0 0 1 0 0 1	8	(0**1)	1 1 1 0 0 0 1 1 1
9	(*101)	1 1 1 0 0 0 0 1 1	10	(*001)	1 1 1 0 0 0 0 0 1
11	(0--1)	1 1 0 1 0 0 1 0 1	12	(0-01)	1 1 0 1 0 0 0 0 1
13	(*--*)	1 1 0 0 1 1 1 0 1	14	(*-**)	1 1 0 0 1 1 0 1 1
15	(**-----*)	1 1 0 0 1 1 0 0 1	16	(** -1)	1 1 0 0 1 0 0 1 1
17	(* -11)	1 1 0 0 1 0 0 0 1	18	(0* -*)	1 1 0 0 0 1 0 1 1
19	(0-0*)	1 1 0 0 0 1 0 0 1	20	(01 - ** -01)	1 1 0 0 0 0 1 0 1
21	(0* -1)	1 1 0 0 0 0 0 1 1	22	(* -01)	1 1 0 0 0 0 0 0 1

Лемма 11. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам K_1 и \bar{K}_2 , относительно принадлежности ES_I -предполным множествам равно 20.

Доказательство. Если мультифункция принадлежит множеству $K_1 \cap \bar{K}_2$, то она не принадлежит множеству K_7 , так как на наборах из всех нулей и всех единиц функция возвращает один из следующих наборов: (00), (0-), (*0), (*-). Осталось рассмотреть принадлежность множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_8, K_9$.

Как и в предыдущем доказательстве рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам а) $K_3 \cap K_4$, б) $K_3 \cap \bar{K}_4$, в) $\bar{K}_3 \cap K_4$, г) $\bar{K}_3 \cap \bar{K}_4$.

В случае а) множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. Очевидно, что в этом случае функция не принадлежит множествам K_5, K_8, K_9 . Число возможных классов эквивалентности не более 2.

Аналогичный результат получаем и в случае в).

Если функция принадлежит множеству $K_3 \cap \bar{K}_4$, то она не принадлежит множеству K_5 , так как на единичном наборе она возвращает 0. Также несложно заметить, что если функция не принадлежит K_9 , то есть на нулевом и единичном наборе возвращает (00), то она не принадлежит K_8 . Осталось не более 6 вариантов.

Рассмотрим последнее множество $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$. Если мультифункция не возвращает 0, то она, очевидно, принадлежит K_5 , K_9 и осталось не более 4 вариантов.

Иначе она не принадлежит K_5 и, кроме того, не может одновременно принадлежать K_8 и не принадлежать K_9 , что дает не более 6 вариантов.

В таблице 3 приведены 20 мультифункций, принадлежащих разным классам. Лемма доказана. \square

Таблица 3. Функции из множества $K_1 \cap \overline{K}_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(00)	1 0 1 1 0 1 0 0 0	2	(0100)	1 0 1 1 0 0 0 0 0
3	(*0)	1 0 1 0 0 1 0 1 1	4	(*000)	1 0 1 0 0 1 0 0 1
5	(0*00)	1 0 1 0 0 1 0 0 0	6	(*100)	1 0 1 0 0 0 0 1 1
7	(*110)	1 0 1 0 0 0 0 0 1	8	(0*10)	1 0 1 0 0 0 0 0 0
9	(0-)	1 0 0 1 0 1 0 0 0	10	(0-10)	1 0 0 1 0 0 0 0 0
11	(* -)	1 0 0 0 1 1 0 1 1	12	(* - - -)	1 0 0 0 1 1 0 0 1
13	(* * 1 -)	1 0 0 0 1 0 0 1 1	14	(* 1 1 -)	1 0 0 0 1 0 0 0 1
15	(* * - 0)	1 0 0 0 0 1 0 1 1	16	(* - 0 0)	1 0 0 0 0 1 0 0 1
17	(0 * - 0)	1 0 0 0 0 1 0 0 0	18	(* 1 0 -)	1 0 0 0 0 0 0 1 1
19	(* - 1 0)	1 0 0 0 0 0 0 0 1	20	(0 * 1 -)	1 0 0 0 0 0 0 0 0

Лемма 12. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам \overline{K}_1 и \overline{K}_2 , относительно принадлежности ES_I -предполным множествам равно 20.

Доказательство. Доказательство того, что классов не более 20, двойственно доказательству в Лемме 11. Функции и соответствующие им векторы приведены в табл. 4. \square

Лемма 13. Число классов мультифункций, принадлежащих множествам \overline{K}_1 и \overline{K}_2 , относительно принадлежности ES_I -предполным множествам равно 17.

Доказательство. Из условия следует, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям $f(0, \dots, 0) \in \{1, -\}$, $f(1, \dots, 1) \in \{0, -\}$. Очевидно, что такие функции не принадлежат K_9 . Рассмотрим принадлежность оставшимся множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$.

Как и в предыдущих доказательствах рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам а) $K_3 \cap K_4$, б) $K_3 \cap \overline{K}_4$, в) $\overline{K}_3 \cap K_4$, г) $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$.

Таблица 4. Функции из множества $\overline{K_1} \cap K_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(11)	0 1 1 1 1 0 0 0 0	2	(1001)	0 1 1 1 0 0 0 0 0
3	(1*)	0 1 1 0 1 0 0 1 1	4	(111*)	0 1 1 0 1 0 0 0 1
5	(1*11)	0 1 1 0 1 0 0 0 0	6	(110*)	0 1 1 0 0 0 0 1 1
7	(100*)	0 1 1 0 0 0 0 0 1	8	(1*01)	0 1 1 0 0 0 0 0 0
9	(-1)	0 1 0 1 1 0 0 0 0	10	(-001)	0 1 0 1 0 0 0 0 0
11	(-*)	0 1 0 0 1 1 0 1 1	12	(- - -*)	0 1 0 0 1 1 0 0 1
13	(- * 1*)	0 1 0 0 1 0 0 1 1	14	(-11*)	0 1 0 0 1 0 0 0 1
15	(- * 11)	0 1 0 0 1 0 0 0 0	16	(- * 0*)	0 1 0 0 0 1 0 1 1
17	(-00*)	0 1 0 0 0 1 0 0 1	18	(-10*)	0 1 0 0 0 0 0 1 1
19	(1 - 0*)	0 1 0 0 0 0 0 0 1	20	(- * 01)	0 1 0 0 0 0 0 0 0

В случае а) рассматриваются булевы функции, которые на всех нулях возвращают 1, а на всех единицах возвращают 0, поэтому они не принадлежат множествам K_5 и K_6 . Заметим, что булева функция принадлежит K_7 тогда и только тогда, когда она принадлежит K_8 . Таким образом число классов не более 2.

Рассмотрим случай б). Функция возвращает * и не возвращает -, поэтому на всех нулях она возвращает 1, а на всех единицах возвращает 0. Следовательно она не принадлежит классам K_5 , K_6 . Легко показать, что если она принадлежит K_7 , то и принадлежит K_8 . Поэтому число классов не более 3.

Случай в). Функция не возвращает * и возвращает -, тогда она не принадлежит K_8 .

Если функция также не возвращает константу 0, но возвращает 1, то она очевидно не принадлежит классам K_6 , K_7 и принадлежит классу K_5 . Получаем один вектор принадлежности.

Если функция возвращает константу 0, но не возвращает 1, то она очевидно не принадлежит классам K_5 , K_7 и принадлежит классу K_5 . Получаем один вектор принадлежности.

Если же она не возвращает ни одну из констант, то очевидно, что это одна функция $- (-)$.

Если функция возвращает константу 0 и возвращает 1, то число векторов принадлежности не более 2.

Случай г). Функция возвращает * и возвращает -.

Функции, возвращающие одну из констант и не возвращающие другую константу, образуют два класса. Также два класса образуют функции, возвращающие только * и -. И наконец три класса образуют функ-

ции, возвращающие и 0, и 1, так как такие функции не могут одновременно принадлежать K_7 и K_8 .

В табл. 5 приведены 17 функций и соответствующие им классы. Лемма доказана. \square

Таблица 5. Функции из множества $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(10)	0 0 1 1 0 0 1 1 0	2	(1000)	0 0 1 1 0 0 0 0 0
3	(1 * 0)	0 0 1 0 0 0 1 1 0	4	(1 * 00)	0 0 1 0 0 0 0 1 0
5	(1 * 000000)	0 0 1 0 0 0 0 0 0	6	(--)	0 0 0 1 1 1 1 0 0
7	(1-)	0 0 0 1 1 0 0 0 0	8	(-0)	0 0 0 1 0 1 0 0 0
9	(1 - -0)	0 0 0 1 0 0 1 0 0	10	(-100)	0 0 0 1 0 0 0 0 0
11	(- * *-)	0 0 0 0 1 1 1 0 0	12	(- * --)	0 0 0 0 1 1 0 0 0
13	(1 * 1-)	0 0 0 0 1 0 0 0 0	14	(- * 00)	0 0 0 0 0 1 0 0 0
15	(11 - * *-00)	0 0 0 0 0 0 1 0 0	16	(1 * -0)	0 0 0 0 0 0 0 1 0
17	(- * 10)	0 0 0 0 0 0 0 0 0			

Теорема 4. Число классов мультфункций относительно принадлежности ES_I -предполным в M_2 множествам равно 79.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из Лемм 10–13. \square

5. Типы базисов

Для того, чтобы система функций была базисом в M_2 , необходимо соблюдать условия полноты и минимальности. Согласно критерию полноты система функций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 9 ES_I -предполных множеств. Минимальность означает, что при удалении из системы любой функции система становится неполной.

Функция $f(x, y) = (- * 10)$ из табл. 5 не принадлежит ни одному из ES_I -предполных множеств, поэтому минимальная мощность базиса равна 1.

Теорема 5. Максимальная мощность базиса не больше 4.

Доказательство. Пусть множество B является базисом. Тогда в этом множестве есть функция f_{K_9} . Рассмотрим все возможные значения этой

функции на наборах $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$. Возможны 8 вариантов: $(1-)$, (-0) , (10) , $(--)$, (00) , (11) , $(0-)$, (-1) .

- В первых двух вариантах функция f_{K_9} не принадлежит еще 6 ES_I -предполным множествам, а значит максимальная мощность базиса в этих случаях не больше 3.

- Рассмотрим третий случай: $f_{K_9}(0, \dots, 0) = 1$ и $f_{K_9}(1, \dots, 1) = 0$. В этом случае f_{K_9} не принадлежит множествам K_1, K_2, K_5, K_6 . В множестве B выберем функцию f_{K_8} , которая на противоположных наборах может возвратить (00) , (11) , (-0) , $(0-)$, (-1) , $(1-)$, $(--)$. Поэтому f_{K_8} не принадлежит множеству K_7 либо K_3 .

- Пусть $f_{K_9}(0, \dots, 0) = 0$ и $f_{K_9}(1, \dots, 1) = 0$. Тогда f_{K_9} не принадлежит множествам K_2, K_5, K_7, K_8 . Если $f_{K_1}(0, \dots, 0) = 1$, то исключаем множество K_6 , а если $f_{K_1}(0, \dots, 0) = -$, то исключаем множество K_3 .

- Вариант $f_{K_9}(0, \dots, 0) = 1$ и $f_{K_9}(1, \dots, 1) = 1$ двойственен предыдущему.

- Пусть $f_{K_9}(0, \dots, 0) = -$ и $f_{K_9}(1, \dots, 1) = -$. В этом случае f_{K_9} не принадлежит множествам K_1, K_2, K_3, K_8 . В множестве B выберем функцию f_{K_7} , которая на противоположных наборах может возвратить (00) , $(0*)$, $(0-)$, (11) , $(1*)$, $(1-)$, (-0) , (-1) , $(-*)$, $(*0)$, $(*1)$, $(*-)$. Далее замечаем, что, если функция на некотором наборе принимает значение 0, то она не принадлежит K_5 , если принимает значение 1, то не принадлежит K_6 , а если $-*$, то не принадлежит K_4 .

- В последних двух вариантах функция f_{K_9} не принадлежит еще 5 ES_I -предполным множествам, а значит максимальная мощность базиса не больше 4. \square

Будем говорить, что два базиса B_1 и B_2 одинаковой мощности имеют разный тип, если у них не совпадают множества векторов принадлежности ES_I -предполным множествам.

Полный компьютерный перебор показал, что имеется 1 тип базиса мощности 1, 749 типов базиса мощности 2, 4323 типа базиса мощности 3, 93 типа базиса мощности 4.

Заключение

В работе рассмотрены мультифункции, заданные на 2-х элементном множестве. Следующим шагом является рассмотрение мультифункций, заданных на 3-х элементном множестве и затем рассмотрение общего случая — мультифункций, заданных на k -элементном множестве.

Список литературы

- [1] Литвинов Г. Л., “Гипергруппы и гипергрупповые алгебры,” *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1985, № 26, 57–106.
- [2] Ло Джукай, “Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики”, *Кибернетический сборник. Новая серия №25.*, 1988, 131–141.
- [3] Мальцев А. И., Мальцев И. А., *Итеративные алгебры Поста*, Изд-во Инта математики, Новосибирск, 2009, 194 pp.
- [4] Марченков С. С., “Операторы замыкания с разветвлением по предикату”, *Вестник МГУ, Сер. 1, Математика и механика.*, **6** (2003), 37–39
- [5] Марченков С. С., “Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций”, *Дискретная математика*, **20:6** (2008), 80–88
- [6] Марченков С. С., “Оператор E -замыкания на множестве частичных функций многозначной логики”, *Математические вопросы кибернетики*, 2013, № 18, 227–238
- [7] Матвеев С. А., “Построение всех E -замкнутых классов частичных булевых функций”, *Математические вопросы кибернетики*, 2013, № 18, 239–244
- [8] Пантелеев В.И., “Критерий полноты для доопределяемых булевых функций”, *Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия*, 2009, № 2 (68), 60–79
- [9] Пантелеев В. И., Рябец Л. В., “Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2”, *Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, **10** (2014), 93–105
- [10] Тарасов В. В., “Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики”, *Проблемы кибернетики №30*, 1975, 319–325
- [11] Фрейвалд Р. В., “О полноте частичных функций алгебры логики”, *ДАН СССР*, **167:6** (1966), 1249–1250
- [12] Corsini P., Leoreanu V., *Applications of Hyperstructure Theory*, Springer-Science+Business Media, B.V., 2003, 322 pp.
- [13] Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G., “One interval in the lattice of partial hyperclones”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2005 №55(130)., 719–724.
- [14] Lau D., *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 668 pp.
- [15] Machida H., “Hyperclones on a two-element set”, *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002 №8(4), 495–501.
- [16] Machida H., Pantovic J., “On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ — a new approach”, *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, 32–37.
- [17] Marty F., “Sur une generalization de la notion de groupe”, *Congres des Mathematiciens Scandinaves, Stockholm*, 1934, 45–49.
- [18] Panteleev V.I., Riabets L.V., “E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **13(2)** (2020), 231–241
- [19] Pouzet M., Rosenberg I., “Small clones and the projection property.”, *Algebra Universalis*, 2010 №63, 37–44

- [20] Romov B. A., “Hyperclones on a finite set Multiple-Valued Logic. An International Journal”, **3 №2** (1998), 285–300.

**ES_I -closure of rank 2 multi-functions: completeness criterion,
classification, and types of bases
Pantelev V. I., Taglasov E. S.**

Multifunctions are functions that are defined on a finite set and return subsets of the considered set as their values. This paper deals with the closure of multifunctions that can be obtained using the operations of adding dummy variables, composition operator, and operator with the equality predicate branching. We obtain nine precomplete closed classes of multifunctions of rank two and prove the completeness criterion. A classification of multifunctions based on belonging to precomplete classes is presented, and all types of bases are described.

Keywords: closure, equality predicate, multioperation, closed set, composition.

References

- [1] Litvinov G. L., “Hypergroups and Hypergroup Algebras,” *Journal of Soviet Mathematics.*, 1987, № 38, no. 2, 1734–1761 DOI: 10.1007/BF01088201.
- [2] Lo Czu Kai, “Maksimalnye zamknutyie klassy v mnozhestve chastichnykh funkciy mnogoznachnoy logiki [Maximal Closed Classes on the Set of Partial Many-valued Logic]”, *Kiberneticheskiy Sbornik №25.*, 1988, 131–141 (in Russian)
- [3] Malcev A. I., Malcev I. A., *Iterativnye algebry Posta [Iterative Post Algebras]*, Publishing House of Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2009 (in Russian), 194 pp.
- [4] Marchenkov S. S., “Operatory zamykaniya s razvetvleniem po predicatu [Closure Operators with Predicate Branching]”, *Bulletin of Moscow State University. Series 1. Mathematics and Mechanics*, **6** (2003), 37–39 (in Russian)
- [5] Marchenkov S. S., “The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions”, *Discrete Math. Appl.*, **18:4** (2008), 381–389. DOI: 10.1515/DMA.2008.028.
- [6] Marchenkov S. S., “Operator E -zamykaniya na mnozhestve chastichnykh funkciy mnogoznachnoy logiki [The E -closure Operator on the Set of Partial Many-valued Logic Functions]”, *Mathematical problems in cybernetics*, 2013, № 18, 227–238 (in Russian)
- [7] Matveev S. S., “Postroenie vsekh E -zamknutykh klassov chastichnykh bulevykh funkciy [Construction of All E -closed Classes of Partial Boolean Functions]”, *Mathematical problems in cybernetics*, 2013, № 18, 239–244 (in Russian)
- [8] Pantelev V. I., “iteriyi polnoty dlya doopredelyaemykh bulevykh funkciy [The Completeness Criterion for Depredating Boolean Functions]”, *Vestnik of Samara State University. Series Mathematics*, 2009, № 2 (68), 60–79 (in Russian)

- [9] Panteleev V. I., Riabets L. V., “Operator zamykaniya s razvetvleniem po predicatu ravenstva na mnozhestve giperfunkciy ranga 2 [The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set]”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **10** (2014), 93–105 (in Russian)
- [10] Tarasov V. V., “Kriteriy poloty dlya ne vsyudu opredelennykh funkciy algebry logiki [Completeness Criterion for Partial Logic Functions]”, *Problemy Kibernetiki №30*, 1975, 319–325 (in Russian)
- [11] Freiwald R. V., “O polnote chastichnykh funkciy algebry logiki [On Completeness of Partial Functions of Boolean Algebra]”, *DAN USSR*, **167:6** (1966), 1249–1250 (in Russian)
- [12] Corsini P., Leoreanu V., *Applications of Hyperstructure Theory*, Springer-Science+Business Media, B.V., 2003, 322 pp.
- [13] Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G., “One interval in the lattice of partial hyperclones”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2005 №55(130), 719–724.
- [14] Lau D., *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 668 pp.
- [15] Machida H., “Hyperclones on a two-element set”, *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002 №8(4), 495–501.
- [16] Machida H., Pantovic J., “On maximal hyperclones on $\{0,1\}$ — a new approach”, *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, 32–37.
- [17] Marty F., “Sur une généralization de la notion de groupe [On a generalization of the notion of group]”, *In 8ème congrés des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, 1934, 45–49. (in French)
- [18] Panteleev V. I., Riabets L. V., “E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **13(2)** (2020), 231–241
- [19] Pouzet M., Rosenberg I., “Small clones and the projection property.”, *Algebra Universalis*, 2010 №63, 37–44
- [20] Romov B. A., “Hyperclones on a finite set Multiple-Valued Logic. An International Journal”, **3 №2** (1998), 285–300.

Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества

А. М. Тропин¹

Задача Ферма—Штейнера заключается в поиске такой точки метрического пространства Y (которую будем называть астровой вершиной Штейнера), что сумма расстояний от нее до точек некоторого конечного фиксированного подмножества $A \subset Y$, называемого границей, минимальна. Минимальную сумму расстояний мы будем называть длиной минимальной астросети. Мы рассматриваем эту задачу в гиперпространстве $Y = H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного пространства X , в данном пространстве являющихся компактами.

В настоящей статье описывается широкий класс деформаций граничных компактов, не увеличивающих длину минимальной астросети. Также рассматривается усреднение в смысле суммы Минковского конечного числа границ, состоящих из равного числа элементов, и показывается, что при таком усреднении также не увеличивается длина минимальной астросети.

Ключевые слова: задача Ферма—Штейнера, минимальное дерево Штейнера, минимальная параметрическая сеть, минимальная астросеть, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, расстояние Хаусдорфа.

1. Введение

Напомним хорошо известную задачу нахождения минимального дерева Штейнера на евклидовой плоскости. Пусть даны n фиксированных точек на плоскости, называемых *граничными*. Требуется построить связный граф с вершинами в граничных и, если необходимо, дополнительных точках плоскости такой, что сумма длин его ребер минимальна (длиной ребра называется расстояние между двумя инцидентными ребру вершинам в евклидовой метрике). Такой граф является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера*, дополнительные вершины — *вершинами Штейнера*.

¹Тропин Александр Михайлович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amtropin@gmail.com.

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Исходная постановка задачи, которую принято сейчас называть *задачей Штейнера*, предполагала добавление одной дополнительной точки к граничным и рассматривалась самим Якобом Штейнером (задачу для трех граничных точек сформулировал Пьер Ферма). Формальная постановка задачи, разрешающая добавлять сколько угодно дополнительных точек, была опубликована только в 1934 году Войтехом Ярником и Милошом Кёсслером [1]. Если при этом фиксировать топологию сети, соединяющей граничные точки, т.е. заранее определить, как вершины сети соединяются между собой, и минимизировать сумму длин ребер такой сети, то получаются *минимальные параметрические сети*.

Под *задачей Ферма—Штейнера* мы понимаем обобщение Штейнера задачи Ферма, а именно, для фиксированного конечного подмножества $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ метрического пространства (Y, ρ) необходимо найти все точки $y \in Y$, минимизирующие значение функции $S_{\mathcal{A}}(y) = \sum_{i=1}^n \rho(y, a_i)$. Множество \mathcal{A} фиксированных вершин сети назовем *границей*, а ее элементы — *граничными* вершинами. Минимальное значение функции $S_{\mathcal{A}}(y)$ назовем *длиной минимальной астросети*. Точки, являющиеся решением задачи Ферма—Штейнера, мы будем называть *астровершинами Штейнера*, а их множество обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Определим *вектор расстояний* $d(y, \mathcal{A}) = (\rho(y, a_1), \dots, \rho(y, a_n))$ и положим $\Omega(\mathcal{A}) = \{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\}$. Для каждого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ положим $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \{y \in \Sigma(\mathcal{A}) : d(y, \mathcal{A}) = d\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на *классы одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega(\mathcal{A})$.

В данной статье мы рассматриваем в качестве объемлющего пространства гиперпространство $H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного метрического пространства X , наделенное метрикой Хаусдорфа d_H [2], см. также [3]. Геометрия пространства $H(X)$ используется в таких важных приложениях как распознавание образов, сравнение двумерных и трехмерных геометрических объектов, построение непрерывных деформаций одного объекта в другой.

Ограниченная компактность пространства X гарантирует существование решений задачи Ферма—Штейнера для границы в $H(X)$. Более того, в таких X любое непустое замкнутое и ограниченное множество является компактом, поэтому мы фактически будем говорить о задаче в пространстве компактов. Астровершину Штейнера для границы в $H(X)$ в случае ограниченно компактного X будем называть *астрокомпактом Штейнера*. Заметим, что астрокомпакты Штейнера могут быть определены неоднозначно, то есть что класс одинаковой взвешенности может состоять более чем из одного элемента.

В данной статье получены результаты, позволяющие деформировать граничные компакты в ограниченно компактном пространстве с неувеличением длины минимальной астросети, а в некоторых случаях и длины минимальной параметрической сети.

В конечномерном нормированном пространстве разработана теория, позволяющая для конечного числа границ с равным числом элементов построить семейство новых границ с неувеличением длины минимальной параметрической сети. Элементы новой границы лежат в симплексах, построенных с помощью суммы Минковского на вершинах соответствующих граничных компактов исходных границ, либо равняются объединению всех точек этих симплексов. В частности, получена верхняя оценка на длину минимальной параметрической сети с вершинами в выпуклых оболочках граничных компактов.

Для каждой пары компактов A, K в ограниченно компактном пространстве найдены их компактные подмножества $R_K(A)$ и $R_A(K)$, сохраняющие расстояния Хаусдорфа и названные редукцией. Для каждого компакта A построено некоторое подмножество $F_K(A)$ пространства относительно компакта K , названное K -облаком, любой компакт из которого, содержащий при этом $R_K(A)$, находится от K на расстоянии не меньше, чем A . Сформулированы некоторые ограничения на компакты A и K , при которых расстояние от K до компактных подмножеств, зажатых между редукцией и K -облаком, в точности равно расстоянию $d_H(A, K)$.

Отметим, что полученные результаты оказываются полезными при изучении задачи Ферма—Штейнера для границы в ограниченно компактном пространстве. Предположим, что явным образом найден хотя бы один астрокомпакт Штейнера K для одной границы. Тогда можно заменить каждый из граничных компактов любым компактом, который удовлетворяет описанным выше условиям, и получить целый класс границ, длина минимальной астросети для каждой из которых не превосходит длины минимальной астросети для исходной границы.

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе приведены необходимые сведения из теории сетей (подраздел 2.1) и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу (подраздел 2.2).

2.1. Графы и сети. Проблема Штейнера. Теоремы существования

Мы будем рассматривать простые графы, подробные сведения по теории которых можно найти, например, в [4].

В дальнейшем мы будем рассматривать граничные задачи, вводя ограничения на те или иные совокупности вершин изучаемых графов. Если некоторое такое семейство вершин выбрано, то его будем называть *границей графа*, а сам граф — *графом с границей*. Мы всегда будем предполагать наличие границы (возможно, пустой). Как правило, границу графа G мы будем обозначать через ∂G . Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними*. *Бинарным деревом* мы будем называть дерево с границей, степени вершин которого равны 1 или 3, а множество граничных вершин состоит из всех вершин степени 1.

Пусть \mathcal{A} — произвольное множество, и G — связный граф. Будем говорить, что граф G (с границей ∂G) *соединяет* \mathcal{A} , если $\partial G = \mathcal{A}$. Определим *сеть* Γ *типа* $G = (V, E)$ в множестве X как отображение $\Gamma : V \rightarrow X$; граф G называется *параметризующим графом* сети или ее *топологией*. Ограничения отображения Γ на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу параметризующего графа называются соответственно *ребрами*, *вершинами (граничными, внутренними)*, *границей* сети Γ . Ребро $\Gamma : \{v_i, v_j\} \rightarrow X$ сети Γ называется *вырожденным*, если $\Gamma(v_i) = \Gamma(v_j)$; в противном случае ребро называется *невыврожденным*. Сеть, все ребра которой невырождены, также будем называть *невыврожденной*. Границу сети Γ будем обозначать через $\partial \Gamma$. Если множество $\mathcal{A} \subset X$ является образом границы $\partial \Gamma$ сети Γ , то говорят, что сеть Γ *соединяет множество* \mathcal{A} *по отображению* $\partial \Gamma$ и обозначают $\mathcal{A} \subset \Gamma$. Если (X, ρ) — метрическое пространство, и Γ — сеть типа $G = (V, E)$ в X , то длина ребра $\Gamma : \{v_i, v_j\} \rightarrow X$ сети Γ определяется как расстояние $\rho(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j))$, а длина сети Γ — как сумма длин всех ее ребер:

$$\rho(\Gamma) := \sum_{v_i v_j \in E} \rho(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)).$$

Пусть теперь \mathcal{A} — подмножество в множестве X , и граф G соединяет \mathcal{A} . **Условимся считать, что в этом случае все сети Γ типа $G = (V, E)$ в X удовлетворяют следующему условию: ограничение Γ на \mathcal{A} — тождественное отображение.** Тем самым, каждая такая сеть Γ однозначно задается положением своих внутренних вершин. Поэтому если v_1, \dots, v_k — внутренние вершины параметризующего графа G , то сеть Γ типа G , соединяющая $\mathcal{A} \subset X$, однозначно определяется множеством $(\Gamma(v_1), \dots, \Gamma(v_k))$.

Пусть даны два графа G_1 и G_2 , соединяющие $\mathcal{A} \subset X$, и сети Γ_i типа G_i , $i = 1, 2$. Назовем эти сети *равными*, если существует изоморфизм $\nu : V_1 \rightarrow V_2$ графов G_i , тождественный на \mathcal{A} и такой, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. Отождествляя Γ_1 и Γ_2 с помощью этого изоморфизма ν , мы будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, скажем, G_1 . Если Γ_i — сети одного и того же типа $G = (V, E)$, и для каждого ребра $e \in E$ его длина в каждой из сетей Γ_i одна и та же, то такие сети назовем *одинаково взвешенными*.

Для фиксированной границы \mathcal{A} в метрическом пространстве (X, ρ) рассмотрим связный граф $G = (V, E)$, соединяющий \mathcal{A} . Обозначим через $[G, \mathcal{A}]$ множество всех сетей Γ типа G (в силу сделанного выше соглашения, все сети $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ удовлетворяют условию $\Gamma|_{\partial G} = \text{id}$). Сеть из $[G, \mathcal{A}]$, имеющая наименьшую возможную длину среди всех таких сетей, называется *минимальной параметрической сетью типа G , соединяющей \mathcal{A}* . Минимальная параметрическая сеть существует не всегда. Тем не менее, точная нижняя грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям из $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ всегда существует, называется *длиной минимальной параметрической сети* и обозначается через $\text{mpn}[G, \mathcal{A}]$.

Длиной минимального дерева Штейнера на \mathcal{A} называется величина

$$\text{smt}(\mathcal{A}) = \inf_{\Gamma: \mathcal{A} \subset \Gamma} \rho(\Gamma) = \inf_{G: \partial G = \mathcal{A}} \text{mpn}[G, \mathcal{A}],$$

где первый инфимум берется по всевозможным сетям, соединяющим \mathcal{A} , а второй — по всем связным графам с границей \mathcal{A} . Эти инфимумы могут не достигаться. Если же первый из них достигается на некоторой сети, то, как несложно показать, см., например, [5], он достигается также и на невырожденной сети. Эта невырожденная сеть является деревом, имеющим не более $n - 2$ внутренних вершин, и называется *минимальным деревом Штейнера на \mathcal{A}* . Внутренние вершины минимального дерева Штейнера называются *точками Штейнерами*. Изучение минимальных деревьев Штейнера называется *проблемой Штейнера*.

Рассмотрим дерево G с n граничными вершинами степени 1 и единственной неграничной вершиной, которая смежна с каждой из граничных. Если такое дерево G соединяет границу $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, то параметрические сети Γ из $[G, \mathcal{A}]$ назовем сетями типа *звезда*. Назовем неграничную вершину сети типа звезда, соединяющей \mathcal{A} , *астровершиной для границы \mathcal{A}* . Если некоторая сеть типа звезда имеет наименьшую длину среди сетей этого типа, то эту величину назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$, а астровершину — *астровершиной Штейнера*. Изучение минимальных астросетей называется *проблемой Ферма—Штейнера*. Множество всех астровершин Штейнера мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Длину параметрической сети типа звезда, соединяющей границу \mathcal{A} с компактом K , будем обозначать через $S_{\mathcal{A}}(K)$.

Следующий результат доказывается точно так же, как теоремы существования минимальных сетей для полных римановых многообразий, см. [5].

Теорема 1. Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества A в пространстве X существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее A , и для любого связного графа G с границей A существует соединяющая A минимальная параметрическая сеть типа G в X .

Лемма 1. Если метрическое пространство X ограниченно компактно, то пространство $H(X)$ его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа также ограниченно компактно.

В дальнейшем нам будет нужна следующая теорема существования минимальных сетей в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Необходимые определения приведены в разделе 2.2.

Следствие 1. Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и $H(X)$ — пространство его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа. Тогда для любого конечного семейства компактов $A \subset H(X)$ в пространстве $H(X)$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее A , и для любого связного графа G с границей A существует соединяющая A минимальная параметрическая сеть типа G в $H(X)$.

Следующий результат следует из следствия 1 и леммы 1.

Следствие 2. Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и A — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(A)$ непусто.

2.2. Определение и некоторые свойства метрики Хаусдорфа

Напомним, что замкнутой окрестностью радиуса r множества $A \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $B_r^X(A) := \{x \in X : \rho(x, A) \leq r\}$, где $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Отметим, что если A состоит из одной точки, то $B_r^X(A)$ — это замкнутый шар в X с центром в этой точке и радиуса r . Ниже, там где это не вызовет недоразумений, мы будем опускать в обозначениях явную ссылку на пространство, записывая просто $B_r(A)$ вместо $B_r^X(A)$.

Расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A и B метрического пространства (X, ρ) называется величина

$$d_H(A, B) := \inf \{r : B_r(A) \supset B, B_r(B) \supset A\}.$$

Эквивалентное определение:

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b)\right\}.$$

Хорошо известно, что расстояние Хаусдорфа является метрикой на пространстве $H(X)$, см. [3].

Для любых точек a, b из X будем обозначать $\rho(a, b)$ просто через $|ab|$.

Следующие леммы, которые нам потребуются, доказаны в [6].

Лемма 2. Пусть A и B — компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_H(A, B)$.

Лемма 3. Пусть A — компакт в ограниченно компактном пространстве X . Тогда для любого $d > 0$ множество $B_d(A)$ также является компактом.

3. Верхняя оценка длины минимальной астросети для границ из симплекса Минковского

Напомним, что суммой Минковского множеств A и B в линейном пространстве X называется множество $A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Определим симплекс $\Delta^p = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1\}$. Для упорядоченного набора компактов $\hat{A} = (A^1, \dots, A^p)$ и вектора $\lambda \in \Delta^p$ определим множества $\lambda \hat{A} := \bigoplus_{i=1}^p \lambda_i A^i$ и $\text{span}(\hat{A}) := \bigcup_{\lambda \in \Delta^p} \lambda \hat{A}$.

Лемма 4. Пусть $\hat{A} = (A^1, \dots, A^p)$ — вектор компактов в линейном нормированном пространстве X конечной размерности. Тогда множества $\lambda \hat{A}$ и $\text{span}(\hat{A})$ являются компактами.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^p \times \underbrace{X \times \dots \times X}_{p \text{ множителей}} \rightarrow X,$$

определенное как $\varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_p), a^1, \dots, a^p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i a^i$. Это отображение линейное, поэтому является непрерывным. Поскольку множества $\{\lambda\} \times A^1 \times \dots \times A^p$ и $\Delta^p \times A^1 \times \dots \times A^p$ являются компактами, то их образы при непрерывном отображении φ , равные $\lambda \hat{A}$ и $\text{span}(\hat{A})$ соответственно, также являются компактами. Лемма доказана. \square

Теорема 2. Пусть $\hat{\mathcal{A}} = (A^1, \dots, A^p)$ и $\hat{\mathcal{B}} = (B^1, \dots, B^p)$ — векторы компактов линейном нормированном пространстве X конечной размерности такие, что $d_H(A^i, B^i) = d_i$, $i = 1, \dots, p$. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Delta^p$ справедливы неравенства $d_H(\lambda\hat{\mathcal{A}}, \lambda\hat{\mathcal{B}}) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i \leq \max\{d_i : i = 1, \dots, p\}$ и $d_H(\text{span}(\hat{\mathcal{A}}), \text{span}(\hat{\mathcal{B}})) \leq \max\{d_i : i = 1, \dots, p\}$.

Доказательство. По лемме 2, для любой точки $a^i \in A^i$ существует точка $b^i \in B^i$ такая, что $\|a^i - b^i\| \leq d_i$. Обозначим $\max\{d_i : i = 1, \dots, p\}$ через d , а $\sum_{i=1}^p \lambda_i d_i$ — через d_λ . Поскольку

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i \right) - \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i (a^i - b^i) \right\| \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|a^i - b^i\| \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i \leq d,$$

то для каждой точки $(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i) \in \lambda\hat{\mathcal{A}}$ нашлась точка $(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i) \in \lambda\hat{\mathcal{B}}$ на расстоянии не более d_λ , то есть $\lambda\hat{\mathcal{A}} \subset B_{d_\lambda}(\lambda\hat{\mathcal{B}})$. Получив аналогично включение $\lambda\hat{\mathcal{B}} \subset B_{d_\lambda}(\lambda\hat{\mathcal{A}})$, получаем, что $d_H(\lambda\hat{\mathcal{A}}, \lambda\hat{\mathcal{B}}) \leq d_\lambda$.

Если точка $(\sum_{i=1}^p \lambda_i a^i)$ принадлежит $\text{span}(\hat{\mathcal{A}})$, то она принадлежит некоторому $\lambda\hat{\mathcal{A}}$, и, по доказанному выше, существует точка $(\sum_{i=1}^p \lambda_i b^i)$ из $\lambda\hat{\mathcal{B}}$ на расстоянии не более d , но эта точка лежит также и в $\text{span}(\hat{\mathcal{B}})$. Значит, $\text{span}(\hat{\mathcal{A}}) \subset B_d(\text{span}(\hat{\mathcal{B}}))$ и, аналогично, $\text{span}(\hat{\mathcal{B}}) \subset B_d(\text{span}(\hat{\mathcal{A}}))$, откуда $d_H(\text{span}(\hat{\mathcal{A}}), \text{span}(\hat{\mathcal{B}})) \leq d$.

Лемма доказана. □

Следствие 3. *Отображения*

$$\lambda, \text{span} : \underbrace{H(X) \times \dots \times H(X)}_{p \text{ множителей}} \rightarrow H(X)$$

являются 1-липшицевыми по отношению к метрике $\max\{d_H, \dots, d_H\}$ в $H(X) \times \dots \times H(X)$.

Рассмотрим матрицу компактов $\mathcal{A} = (A_i^j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, где каждая строка $\mathcal{A}^j = (A_1^j, \dots, A_n^j)$ является упорядоченной границей в $(H(X), d_H)$. Через $\hat{\mathcal{A}}_i$ обозначим столбец $(A_i^1, \dots, A_i^p)^T$. Через $\lambda\mathcal{A}$ будем обозначать упорядоченную границу $(\lambda\hat{\mathcal{A}}_1, \dots, \lambda\hat{\mathcal{A}}_n)$, а через $\text{span}(\mathcal{A})$ — упорядоченную границу $(\text{span}(\hat{\mathcal{A}}_1), \dots, \text{span}(\hat{\mathcal{A}}_n))$. Множество $\{\lambda\mathcal{A} : \lambda \in \Delta^p\}$ будем называть симплексом Минковского для границ $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^p$.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево с границей $\partial G = \{v_1, \dots, v_n\}$ и пусть $\varphi^j : \partial G \rightarrow H(X)$, $\varphi^j : v_i \mapsto A_i^j$. Пусть Γ^j — сеть типа G с границей $\partial\Gamma^j = \varphi^j$ в

$(H(X), d_H)$. Положим $\Gamma := (\Gamma^1, \dots, \Gamma^p)$ и $\varphi := (\varphi^1, \dots, \varphi^p)$. Для любого $\lambda \in \Delta^p$ рассмотрим сеть $\lambda\Gamma$ с границей $\lambda\varphi$, которая переводит каждую вершину v графа G в $\sum_{j=1}^p \lambda_j \Gamma^j(v)$. Таким образом, $\partial(\lambda\Gamma) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \varphi^j$. Также определим сеть $\text{span}(\Gamma)$ с границей $\text{span}(\varphi)$, которая переводит v в $\text{span}(\Gamma^1(v), \dots, \Gamma^p(v))$. Из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Во введенных выше обозначениях, в линейном нормированном пространстве X конечной размерности справедливы неравенства*

$$d_H(\lambda\Gamma) \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j d_H(\Gamma^j), \quad d_H(\text{span}(\Gamma)) \leq \max_{j \in \{1, \dots, p\}} d_H(\Gamma^j).$$

В частности, получаем результат для минимальных параметрических сетей, в том числе для астросети.

Следствие 4. *Во введенных выше обозначениях, в линейном нормированном пространстве X конечной размерности справедливы неравенства*

$$\text{mprn}[G, \lambda\varphi] \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j \text{mprn}[G, \varphi^j], \quad \text{mprn}[G, \text{span}(\varphi)] \leq \max_{j \in \{1, \dots, p\}} \text{mprn}[G, \varphi^j].$$

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A} = (A_i^j)$ — матрица компактов в линейном нормированном пространстве X конечной размерности, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Delta^p$ справедливы неравенства*

$$S_{\lambda\mathcal{A}} \leq \sum_{j=1}^p \lambda_j S_{\mathcal{A}^j}, \quad S_{\text{span}(\mathcal{A})} \leq \max_{j \in \{1, \dots, p\}} S_{\mathcal{A}^j}.$$

Следствие 6. *Существуют границы такие, что в следствии 5 выполняются строгие неравенства. Пусть $P = a_1 a_2 a_3 a_4$ — квадрат с диагональю 1 в \mathbb{R}^2 , точки k_{ij} — середины сторон квадрата $[a_i, a_j]$, квадрат $k_{12} k_{23} k_{34} k_{41}$ обозначим через Q (см. рис. 1). Пусть $A_1^1 = A_2^2 = [a_1, a_3]$, $A_2^1 = A_1^2 = [a_2, a_4]$. Тогда для границ $\mathcal{A}^1 = \{A_1^1, A_2^1\}$ и $\mathcal{A}^2 = \{A_1^2, A_2^2\}$ имеем $S_{\mathcal{A}^1} = S_{\mathcal{A}^2} = \frac{1}{2}$.*

Для любого $\lambda \in \Delta^2$ компакт $\lambda \hat{\mathcal{A}}_1 = \lambda_1 A_1^1 \oplus \lambda_2 A_1^2$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям квадрата P , и вершинами, лежащими на сторонах квадрата P так, что они делят стороны в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, считая от концов диагонали $[a_1, a_3]$ (см. рис. 2). Тогда $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hat{\mathcal{A}}_1 = \frac{1}{2}(A_1^1 \oplus A_1^2) = Q$, а $\text{span}(\hat{\mathcal{A}}_1) = P$. Аналогично, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hat{\mathcal{A}}_2 = Q$ и $\text{span}(\hat{\mathcal{A}}_2) = P$, откуда $S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\mathcal{A}} = 0$ и $S_{\text{span}(\mathcal{A})} = 0$.

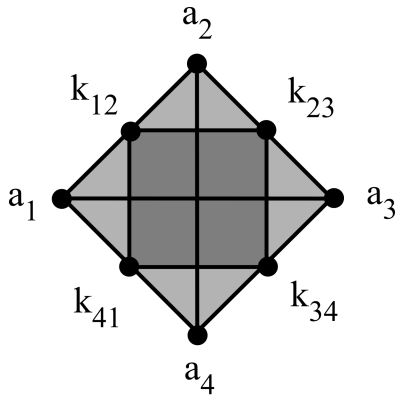


Рис. 1. К следствию 6.

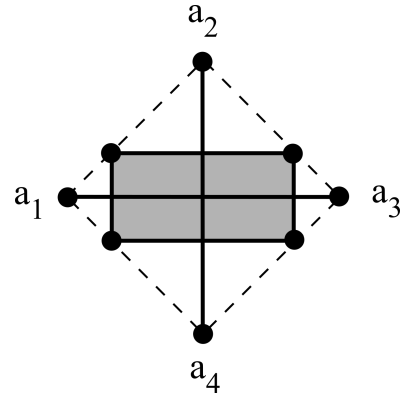


Рис. 2. Компакт $\lambda\hat{A}_1 = \lambda_1 A_1^1 \oplus \lambda_2 A_1^2$.

Напомним, что *выпуклой оболочкой* множества A в линейном пространстве X называется наименьшее по включению выпуклое множество в X , содержащее A . Будем обозначать её через $\text{conv}(A)$. В случае X конечной размерности m , согласно теореме Каратеодори (см., например, [7]),

$$\text{conv}(A) = \bigcup_{a_1, \dots, a_{m+1} \in A} \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \Delta^{m+1}} \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i a_i,$$

поэтому $\text{conv}(A) = \text{span}(\hat{A})$, где $\hat{A} = (A, \dots, A)$ (из $m+1$ компоненты). Из леммы 4 получаем, что если A является компактом, то $\text{conv}(A)$ тоже компакт. Если в теореме 2 положить все $A^j = A$ и $B^j = B$, а $p = m+1$, то получим следствие.

Следствие 7. Пусть A, B — компакты в линейном нормированном пространстве X конечной размерности. Тогда

$$d_H(\text{conv}(A), \text{conv}(B)) \leq d_H(A, B).$$

Следствие 8. Существуют компакты такие, что в следствии 7 выполняется строгое неравенство. Пусть $a_1 a_2 a_3 a_4$ — квадрат с диагональю 1 в \mathbb{R}^2 , и $A = \{a_1, a_3\}$, $B = \{a_2, a_4\}$. Тогда $\text{conv}(A) = [a_1, a_3]$, $\text{conv}(B) = [a_2, a_4]$. Значит, $d_H(A, B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, но $d_H(\text{conv}(A), \text{conv}(B)) = \frac{1}{2}$.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево в $(H(X), d_H)$. Через $\text{conv}(G) = (\text{conv}(V), \bar{E})$ обозначим дерево, вершины которого — выпуклые оболоч-

ки вершин из V , причем вершины из $\text{conv}(V)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие вершины из V . В случае конечномерного линейного нормированного пространства X применим следствие 7 к каждой паре смежных вершин из V и получим следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности. Тогда для любого дерева G в $(H(X), d_H)$ выполняется неравенство $d_H(\text{conv}(G)) \leq d_H(G)$.*

Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Через $\text{conv}(\mathcal{A})$ обозначим границу, состоящую из компактов $\text{conv}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Получаем следствие из теоремы 4.

Следствие 9. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности, \mathcal{A} — граница в $H(X)$, и G — соединяющее ее дерево, тогда*

$$\text{mрп}[G, \text{conv}(\mathcal{A})] \leq \text{mрп}[G, \mathcal{A}].$$

Поскольку кратчайшее дерево можно получить перебором минимальных параметрических сетей, то из следствия 9 получаем следующий факт.

Следствие 10. *Пусть X — линейное нормированное пространство конечной размерности, и \mathcal{A} — граница в $H(X)$, тогда $\text{smt}(\text{conv}(\mathcal{A})) \leq \text{smt}(\mathcal{A})$.*

Частным случаем следствия 9 является утверждение для минимальной астросети.

Следствие 11. *Пусть X — m -мерное нормированное пространство, и \mathcal{A} — граница в $H(X)$, тогда $S_{\text{conv}(\mathcal{A})} \leq S_{\mathcal{A}}$.*

Следствие 12. *Существует граница \mathcal{A} такая, что в следствии 11 выполняется строгое неравенство. Пусть $\mathcal{A} = \{A, B\}$, где A и B построены в следствии 8. Тогда $S_{\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, но $S_{\text{conv}(\mathcal{A})} = \frac{1}{2}$.*

Таким образом, если дана граница $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, для границы $\mathcal{B} = \{\text{conv}(A_1), \dots, \text{conv}(A_n)\}$ известен астрокомпакт Штейнера $K_{\mathcal{B}}$, и выполняется $S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{B}}) = S_{\mathcal{B}}$, то $K_{\mathcal{B}}$ является астрокомпактом Штейнера и для границы \mathcal{A} . Пример такой границы \mathcal{B} будет построен в последующих публикациях.

4. Редукция компактов. Деформация граничных компактов с неувеличением длины минимальной астротети

Пусть A, K — компакты в ограниченно компактном пространстве X . Напомним, что мы обозначаем $\rho(a, k)$ через $|ak|$, а $\inf_{k \in K} |ak|$ — через $|aK|$. Введем также следующие обозначения: $d_{AK} := \min\{d : A \subset B_d(K)\} = \sup_{a \in A} |aK|$, $d_{KA} := \min\{d : K \subset B_d(A)\} = \sup_{k \in K} |kA|$. По определению, что $d_H(A, K) = \max\{d_{AK}, d_{KA}\}$.

Определим следующие подмножества компактов A и K :

$$\text{to}_K(A) := A \setminus U_{d_{AK}}(K), \text{from}_A(K) := K \cap B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A)),$$

$$\text{to}_A(K) := K \setminus U_{d_{KA}}(A), \text{from}_K(A) := A \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)).$$

Введенные множества для произвольных компактов A и K изображены на рис. 3.

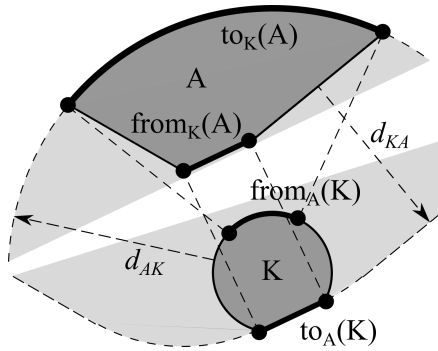


Рис. 3. Компакты A, K (закрашены серым) и множества $\text{from}_K(A), \text{to}_K(A), \text{from}_A(K), \text{to}_A(K)$.

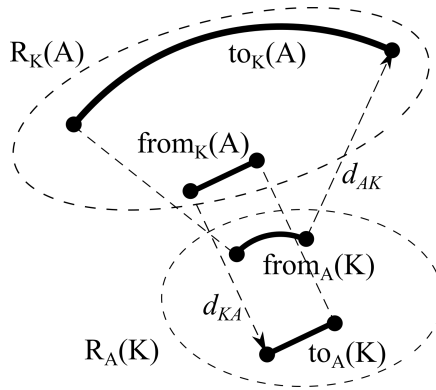


Рис. 4. Редукции $R_K(A)$ и $R_A(K)$ (обведены овалами).

Лемма 5. Множества $\text{to}_K(A)$ и $\text{from}_K(A)$ не обязаны содержаться в границе ∂A . Примеры компактов A и K , для которых не выполняются эти включения, изображены на рис. 5 и 6.

Лемма 6. Множества $\text{to}_K(A)$ и $\text{from}_A(K)$ непусты для любых компактов A и K и являются компактными.

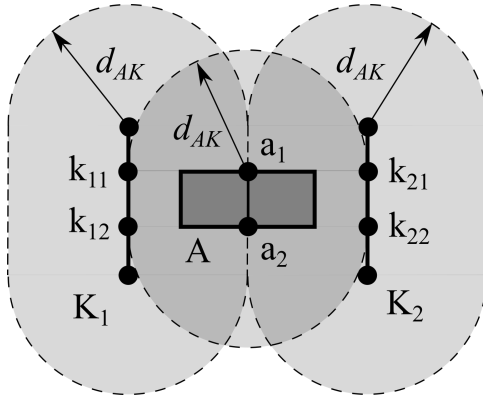


Рис. 5. Компакты A (прямоугольник) и $K = K_1 \cup K_2$, для которых $\text{to}_K(A) = [a_1, a_2]$ не лежит в ∂A , а $\text{from}_A(K)$ равен $[k_{11}, k_{12}] \cup [k_{21}, k_{22}]$.

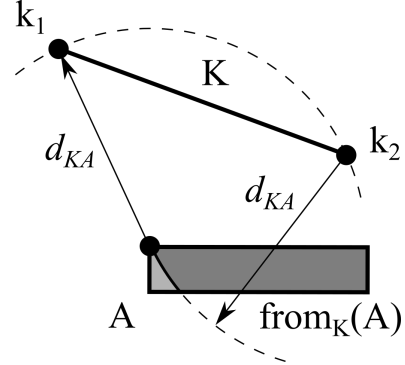


Рис. 6. Компакты A (прямоугольник) и $K = [k_1, k_2]$, для которых $\text{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$, а $\text{from}_K(A)$ (закрашен темно-серым) не содержится в ∂A .

Доказательство. Поскольку A — компакт, то существует точка $a_1 \in A$ такая, что $|a_1 K| = d_{AK}$. Но тогда $a_1 \notin U_{d_{AK}}(K)$, значит, $a_1 \in \text{to}_K(A)$.

Поскольку K — компакт, то $|a_1 K|$ достигается в некоторой точке $k_1 \in K$, и $|a_1 k_1| = d_{AK}$. Из этого и того факта, что $a_1 \in \text{to}_K(A)$, следует, что $k_1 \in B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A))$. Значит, $k_1 \in \text{from}_A(K)$.

Поскольку A — компакт, то его пересечение с $X \setminus U_{d_{AK}}(K)$ также является компактом, а это пересечение и есть $\text{to}_K(A)$. По лемме 3, $B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A))$ — компакт, значит, $\text{from}_A(K)$ также является компактом.

Лемма доказана. □

Лемма 7. Компакты $\text{to}_K(A)$ и $\text{from}_A(K)$ связаны следующими соотношениями:

- 1) Справедливо равенство $\text{to}_K(A) = \{a \in A : |aK| = d_{AK}\} = \{a \in A : |a \text{from}_A(K)| = d_{AK}\}$;
- 2) Справедливо равенство $\text{from}_A(K) = \{k \in K : |k \text{to}_K(A)| = d_{AK}\}$;
- 3) Для любой пары точек $(a, k) \in \text{to}_K(A) \times K$ или $(a, k) \in A \times \text{from}_A(K)$ выполняется $|ak| \geq d_{AK}$;

4) Для любой точки $a \in \text{to}_K(A)$ существует такая точка $k \in \text{from}_A(K)$, и для любой точки $k \in \text{from}_A(K)$ существует такая точка $a \in \text{to}_K(A)$, что $|ak| = d_{AK}$;

5) Верны равенства $d_{AK} = d_{\text{to}_K(A)K} = d_{\text{to}_K(A)\text{from}_A(K)} = d_{\text{from}_A(K)\text{to}_K(A)} = d_H(\text{to}_K(A), \text{from}_A(K)) = \inf\{|ak| : a \in \text{to}_K(A), k \in \text{from}_A(K)\}$, и инфимум достигается.

Доказательство. 1. Докажем первое равенство. Из определения следует, что $\text{to}_K(A) \subset B_{d_{AK}}(K)$, тогда для любой точки $a \in \text{to}_K(A)$ справедливо $|aK| \leq d_{AK}$. Поскольку $\text{to}_K(A) \subset (X \setminus U_{d_{AK}}(K))$, то для любой точки $a \in \text{to}_K(A)$ справедливо $|aK| \geq d_{AK}$. Значит, для любой точки $a \in \text{to}_K(A)$ справедливо $|aK| = d_{AK}$. Следовательно, $\text{to}_K(A) \subset \{a \in A : |aK| = d_{AK}\}$. Обратно, если для $a \in A$ выполняется $|aK| = d_{AK}$, то $a \notin U_{d_{AK}}(K)$, откуда $\text{to}_K(A) \supset \{a \in A : |aK| = d_{AK}\}$.

Докажем второе равенство. Если для $a \in A$ выполняется $|aK| = d_{AK}$, то существует $k \in K$ такая, что $|ak| = d_{AK}$. По определению, $k \in \text{from}_A(K)$, поэтому $|a \text{from}_A(K)| \leq d_{AK}$. Но из $\text{from}_A(K) \subset K$ следует $|a \text{from}_A(K)| \geq |aK| = d_{AK}$. Значит, $|a \text{from}_A(K)| = d_{AK}$ и, следовательно, $\{a \in A : |aK| = d_{AK}\} \subset \{a \in A : |a \text{from}_A(K)| = d_{AK}\}$. Обратно, если для $a \in A$ выполняется $|a \text{from}_A(K)| = d_{AK}$, то $|aK| \leq d_{AK}$. Однако $|a(K \setminus \text{from}_A(K))| \geq d_{AK}$, поэтому $|aK| \geq d_{AK}$. Значит, $|aK| = d_{AK}$ и, следовательно, $\{a \in A : |aK| = d_{AK}\} \supset \{a \in A : |a \text{from}_A(K)| = d_{AK}\}$.

2. Рассмотрим произвольную точку $k \in \text{from}_A(K)$. С одной стороны, $k \in K$, поэтому из определения $\text{to}_K(A)$ следует, что $|k \text{to}_K(A)| \geq d_{AK}$. С другой стороны, $k \in B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A))$, поэтому $|k \text{to}_K(A)| \leq d_{AK}$. Значит, для любой точки $k \in \text{from}_A(K)$ справедливо $|k \text{to}_K(A)| = d_{AK}$. Следовательно, $\text{from}_A(K) \subset \{k \in K : |k \text{to}_K(A)| = d_{AK}\}$. Обратно, если для $k \in K$ выполняется $|k \text{to}_K(A)| = d_{AK}$, то $a \in B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A))$, откуда $\{k \in K : |k \text{to}_K(A)| = d_{AK}\} \subset \text{from}_A(K)$.

3. Следует из пунктов 1 и 2.

4. По пункту 1, для любой $a \in \text{to}_K(A)$ выполняется $|aK| = d_{AK}$. Поскольку K — компакт, для каждой $a \in \text{to}_K(A)$ существует $k \in K$ такая, что $|ak| = d_{AK}$. Следовательно, $k \in B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A))$. Тогда, по определению, $k \in \text{from}_A(K)$. Второе утверждение пункта следует из пункта 2.

5. Равенство $d_{AK} = d_{\text{to}_K(A)K}$ следует из пункта 1.

По пункту 3, $d_{\text{to}_K(A)\text{from}_A(K)} \geq d_{AK}$, а по пункту 4, $d_{\text{to}_K(A)\text{from}_A(K)} \leq d_{AK}$, поэтому $d_{AK} = d_{\text{to}_K(A)\text{from}_A(K)}$. Аналогично, $d_{AK} = d_{\text{from}_A(K)\text{to}_K(A)}$. Из последних двух равенств следует $d_{AK} = d_H(\text{to}_K(A), \text{from}_A(K))$.

Равенство $d_{AK} = \inf\{|ak| : a \in \text{to}_K(A), k \in \text{from}_A(K)\}$ и достижение инфимума следует из пунктов 3 и 4.

Лемма доказана. □

Лемма 8. *Компакты $\text{to}_K(A)$ и $\text{from}_K(A)$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

- 1) *Справедливо равенство $A = \text{to}_K(A) \sqcup (A \cap U_{d_{AK}}(K))$;*
- 2) *Справедливо включение $(A \setminus \text{to}_K(A)) \subset U_{d_{AK}}(K)$;*
- 3) *Множество $\text{to}_K(A) \cap B_d(K')$ пусто для $d < d_{AK}$ и компакта $K' \subset K$;*
- 4) *Справедливо равенство $A = \text{from}_K(A) \sqcup (A \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)))$;*
- 5) *Справедливо включение $(A \setminus \text{from}_K(A)) \subset (X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)))$;*
- 6) *Множество $\text{from}_K(A) \cap (X \setminus B_d(\text{to}_A(K)))$ пусто для $d > d_{KA}$.*

Доказательство. 1. Верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} A &= A \cap \left((X \setminus U_{d_{AK}}(K)) \sqcup U_{d_{AK}}(K) \right) = \\ &= \left(A \cap (X \setminus U_{d_{AK}}(K)) \right) \sqcup (A \cap U_{d_{AK}}(K)) = \text{to}_K(A) \sqcup (A \cap U_{d_{AK}}(K)). \end{aligned}$$

2. Из пункта 1 получаем $A \setminus \text{to}_K(A) = (A \cap U_{d_{AK}}(K))$, поэтому $(A \setminus \text{to}_K(A)) \subset U_{d_{AK}}(K)$.

3. Следует из того, что $\text{to}_K(A) = A \cap (X \setminus U_{d_{AK}}(K))$ и $(X \setminus U_{d_{AK}}(K))$ не пересекается с $B_d(K')$ для любых $d < d_{AK}$ и компакта $K' \subset K$.

4. Верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} A &= A \cap \left((B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \sqcup (X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)))) \right) = \\ &= \left(A \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right) \sqcup \left(A \cap (X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))) \right) = \end{aligned}$$

$$= \text{from}_K(A) \sqcup \left(A \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right).$$

5. Из пункта 4 получаем $A \setminus \text{from}_K(A) = A \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$, поэтому $(A \setminus \text{from}_K(A)) \subset (X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)))$.

6. По определению, $\text{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$, но $B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$ не пересекается с $X \setminus B_d(\text{to}_A(K))$ для любого $d > d_{KA}$.

Лемма доказана. □

Компакт $\text{from}_K(A) \cup \text{to}_K(A)$ обозначим через $R_K(A)$ и будем называть *редукцией компакта A относительно компакта K* (см. рис. 4). Если редукции $R_{K_1}(A_1)$ и $R_{K_2}(A_2)$ совпадают как множества, то будем называть их совпадающими и обозначать это через $R_{K_1}(A_1) = R_{K_2}(A_2)$, а если к тому же $\text{from}_{K_1}(A_1) = \text{from}_{K_2}(A_2)$ и $\text{to}_{K_1}(A_1) = \text{to}_{K_2}(A_2)$, то будем говорить о равенстве редукций и обозначать его через $R_{K_1}(A_1) \simeq R_{K_2}(A_2)$.

Лемма 9. *Верны равенства:* $d_H(R_K(A), R_A(K)) = d_{R_K(A)R_A(K)} = d_{R_A(K)R_K(A)} = d_H(A, K)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $d_{R_K(A)R_A(K)} = d_H(A, K)$. По пункту 3 леммы 7, для любой пары точек $(a, k) \in \text{to}_K(A) \times K$ выполняется $|ak| \geq d_{AK}$, а для любой пары точек $(a, k) \in \text{from}_K(A) \times K$ выполняется $|ak| \geq d_{KA}$. Поэтому для любой $a \in \text{to}_K(A)$ верно $|aR_A(K)| \geq d_{AK}$, а для любой $a \in \text{from}_K(A)$ верно $|aR_A(K)| \geq d_{KA}$, следовательно, $d_{R_K(A)R_A(K)} = \sup_{a \in R_K(A)} |aR_A(K)| \geq d_H(A, K)$. Из пункта 4 леммы 7 следует, что $\text{to}_K(A) \subset B_{d_{AK}}(\text{from}_A(K))$ и $\text{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}(\text{to}_K(A))$, поэтому $d_{R_K(A)R_A(K)} \leq d_H(A, K)$. Следовательно, $d_{R_K(A)R_A(K)} = d_H(A, K)$.

Показывая аналогично, что $d_{R_A(K)R_K(A)} = d_H(A, K)$, получаем равенство $d_H(R_K(A), R_A(K)) = d_H(A, K)$. Лемма доказана. □

Однако если мы заменим на редукцию только один из двух компактов (например, A), то расстояние, как будет показано далее в следствии 13, может увеличиться.

Введем множество (см. рис. 7)

$$F_K(A) := R_K(A) \cup \left(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right),$$

которое будем называть *K -облаком* компакта A .

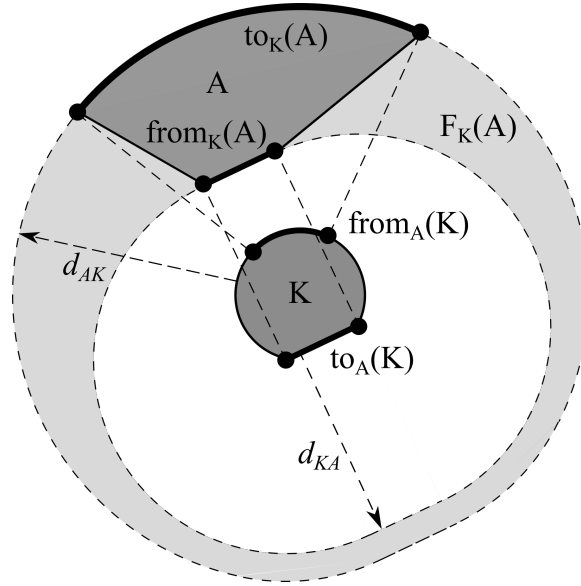


Рис. 7. Компакты A и K (закрашены темно-серым) и множество $F_K(A)$ (закрашено светло-серым).

Лемма 10. *Множество $F_K(A)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) *Редукция $R_K(A)$ не пересекается с $\left(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right)$;*
- 2) *Верно включение $A \subset F_K(A)$;*
- 3) *Для любого множества B такого, что $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$, верны равенства $\text{to}_K(A) = B \setminus U_{d_{AK}}(K)$, $\text{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$ и $B = \text{to}_K(A) \sqcup \left(B \cap U_{d_{AK}}(K) \right) = \text{from}_K(A) \sqcup \left(B \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right)$.*

Доказательство. 1. Следует из пунктов 1 и 4 леммы 8.

2. Пересекая левые и правые части включений из пунктов 2 и 5 леммы 8, получаем

$$\left(A \setminus R_K(A) \right) \subset \left(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right),$$

откуда следует доказываемое включение.

3. Поскольку $\text{to}_K(A)$ не пересекается с $U_{d_{KA}}(K)$, то из определения B следует $\text{to}_K(A) \subset B \subset \left(\text{to}_K(A) \sqcup U_{d_{KA}}(K)\right)$. Вычитая из всех частей множество $U_{d_{KA}}(K)$, получаем $\text{to}_K(A) \subset \left(B \setminus U_{d_{KA}}(K)\right) \subset \text{to}_K(A)$, откуда $\text{to}_K(A) = B \setminus U_{d_{KA}}(K)$.

Аналогично, поскольку $\text{from}_K(A)$ лежит в $B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$ и не пересекается с $X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$, то из определения B следует

$$\text{from}_K(A) \subset B \subset \left(\text{from}_K(A) \sqcup \left(X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))\right)\right).$$

Пересекая все части с $B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$, получаем

$$\text{from}_K(A) \subset \left(B \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))\right) \subset \text{from}_K(A),$$

откуда $\text{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$.

Остальные два равенства следуют из доказанных.

Лемма доказана. □

Из пункта 1 леммы 10 следует, что если вторая компонента в объединении непустая, то $F_K(A)$ не является компактом.

Пусть K — некоторый компакт. Будем говорить, что компакт B является K -деформацией компакта A , если $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. Из пункта 2 леммы 10 следует, что A является своей K -деформацией.

Лемма 11. Пусть компакт B является K -деформацией компакта A . Тогда:

- 1) $d_{BK} = d_{AK}$;
- 2) $d_{KB} \geq d_{KA}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $K \subset B_{d_{KA}}(B)$;
- 3) $d_H(K, B) \geq d_H(K, A)$;
- 4) $\text{to}_K(B) = \text{to}_K(A)$;
- 5) $\text{from}_B(K) = \text{from}_A(K)$;
- 6) Если $d_{KB} = d_{KA}$, то $\text{to}_B(K) \supset \text{to}_A(K)$;
- 7) Если $d_{KB} = d_{KA}$, то $\text{from}_K(B) \supset \text{from}_K(A)$;

8) Если $\text{to}_B(K) = \text{to}_A(K)$, то $d_{KB} = d_{KA}$.

Доказательство. 1. По определению $F_K(A)$, верно $B \subset B_{d_{AK}}(K)$, поэтому $d_{BK} \leq d_{AK}$. Для любого $d < d_{AK}$ выполняется $\text{to}_K(A) \not\subset B_d(K)$. Значит, $d_{BK} = d_{AK}$.

2. По пункту 5 леммы 7,

$$d_{KA} = \inf \left\{ d : \text{to}_A(K) \subset B_d(\text{from}_K(A)) \right\}.$$

Поскольку $B = \text{from}_K(A) \sqcup \left(B \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right)$ и

$$\inf_{k \in \text{to}_A(K)} \left| k \left(B \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right) \right| \geq d_{KA},$$

то $d_{KA} = \inf \{ d : \text{to}_A(K) \subset B_d(B) \}$. Значит,

$$\begin{aligned} d_{KB} &= \min \{ d : K \subset B_d(B) \} \geq \min \{ d : \text{to}_A(K) \subset B_d(B) \} = \\ &= \min \left\{ d : \text{to}_A(K) \subset B_d(\text{from}_K(A)) \right\} = d_{KA}. \end{aligned}$$

При этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда $K \subset B_{d_{KA}}(B)$.

3. Следует из пунктов 1 и 2, поскольку $d_H(K, B) = \max \{ d_{BK}, d_{KB} \} \geq \max \{ d_{AK}, d_{KA} \} = d_H(K, A)$.

4. По определению, $\text{to}_K(B) = B \setminus U_{d_{BK}}(K)$. Из пункта 1 следует $\text{to}_K(B) = B \setminus U_{d_{AK}}(K)$. Поскольку из пункта 3 леммы 10 следует $B = \text{to}_K(A) \sqcup \left(B \cap U_{d_{AK}}(K) \right)$, то $\text{to}_K(B) = \text{to}_K(A)$.

5. Следует из определения и пунктов 1 и 4.

6. По пункту 1 леммы 7, $\text{to}_A(K) = \{ k \in K : |k \text{from}_K(A)| = d_{KA} \}$. Пусть $k \in \text{to}_A(K)$. Поскольку $\text{from}_K(A) \subset B$, то $|kB| \leq d_{KA}$. Однако $\left(B \setminus \text{from}_K(A) \right) \subset \left(X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right)$, поэтому $\left| k \left(B \setminus \text{from}_K(A) \right) \right| \geq d_{KA}$. Значит, $|kB| \geq d_{KA}$ и, окончательно, $|kB| = d_{KA}$. По пункту 1 леммы 7, с учетом $d_{KB} = d_{KA}$, имеем $\text{to}_B(K) = \{ k \in K : |kB| = d_{KA} \}$. Следовательно, $\text{to}_A(K) \subset \text{to}_B(K)$.

7. Следует из пункта 6 и определения $\text{from}_K(B)$.

8. По пункту 2, $d_{KB} \geq d_{KA}$. Предположим, что $d_{KB} > d_{KA}$. Из определения следует, что $\text{from}_K(A) \subset B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \subset U_{d_{KB}}(\text{to}_A(K))$. Значит, для любой $a \in \text{from}_K(A)$ выполняется $|a \text{to}_A(K)| < d_{KB}$. Однако, по

пункту 3 леммы 7, для любой пары точек $(k, a) \in \text{to}_B(K) \times B$ выполняется $|ka| \geq d_{KB}$. Поскольку $\text{to}_A(K) \times \text{from}_K(A) \subset \text{to}_B(K) \times B$, получили противоречие. Значит, $d_{KB} = d_{KA}$.

Лемма доказана. □

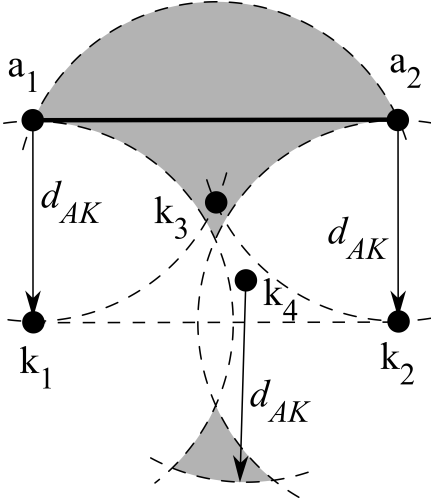


Рис. 8. К следствиям 13 и 15. Компакты $A = [a_1, a_2]$ и $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$. Множество $F_K(A)$ закрашено серым.

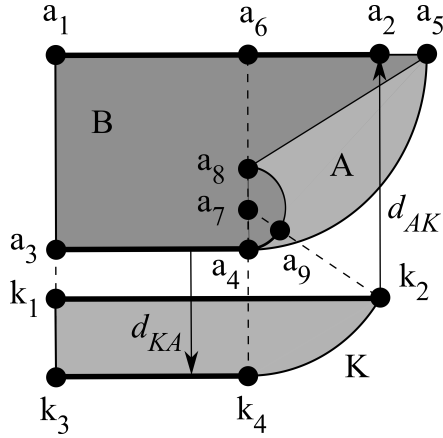


Рис. 9. К следствию 14. Компакты A и K (закрашены серым), компакт B (закрашен полосками).

Следствие 13. В пункте 2 леммы 11 компакты K, A, B могут быть такими, что $d_{KB} > d_{KA}$, и тогда в пункте 3 имеем строгое неравенство: $d_H(K, B) > d_H(K, A)$. Пример таких $A = [a_1, a_2]$ и $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ изображен на рис. 8. Здесь $|k_1a_1| = |k_2a_2| = |k_3a_1| = |k_3a_2| = d_{KA} = d_{AK}$, k_4 лежит в четырехугольнике $a_1a_2k_2k_1$ и $|k_4a_1| > d_{AK}$, $|k_4a_2| > d_{AK}$, $|k_4A| < d_{AK}$. Тогда $\text{to}_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $\text{from}_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $\text{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$, $\text{from}_A(K) = \{k_1, k_2, k_3\}$, откуда $R_K(A) = \{a_1, a_2\}$, $R_A(K) = \{k_1, k_2, k_3\}$. Следовательно, $B_{d_{AK}}(R_K(A))$ не содержит k_4 , откуда имеем $d_{KR_K(A)} > d_{KA}$. Положим $B = R_K(A)$.

Кроме того, из отсутствия равенства между d_{KB} и d_{KA} перестает работать пункт б, поскольку $\text{to}_B(K) = \{k_4\}$ не пересекается с $\text{to}_A(K) = \{k_1, k_2\}$.

Следствие 14. В пунктах 6 и 7 леммы 11 компакты K, A, B могут быть такими, что $\text{to}_B(K) \neq \text{to}_A(K)$ и $\text{from}_K(B) \neq \text{from}_K(A)$. Пример таких K, A, B изображен на рис. 9. Здесь компактом A является объединение прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$ и четверти круга с центром в a_6 и радиуса $|a_4a_6|$, точка a_5 лежит в пересечении окружности и прямой a_1a_6 так, что $a_6 \in [a_1, a_5]$. На отрезке $[a_4, a_6]$ возьмем точку a_7 . Очевидно, что полукруг с центром в a_7 радиуса $|a_7a_4|$, построенный наружу относительно прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$, целиком содержится в A . Компакт K — выпуклая фигура $k_1k_2k_4k_3$, граница которой состоит из трех отрезков $[k_1, k_2]$, $[k_1, k_3]$, $[k_3, k_4]$ и дуги окружности с центром a_7 радиуса $|a_7k_4|$ с концами k_2 и k_4 , причем k_1k_2 параллельно k_3k_4 и a_1a_5 , $a_3 \in [a_1, k_3]$, $k_1 \in [a_3, k_3]$, $a_4 \in [a_6, k_4]$. Тогда $\text{to}_A(K) = [k_3, k_4]$ и $\text{from}_K(A) = [a_3, a_4]$. Построим точку a_8 на пересечении окружности с центром a_7 радиуса $|a_4a_7|$ с отрезком $[a_6, a_7]$ и точку a_9 на пересечении этой же окружности с отрезком $[a_7, k_2]$. Определим компакт B как объединение прямоугольника $a_1a_3a_4a_6$, треугольника $\Delta a_5a_6a_8$ и полукруга с центром в a_7 и радиуса $|a_7a_4|$. Поскольку $R_K(A) \subset B \subset A$, то $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. При этом $\text{to}_A(K) = [k_3, k_4] \cup \widehat{k_2k_4}$ и $\text{from}_K(A) = [a_3, a_4] \cup \widehat{a_4a_9}$.

Будем говорить, что компакты A и B *редуктивно эквивалентны относительно компакта K* , если $R_K(A) \simeq R_K(B)$ и $R_A(K) \simeq R_B(K)$.

Лемма 12. Если компакты A и B *редуктивно эквивалентны относительно K* , то B является K -деформацией A и A является K -деформацией B .

Доказательство. Из пункта 5 леммы 7 и равенства $\text{to}_K(A) = \text{to}_K(B)$ получаем

$$d_{BK} = \min\{d : \text{to}_K(B) \subset B_d(K)\} = \min\{d : \text{to}_K(A) \subset B_d(K)\} = d_{AK}.$$

Аналогично, $d_{KA} = d_{KB}$.

По пункту 2 леммы 8, $(B \setminus \text{to}_K(B)) \subset U_{d_{BK}}(K)$, поэтому, с учетом равенств $\text{to}_K(A) = \text{to}_K(B)$ и $d_{BK} = d_{AK}$, получаем (1) $(B \setminus \text{to}_K(A)) \subset U_{d_{AK}}(K)$.

По пункту 5 леммы 8, $(B \setminus \text{from}_K(B)) \subset \left(X \setminus B_{d_{KB}}(\text{to}_B(K)) \right)$, поэтому, с учетом равенств $\text{from}_K(A) = \text{from}_K(B)$, (3) $\text{to}_A(K) = \text{to}_B(K)$ и $d_{KA} = d_{KB}$, получаем (2) $(B \setminus \text{from}_K(A)) \subset \left(X \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right)$.

Пересечение левых и правых частей (1) и (2) дает $(B \setminus R_K(A)) \subset (U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)))$ и, следовательно, $B \subset F_K(A)$. Кроме того, $R_K(A) = R_K(B) \subset B$. Таким образом, B является K -деформацией A .

Аналогично получаем, что A является K -деформацией B . Лемма доказана. \square

Лемма 13. *Если компакты A и B редуکتивно эквивалентны относительно компакта K , то $d_H(K, B) = d_H(K, A)$.*

Доказательство. Из леммы 12 следует, что B является K -деформацией A и что A является K -деформацией B . Тогда из леммы 11 следует, что $d_H(K, B) \geq d_H(K, A)$ и $d_H(K, A) \geq d_H(K, B)$, значит, $d_H(K, B) = d_H(K, A)$. Лемма доказана. \square

Следствие 15. *Из того, что B является K' -деформацией A , не следует редуکتивной эквивалентности A и B относительно компакта K . Рассмотрим компакты $A = [a_1, a_2]$ и $K' = \{k_1, k_2, k_3\}$, изображенные на рис. 8, и определим $B = \{a_1, a_2\}$. Тогда $\text{to}_B(K') = \{k_1, k_2, k_3\}$, $\text{to}_A(K') = \{k_1, k_2\}$, поэтому $R_B(K') \not\cong R_A(K')$.*

Будем говорить, что компакты A и B K -связаны, если $\text{to}_B(K) = \text{to}_A(K)$.

Лемма 14. *Если компакт B является K -деформацией компакта A , и A и B K -связаны, то A и B редуکتивно эквивалентны относительно K .*

Доказательство. Согласно пунктам 4 и 5 леммы 11, $\text{to}_K(B) = \text{to}_K(A)$ и $\text{from}_B(K) = \text{from}_A(K)$. Также по условию $\text{to}_B(K) = \text{to}_A(K)$, что, по пункту 8 леммы 11, влечет $d_{KB} = d_{KA}$. По пункту 3 леммы 10, $\text{from}_K(A) = B \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$. По определению с учетом полученных ранее равенств имеем $\text{from}_K(B) = B \cap B_{d_{KB}}(\text{to}_B(K)) = B \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K))$. Значит, $\text{from}_K(B) = \text{from}_K(A)$ и, окончательно, $R_K(B) \simeq R_K(A)$ и $R_B(K) \simeq R_A(K)$. Лемма доказана. \square

Следствие 16. *Если компакты A и B K -связаны, то A и B редуکتивно эквивалентны относительно K тогда и только тогда, когда B является K -деформацией A .*

Следствие 17. Если компакт B является K -деформацией компакта A , и A и B K -связаны, то $d_H(K, B) = d_H(K, A)$.

Пусть K — некоторый компакт. Будем говорить, что компакт B является *верхней K -деформацией* компакта A , если $A \subset B \subset F_K(A)$. Очевидно, что если B является верхней K -деформацией компакта A , то он является и K -деформацией A .

Лемма 15. Если компакт B является верхней K -деформацией компакта A , то A и B K -связаны.

Доказательство. По определению, $K \subset B_{d_{KA}}(A)$. Поскольку $A \subset B$, то $B_{d_{KA}}(A) \subset B_{d_{KB}}(B)$. Значит, $K \subset B_{d_{KB}}(B)$. Отсюда и из пункта 2 леммы 11 следует, что $d_{KB} = d_{KA}$. Следовательно, применим пункт 6 леммы 11 и получим, что $\text{to}_B(K) \supset \text{to}_A(K)$. По определению имеем

$$\text{to}_B(K) = \left(K \cap \left(X \setminus U_{d_{KB}}(B) \right) \right) \subset \left(K \cap \left(X \setminus U_{d_{KA}}(A) \right) \right) = \text{to}_A(K).$$

Таким образом, $\text{to}_B(K) = \text{to}_A(K)$. Лемма доказана. \square

Из лемм 14, 13 и 15 получаем следствие.

Следствие 18. Пусть компакт B является верхней K -деформацией компакта A . Тогда A и B *редуктивно эквивалентны относительно K* и $d_H(K, B) = d_H(K, A)$.

Будем говорить, что компакт A *from-покрывает* компакт K , если

$$\left(K \setminus \text{to}_A(K) \right) \subset U_{d_{KA}}\left(\text{from}_K(A)\right).$$

Лемма 16. Если компакт B является K -деформацией компакта A и A *from-покрывает* K , то A и B K -связаны.

Доказательство. Поскольку $\text{from}_K(A) \subset B$, то из *from-покрытия* следует, что $\left(K \setminus \text{to}_A(K) \right) \subset U_{d_{KA}}(B)$. Значит, $K \subset \left(U_{d_{KA}}(B) \cup \text{to}_A(K) \right)$. Так как $\text{to}_A(K) \subset B_{d_{KA}}\left(\text{from}_K(A)\right) \subset B_{d_{KA}}(B)$, то $K \subset B_{d_{KA}}(B)$. По пунктам 2 и 6 леммы 11, из последнего включения следует $d_{KB} = d_{KA}$ и $\text{to}_B(K) \supset \text{to}_A(K)$.

Из того, что $\left(K \setminus \text{to}_A(K) \right) \subset U_{d_{KA}}(B)$, следует $\left(K \cup \text{to}_A(K) \right) \subset \left(U_{d_{KA}}(B) \cup \text{to}_A(K) \right)$, откуда

$$\left(\left(K \cup \text{to}_A(K) \right) \setminus U_{d_{KA}}(B) \right) \subset \left(\text{to}_A(K) \setminus U_{d_{KA}}(B) \right) = \text{to}_A(K).$$

Значит, $\left((K \setminus U_{d_{KA}}(B)) \cup (\text{to}_A(K) \setminus U_{d_{KA}}(B)) \right) \subset \text{to}_A(K)$. Поскольку $\text{to}_A(K)$ и $U_{d_{KA}}(B)$ не пересекаются по построению, то $\left((K \setminus U_{d_{KA}}(B)) \cup \text{to}_A(K) \right) \subset \text{to}_A(K)$, откуда $(K \setminus U_{d_{KA}}(B)) \subset \text{to}_A(K)$. Но по определению с учетом равенства $d_{KB} = d_{KA}$ имеем $\text{to}_B(K) = K \setminus U_{d_{KA}}(B)$, откуда $\text{to}_B(K) \subset \text{to}_A(K)$. Значит, $\text{to}_B(K) = \text{to}_A(K)$.

Лемма доказана. \square

Из лемм 14, 13 и 16 получаем следствие.

Следствие 19. Пусть компакт B является K -деформацией компакта A и A from-покрывает K . Тогда A и B редуکتивно эквивалентны относительно K и $d_H(K, B) = d_H(K, A)$.

Перейдем к деформации границ и оценке длины минимальной астросети. Пусть K — некоторый компакт, и даны $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Границу \mathcal{B} назовем K -деформацией (верхней K -деформацией) границы \mathcal{A} , если B_i является K -деформацией (верхней K -деформацией) компакта A_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что границы \mathcal{A} и \mathcal{B} редуکتивно эквивалентны относительно компакта K (K -связаны), если A_i и B_i редуکتивно эквивалентны относительно компакта K (K -связаны) для каждого $i = 1, \dots, n$. Скажем, что граница \mathcal{A} from-покрывает K , если каждый A_i from-покрывает K .

Теорема 5. Если для границ $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ и астрокомпакта Штейнера $K_{\mathcal{A}}$ для границы \mathcal{A} выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) \mathcal{A} и \mathcal{B} редуکتивно эквивалентны относительно $K_{\mathcal{A}}$;
- 2) \mathcal{B} является $K_{\mathcal{A}}$ -деформацией \mathcal{A} , и \mathcal{A} и \mathcal{B} K -связаны;
- 3) \mathcal{B} является верхней $K_{\mathcal{A}}$ -деформацией \mathcal{A} ;
- 4) \mathcal{B} является $K_{\mathcal{A}}$ -деформацией \mathcal{A} , и \mathcal{A} from-покрывает $K_{\mathcal{A}}$;

то $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Из леммы 13, следствий 17, 18 и 19 следует равенство $S_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{A}})$ для пунктов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Поскольку $K_{\mathcal{A}}$ — астрокомпакт Штейнера для \mathcal{A} , то $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}(K_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{A}}$. Теорема доказана. \square

Следствие 20. На практике редуцирующая эквивалентность границ неудобна для поиска границы \mathcal{B} , поэтому далее при изучении примеров границы \mathcal{A} , для которых найдено $\Sigma(\mathcal{A})$, мы будем использовать $K_{\mathcal{A}}$ -деформацию $(K_{\mathcal{A}} \in \Sigma(\mathcal{A}))$ с дополнительным условием ($K_{\mathcal{A}}$ -связанность, включение $A_i \subset B_i$, from-покрытие).

Следствие 21. Вообще говоря, деформации границы \mathcal{A} относительно различных астрокомпактов Штейнера различаются.

Следствие 22. Продемонстрируем полученные результаты на границе $\mathcal{A}^1 = \{A_1^1, A_2^1\}$ из следствия 6. Положим $\mathcal{A} := \mathcal{A}^1$, $A_i := A_i^1$. Поскольку граница состоит из двух элементов, то $S_{\mathcal{A}} = d_H(A_1, A_2) = \frac{1}{2}$. Из статьи [6] следует, что для каждого $d \in [0, \frac{1}{2}]$ компакт $K_d := B_d(A_1) \cap B_{\frac{1}{2}-d}(A_2)$ является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} .

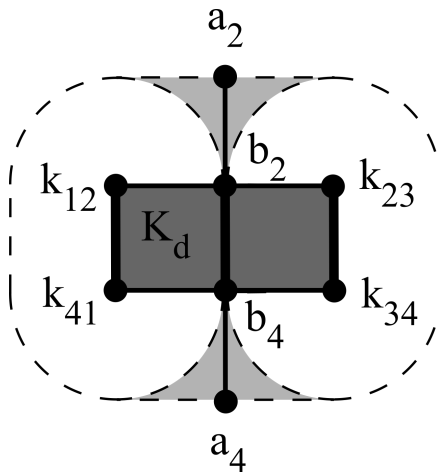


Рис. 10. K_d -облако компакта $A_2 = [a_2, a_4]$ (открытая компонента выделена светло-серым).

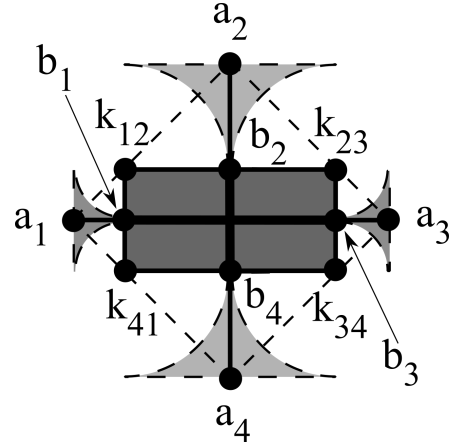


Рис. 11. K_d -облака компактов A_1, A_2 (открытые компоненты выделены серым и светло-серым).

Обозначим вершины K_d через k_{ij} , если они лежат на сторонах $[a_i, a_j]$ квадрата P . Тогда $\text{to}_{K_d}(A_2) = \{a_2, a_4\}$, $\text{to}_{A_2}(K_d) = [k_{12}, k_{41}] \cup [k_{23}, k_{34}]$ и $\text{from}_{K_d}(A_2) = [b_2, b_4]$, где b_i — ближайшая к a_i точка пересечения компакта $A_1 \cup A_2$ с границей компакта K_d , $i = 1, 2, 3, 4$. Множество $F_{K_d}(A_2)$ построено на рис. 10 и состоит из двух открытых криволинейных треугольников, объединенных с $R_{K_d}(A_2) = \{a_2, a_4\} \cup [b_2, b_4]$. Также заметим, что $(K_d \setminus \text{to}_{A_2}(K_d)) \subset U_{d_{K_d A_2}}(\text{from}_{K_d}(A_2))$, то есть A_2 from-покрывает K_d .

Аналогично получаем, что A_1 from-покрывает K_d , следовательно, граница A from-покрывает K_d . Согласно теореме 5, если граница B является K_d -деформацией A , то $S_B \leq S_A = \frac{1}{2}$. Оба K_d -облака граничных компактов A_1, A_2 построены на рис. 11. Таким образом, для каждого из континуума астрокомпактов Штейнера K_d для границы A существует континуум K_d -деформаций границы, не увеличивающих длину минимальной астросети.

Список литературы

- [1] V. Jarnik, M. Kössler, “O minimalnich grafech, obsahujících n daných bodů”, *Casopis pro pestování matematiky a fyziky*, **63**:8 (1934), 223–235.
- [2] S. Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 с.
- [3] Д. Ю. Бурого, Ю. Д. Бурого, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2004, 512 с.
- [4] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*, Наука, Москва, 1990, 384 с.
- [5] A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 432 с.
- [6] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590
- [7] Е. В. Шикин, *Линейные пространства и отображения*, Изд-во МГУ, Москва, 1987, 309 с.

An estimate for the length of a minimal parametric network in hyperspaces under deformation of the boundary set Tropin A.M.

The Fermat–Steiner problem is to find a point in the metric space Y (which we will call the Steiner astrovertex) such that the sum of the distances from it to the points of some finite fixed subset $A \subset Y$, called the boundary, is minimal. We will call the minimal sum of distances the length of the minimal astronnet. We consider this problem in the hyperspace $Y = H(X)$ of nonempty, closed, and bounded subsets of the proper space X , which are compact in this space.

This article describes a wide class of deformations of boundary compact sets that do not increase the length of the minimal astronnet. Averaging in the sense of the Minkowski sum of a finite number of boundaries consisting of an equal number of elements is also considered, and it is shown that such averaging also does not increase the length of the minimal astronnet.

Keywords: Fermat–Steiner problem, Steiner minimal tree, minimal parametric network, minimal astronnet, Steiner astrocompact, hyperspace, Hausdorff distance.

References

- [1] V. Jarnik, M. Kössler, “On minimal graphs containing n given points”, *Journal for Cultivation of Mathematics and Physics*, **63**:8 (1934), 223–235
- [2] S. Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008, 11 c.
- [3] Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, **33**, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001 (in Russian), 415 c.
- [4] O. Melnikov, R. Tyshkevich, V. Yemelichev, V. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994 (in Russian), 371 c.
- [5] A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 432 c.
- [6] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590
- [7] E. V. Shikin, *Linear spaces and mappings*, MGU, Moscow, 1987 (in Russian), 309 c.

Часть 3.
Математические модели

Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом

А. А. Демидова¹

В данной работе исследуется применение автоматов со стираемыми красками для определения свойств связных планарных неориентированных простых графов. Доказываются следующие факты: автоматам хватит двух стираемых красок для того, чтобы определить, является ли граф деревом или псевдодеревом.

Ключевые слова: Автоматы, графы, деревья, псевдодеревья.

1. Введение

Исследования автоматов, обходящих лабиринты, берут исток из работы Шеннона [1], а активное изучение поведения автоматов в лабиринтах и на графах началось после появления работ Дешпа [2-3]. Подробный анализ данного направления теории автоматов представлен в работе [4].

Известно, что даже в случае рассмотрения плоских лабиринтов автоматы не могут обойти любой лабиринт без каких-либо вспомогательных средств ([5]); поэтому для того, чтобы проблема завершения обхода являлась разрешимой, необходимо либо вводить определённые ограничения на среду, которую обходит автомат, либо наделять автомат дополнительными возможностями, которые позволяют добиться разрешимости задачи для более широкого класса сред. В частности, автоматы можно усиливать за счёт наделения их способностью оставлять метки на рёбрах или вершинах графа при его обходе. В работах, в которых рассматриваются подобные усиления автоматов, эти отметки называются красками.

В работе [6] установлено существование автомата с нестираемой краской, который может обойти произвольный прямоугольный лабиринт, оставляя метки в его вершинах.

В работе [7] представлен автомат с некоторым количеством красок, «принудительно» оставляющий отметки в посещённых вершинах лабиринта.

В работе [8] рассматриваются автоматы с одной нестираемой краской, оставляющие отметки в вершинах связных простых (без параллельных рёбер и петель) ориентированных графов с ограничением на степень вершин. Автором представлен алгоритм, который позволяет автомату без

¹ Демидова Анна Андреевна — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.dem98@mail.ru.

Demidova Anna Andreevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

краски осуществить обход графа, который ранее был обойдён автоматом с нестираемой краской.

Псевдодеревом является связный неориентированный граф, содержащий не более одного цикла. Данный объект из теории графов впервые встречается в книге [9] и используется при решении задач линейного программирования. Помимо этого результаты, связанные с псевдодеревьями и их хроматическими числами, приведены в работе [10].

В данной работе рассматриваются автоматы, анализирующие, являются ли обходимые ими связные планарные простые неориентированные графы деревьями и псевдодеревьями. Автоматы передвигаются между вершинами графа и могут ставить стираемые отметки (краски) на рёбрах, по которым проходят.

Основными результатами данной работы являются доказательства следующих фактов: автоматам хватит двух стираемых красок для того, чтобы определить, является ли обходимый граф деревом; более того, их же хватит для того, чтобы определить, является ли он псевдодеревом.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Обозначим через \mathbf{G} класс всех связных планарных неориентированных простых графов. Будем считать, что до начала обхода графа все его рёбра имеют серый цвет.

Конечным автоматом называется пятёрка $\mathcal{A}=(A, Q, B, \varphi, \psi)$, где A , B и Q являются конечными алфавитами (входным, выходным и состояний), $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$ – функция переходов, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ – функция выходов. Автомат с фиксированным начальным состоянием $q_0 \in Q$ – *инициальный*. Пусть A^* и B^* – множества всех слов $a = a(1)...a(n)$ и $b = b(1)...b(n)$ над алфавитами A и B . Система канонических уравнений инициального автомата имеет следующий вид:

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)). \end{cases} \quad (1)$$

Опишем два класса автоматов: \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 .

Автоматы из класса \mathfrak{A}_1 осуществляют обход графа по правилу левой руки и всегда перекрашивают изначально серые рёбра графа в чёрный цвет. Если автомат находится в вершине, степень которой больше 1, то автомат выбирает в качестве следующего ребро, которое находится слева

от того, по которому он попал в текущую вершину; если же степень вершины равна 1, то автомат выбирает единственное возможное ребро.

Автоматы из класса \mathcal{A}_2 по умолчанию осуществляют обход графа по правилу левой руки, однако в определённые моменты они могут выбирать не левые рёбра. На вход автомата поступает неполная информация о степени текущей вершины, а также о цветах некоторых рёбер, а именно тех, которые отмечены на Рисунке 1а: текущем ребре, ребре слева, втором ребре слева, втором ребре справа и ребре справа. На этом рисунке, так же как и на всех остальных, стрелкой отмечено, откуда автомат пришёл в текущую вершину. На выходе автомат сообщает, по какому ребру следует идти в следующий момент времени и нужно ли красить его в некоторый цвет, причём в определённых ситуациях автомат может выбирать первое или второе чёрное ребро справа (см. Рисунок 1б).

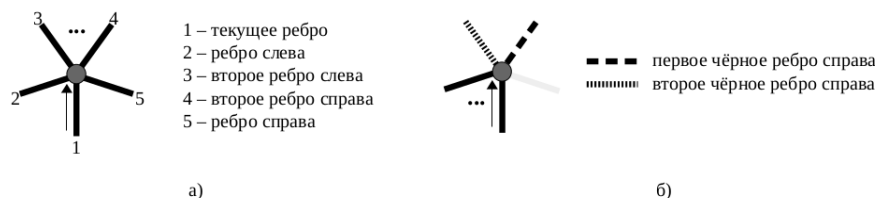


Рис. 1. Некоторые рёбра, инцидентные текущей вершине

В данной работе приводятся следующие теоремы, доказательства которых представлены в разделах 3 и 4 соответственно:

Теорема 1. *Существует автомат $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$ с двумя красками, который сможет установить, является ли произвольный граф $g \in \mathbf{G}$ деревом.*

Теорема 2. *Существует автомат $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$ с двумя красками, который сможет установить, является ли произвольный граф $g \in \mathbf{G}$ псевдодеревом.*

3. Поиск циклов в графе автоматом с двумя красками

Данный раздел содержит доказательство Теоремы 1.

Доказательство. Проведём доказательство следующим образом: сначала опишем компоненты входного и выходного векторов, а также вектора состояний; далее представим алгоритм, которому должен следовать автомат; наконец, приведём обоснование того, что алгоритм работает.

В произвольный момент времени t на вход автомату подаётся вектор $\vec{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_6(t))$, компоненты которого содержат следующую информацию:

- a_1 – степень вершины ($a_1(t) = 1$, если степень равна 1; $a_1(t) = 2$, если степень равна 2; $a_1(t) = 0$, если степень больше 2);
- a_2 – серые рёбра ($a_2(t) = 0$, если их нет; $a_2(t) = 1$, если есть ровно 1; $a_2(t) = 2$, если их больше 1);
- a_3 – чёрные рёбра ($a_3(t) = 0$, если их нет; $a_3(t) = 1$, если есть ровно 1; $a_3(t) = 2$, если их 2; $a_3(t) = 3$, если их больше 2);
- a_4 – цвет ребра слева ($a_4(t) = 0$, если оно серое; $a_4(t) = 1$, если оно чёрное);
- a_5 – цвет ребра справа ($a_5(t) = 0$, если оно серое; $a_5(t) = 1$, если оно чёрное);
- a_6 – цвет текущего ребра ($a_6(t) = 0$, если оно серое; $a_6(t) = 1$, если оно чёрное).

Выход автомата в момент времени t – вектор $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$, где:

- b_1 – выбор цвета, в который нужно красить следующее ребро:
 - 1) $b_1(t) = 0$, если его не надо красить;
 - 2) $b_1(t) = 1$, если нужен чёрный цвет;
- b_2 – выбор ребра, по которому автомат должен перейти в следующий момент времени:
 - 1) $b_2(t) = 0$ – выбор ребра, по которому автомат только что пришёл в вершину;
 - 2) $b_2(t) = 1$ – выбор левого из рёбер, инцидентных вершине;
- b_3 содержит информацию о результате исследования графа автоматом:
 - 1) $b_3(t) = 0$, если автомат ещё не определил, какими свойствами обладает граф;
 - 2) $b_3(t) = 1$, если автомат установил, что граф является деревом;
 - 3) $b_3(t) = 2$, если автомат определил, что граф не является деревом.

Состояние автомата в момент t определяется лишь одной компонентой $q(t)$, содержащей информацию о том, красил ли автомат только что ребро ($q(t) = 0$, если нет, и $q(t) = 1$ в противном случае).

Мы не будем приводить строгое описание функций φ и ψ .

Алгоритм, которому должен следовать автомат \mathcal{A}_1 , можно описать следующим образом:

- 1) Автомат осуществляет движение по графу по правилу левой руки. Он красит рёбра, по которым проходит, в чёрный цвет.
- 2) Если в некоторый момент обхода графа автомат видит среди рёбер, инцидентных текущей вершине, хотя бы два чёрных ребра, одно из которых он только что красил, то обнаружено наличие цикла. В таком случае граф не является деревом, и автомат завершает обход.
- 3) В случае отсутствия циклов в графе автомат завершает обход в тот момент, когда впервые переходит в вершину степени 1 по ребру, которое уже было покрашено в чёрный цвет ранее. Граф является деревом.

Перейдём к обоснованию работы алгоритма.

Автомат осуществляет обход графа по правилу левой руки. Если в графе присутствует цикл, то его наличие будет устанавливаться в ситуациях, когда автомат покрасил некоторое ребро в чёрный цвет и увидел среди рёбер, инцидентных текущей вершине, хотя бы ещё одно чёрное ребро. Таким образом, в случае наличия в графе цикла автомат с двумя красками сможет его обнаружить и прекратить обход графа.

В случае, если цикла в графе нет, автомату нужно будет определить, когда это дерево будет обойдено полностью. Возможны два случая:

- 1) Степень корня равна 1;
- 2) Степень корня больше 1.

Рассмотрим первый случай. Ребро, инцидентное корню, было покрашено в чёрный цвет в начальный момент времени. Когда автомат во время обхода переходит в произвольную вершину степени 1, единственное инцидентное ребро ей имеет чёрный цвет. Автомат обладает информацией о том, красил ли он только что это ребро. Если красил, то текущая вершина является листом дерева; в противном случае автомат во второй раз оказался в корне. К моменту возвращения в корень автомат полностью обошёл дерево по правилу левой руки. Таким образом, автомат завершит обход графа.

Теперь перейдём к рассмотрению второго случая. Если степень корня больше 1, то автомат прекратит обход после второго посещения первого листа. Второе посещение первого листа можно отличить от первых попаданий во все остальные листья аналогично второму посещению корня в случае, если степень корня равна 1. К указанному моменту автомат полностью обойдёт дерево по правилу левой руки и так же, как и в первом случае, завершит обход графа.

□

4. Анализ псевдодеревьев автоматом с двумя красками

Данный раздел содержит доказательство Теоремы 2.

Доказательство. Доказательство приведём в том же порядке, что и в Теореме 1.

В произвольный момент времени t на вход автомату подаётся вектор $\vec{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_7(t))$, компоненты которого содержат следующую информацию:

- a_1 – степень вершины ($a_1(t) = 1$, если степень равна 1; $a_1(t) = 2$, если степень равна 2; $a_1(t) = 3$, если степень равна 3; $a_1(t) = 4$, если степень равна 4; $a_1(t) = 5$, если степень равна 5; $a_1(t) = 0$, если степень больше 5);
- a_2 – серые рёбра ($a_2(t) = 0$, если их нет; $a_2(t) = 1$, если есть ровно 1; $a_2(t) = 2$, если их больше 1);
- a_3 – чёрные рёбра ($a_3(t) = 0$, если их нет; $a_3(t) = 1$, если есть ровно 1; $a_3(t) = 2$, если их 2; $a_3(t) = 3$, если их больше 2);
- a_4 – цвет ребра слева ($a_4(t) = 0$, если оно серое; $a_4(t) = 1$, если оно чёрное);
- a_5 – цвет ребра справа ($a_5(t) = 0$, если оно серое; $a_5(t) = 1$, если оно чёрное);
- a_6 – цвет текущего ребра ($a_6(t) = 0$, если оно серое; $a_6(t) = 1$, если оно чёрное);
- a_7 – цвет второго слева ребра ($a_7(t) = 0$, если оно серое; $a_7(t) = 1$, если оно чёрное).

Выход автомата в момент времени t – вектор $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$, где:

- b_1 – выбор цвета, в который нужно красить следующее ребро:
 - 1) $b_1(t) = 0$, если его не надо красить;
 - 2) $b_1(t) = 1$, если нужен серый цвет;
 - 3) $b_1(t) = 2$, если нужен чёрный цвет;
- b_2 – выбор ребра, по которому автомат должен перейти в следующий момент времени:
 - 1) $b_2(t) = 0$ – выбор ребра, по которому автомат только что пришёл в вершину;
 - 2) $b_2(t) = 1$ – выбор левого из рёбер, инцидентных вершине;
 - 3) $b_2(t) = 2$ – выбор второго слева из рёбер, инцидентных вершине, если её степень больше 2;
 - 4) $b_2(t) = 3$ – выбор второго справа чёрного ребра среди инцидентных вершине, если её степень больше 2;
 - 5) $b_2(t) = 4$ – выбор правого из чёрных рёбер, исходящих из вершины, если её степень больше 2;
 - 6) $b_2(t) = 5$ – выбор правого из рёбер, инцидентных вершине;
- b_3 содержит информацию о результате исследования графа автоматом:
 - 1) $b_3(t) = 0$, если автомат ещё не определил, какими свойствами обладает граф;
 - 2) $b_3(t) = 1$, если автомат установил, что граф является деревом;
 - 3) $b_3(t) = 2$, если автомат установил, что граф является псевдодеревом с одним циклом;
 - 4) $b_3(t) = 3$, если граф обнаружил, что в графе больше одного цикла.

Состояние автомата в момент t определяется вектором $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_8(t))$ со следующими компонентами:

- q_1 – направление обхода графа ($q_1(t) = 0$, если обход осуществляется по правилу левой руки, и $q_1(t) = 1$, если по правилу правой руки);
- q_2 – красил ли автомат только что ребро ($q_2(t) = 0$, если нет, и $q_2(t) = 1$ в противном случае);
- q_3 – стадия, на которой находится автомат в исследовании свойств графа. Стадиями в данном случае могут быть обход графа в поисках цикла, второй обход по циклу в поисках ветвлений и т.д.;

- q_4 – красил ли автомат некоторое ребро в серый цвет до текущего момента обхода;
- q_5 – наличие ветвлений в вершинах цикла, отличных от той, в которой было установлено существование цикла. До перехода к стадии поиска ветвлений во время второго прохода по циклу $q_5(t) = 0$. Автомату нужна информация только о наличии хотя бы одного ветвления. Если при повторном проходе по циклу по правилу левой руки автомат оказывается в вершине, степень которой больше 2, то он обнаруживает наличие ветвления. Ветвление может быть левым или правым: левое обнаруживается ($q_5(t) = 2$), если некоторой вершине инцидентны хотя бы 3 чёрных ребра; если в вершине есть правое ветвление ($q_5(t) = 1$), то правое ребро должно быть серого цвета. Приоритетом обладают левые ветвления, так что, если автомат обнаружит сначала некоторое правое ветвление, а потом – левое, то в результате $q_5(t) = 2$;
- q_6 – наличие левого ветвления в вершине, в которой было обнаружено существование цикла в графе. До перехода к стадии поиска ветвлений во время второго прохода по циклу $q_6(t) = 0$. $q_6(t) = 1$, если либо соответствующей вершине инцидентны по крайней мере 2 чёрных ребра, либо левое ребро является серым;
- q_7 – наличие правого ветвления в вершине, в которой было обнаружено существование цикла в графе. До перехода к стадии поиска ветвлений во время второго прохода по циклу $q_7(t) = 0$. $q_7(t) = 1$, если в соответствующей вершине правое ребро – серое;
- q_8 – индикатор того, встречались ли автомату вершины, степень которых больше 2.

Мы не будем приводить строгое описание функций φ и ψ .

Алгоритм, которому следует автомат \mathcal{A}_2 , можно описать следующим образом:

- 1) Автомат осуществляет движение по графу по правилу левой руки, нанося чёрную краску на все рёбра, по которым проходит, пока не обнаружит наличие цикла. Если к моменту второго посещения первого листа цикл не был обнаружен, то граф является деревом.
- 2) Автомат перекрасит ребро, по которому только что прошёл, в серый цвет. После этого он вернётся в вершину, в которой было обнаружено наличие цикла, и осуществит второй обход цикла с целью установить, были ли в цикле левые (лежащие вне грани, ограниченной циклом, и раскрашенные при первом проходе по циклу) и

правые (лежащие внутри грани, ограниченной циклом, и не обойдённые при первом проходе по циклу) ответвления. Поскольку последовательности рёбер при двух проходах по циклу будут совпадать, то первым левым серым ребром, которое встретится автомату в ходе движения по правилу левой руки, будет то, которое он перекрашивал в серый цвет.

3) Возможны следующие ситуации:

- а) Если автомат не обнаружил ни левых, ни правых ветвлений, то граф является циклом, и, следовательно, псевдодеревом. Автомат завершает обход.
- б) Если ветвления были, но среди них не было левых (в том числе отсутствовало левое ветвление в вершине, в которой было обнаружено наличие цикла), автомат, двигаясь по правилу левой руки в том же направлении, что было первоначально, перекрасит цикл обратно в серый цвет. Вернувшись в вершину цикла, из которой был начат обход, автомат начнёт поиск вершины, степень которой больше 2. Перейдя в соответствующее правое ветвление, автомат начнёт красить рёбра в чёрный цвет. Ситуация сведена к случаю, когда обход графа начинается из вершины, лежащей внутри грани, ограниченной циклом.
- в) Если левые ответвления были, то дальнейшие действия автомата зависят от наличия левого и правого ветвлений в вершине, в которой было обнаружено наличие цикла. Если левое есть, а правого нет, то автомат просто переходит по обнаруженному им серому ребру, не крася его; во всех остальных случаях автомат дополнительно перекрашивает соответствующее ребро в чёрный цвет. Далее, если левое есть, то автомат обходит его и перекрашивает самое правое из ведущих в него рёбер в серый цвет. Если левое в графе отсутствует, то автомат идёт по циклу по правилу левой руки и ищет первое левое ветвление, в котором красит в серый цвет самое правое из рёбер, ведущих в соответствующее ветвление. Среди всех рёбер, инцидентных соответствующей вершине цикла, это ребро является вторым чёрным справа. После этого автомат возвращается по тому же ребру, уже не нанося на него краску. Автомат переходит по второму слева ребру и начинает движение по циклу по правилу левой руки в направлении, противоположном первоначальному. Автомат обойдёт цикл и все правые ветвления и установит, что обход окончен, когда окажется в вершине, которой инциденты хотя бы два чёрных ребра и ровно одно серое,

причём левое ребро для автомата будет чёрным, а правое – серым.

- 4) Если в некоторый момент времени автомат обнаружил существование ещё одного цикла, то граф не является псевдодеревом. Автомат завершает обход.

Перейдём к обоснованию работы алгоритма.

Из Теоремы 1 следует, что автомату хватит двух красок для того, чтобы установить отсутствие циклов в графе. Далее будем предполагать, что в графе есть один цикл.

Общий вид рассматриваемого графа представлен на Рисунке 2. Будем считать, что цикл имеет длину n ; v_i ($i = \overline{1, n}$) – вершины цикла, занумерованные в том порядке, в котором автомат посещает их в первый раз; $G_{i,j}$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, 2}$) – поддеревья, исходящие из вершин цикла, такие, что для $\forall i = \overline{1, n}$ $G_{i,1}$ лежит вне грани, ограниченной рассматриваемым циклом, а $G_{i,2}$ располагается в ней. Подразумевается, что на рисунке рёбра, ведущие из v_i в $G_{i,1}$ и $G_{i,2}$ ($i = \overline{1, n}$), на самом деле могут обозначать наличие более одного ребра.

Автомат установит наличие цикла, когда окажется в вершине, которой инцидентны по крайней мере 2 чёрных ребра, одно из которых он только что красил. Это соответствует переходу из вершины v_n в v_1 .

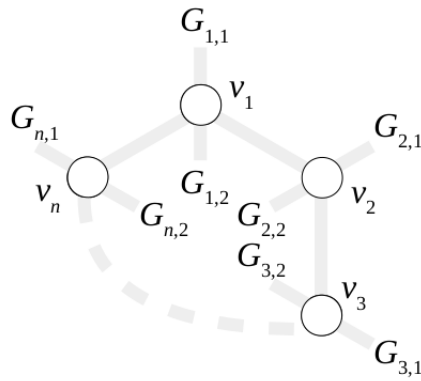


Рис. 2. Общий вид рассматриваемого графа

Возможны следующие случаи:

- 1) Автомат начал обход графа из $G_{1,1}$ (см. Рисунок 3а);
- 2) Автомат начал обход графа из $G_{1,2}$ (см. Рисунок 3б);
- 3) Автомат начал обход графа из вершины v_1 , принадлежащей циклу. В начальный момент времени он мог либо приступить к движению

по циклу (см. Рисунок 3в), либо перейти из v_1 в $G_{1,j}$ ($j = 1, 2$). Эти случаи сводятся к первым двум.

Порядок обхода графа до обнаружения наличия цикла представлен на Рисунке 3. В зависимости от того, из какого $G_{1,j}$, $j = \overline{1, 2}$, автомат начинал обход графа, при движении по циклу по правилу левой руки он также будет обходить либо $G_{i,1}$ ($i = \overline{2, n}$), лежащие вне грани, ограниченной рассматриваемым циклом, либо $G_{i,2}$ ($i = \overline{2, n}$), лежащие внутри этой грани. Следует отметить, что к моменту начала движения по циклу соответствующий $G_{1,j}$ ($j = \overline{1, 2}$) может быть обойдён не полностью, что отражено на Рисунках 3а и 3б.

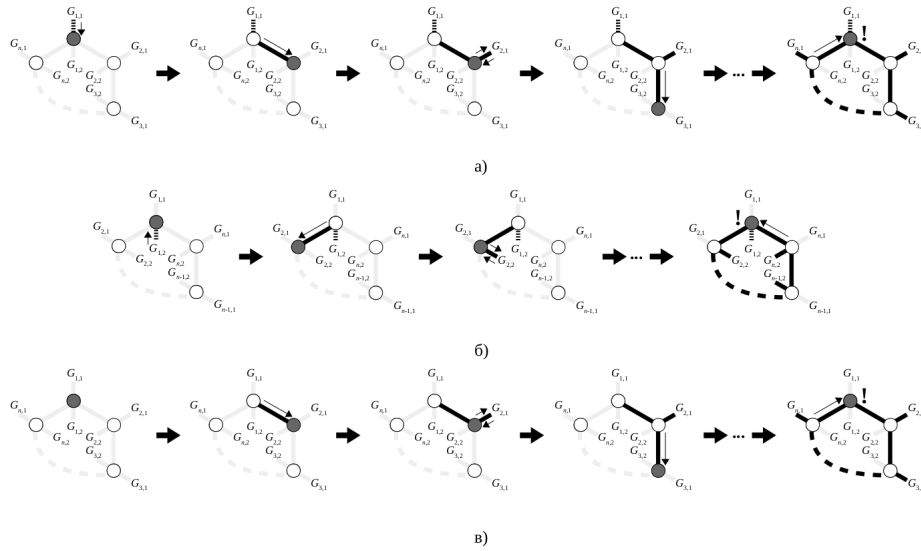


Рис. 3. Порядок обхода графа до обнаружения наличия цикла

Будем рассматривать случай, когда движение по псевдодереву начинается из $G_{1,1}$ (возможно, $G_{1,1}$ состоит лишь из вершины v_1).

Последовательность действий после обнаружения цикла отражена на Рисунке 4. Автомат перекрасит ребро, которое только что красил в чёрный цвет, в серый цвет (это ребро, соединяющее v_1 и v_n), вернётся обратно в v_1 и отдельно запомнит, увидел ли он в ней левые и правые ветвления. Далее автомат перейдёт по самому правому из чёрных рёбер в v_2 и начнёт движение по циклу по правилу левой руки в направлении, совпадающем с первоначальным, с целью установить, были ли в цикле левые (лежащие вне грани, ограниченной циклом, и раскрашенные при первом проходе по циклу) и правые (лежащие внутри грани, ограниченной циклом, и не обойдённые при первом проходе по циклу) ветвления.

Поскольку последовательности рёбер при двух проходах по циклу будут совпадать, то первым серым ребром, которое встретится автомату в ходе движения по правилу левой руки, будет $v_n v_1$. При этом автомат будет помнить, что он уже перекрашивал одно из рёбер графа в серый цвет.

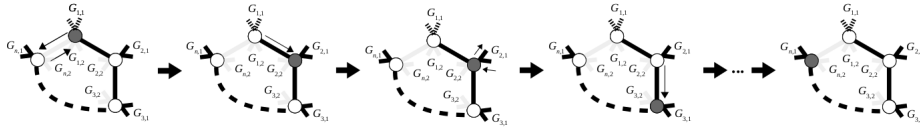


Рис. 4. Повторный обход цикла с целью выявления левых и правых ветвлений

К этому моменту автомат ещё не обошёл $G_{i,2}$, $i = \overline{1, n}$, и, возможно, не полностью обошёл $G_{1,1}$. Автомат уже обладает информацией о том, были ли в цикле левые и правые ветвления, а также о наличии в графе $G_{1,1}$ и $G_{1,2}$.

Если в ходе повторного движения по циклу автомат вообще не попал в вершины степени больше 2, то граф является циклом и, соответственно, псевдодеревом. При этом в результате повторного обхода цикла автомат всё же попадёт в ситуацию, когда ребро справа будет белым. Это произойдёт при возвращении в вершину v_n . Автомат определит, что это не признак правого ветвления: во-первых, степень вершины равна 2; во-вторых, ему вообще не попадались вершины степени больше 2.

Если ветвления были, но среди них не было левых (в том числе отсутствовал $G_{1,1}$), то существует $i \in \overline{1, n}$: $G_{i,2} \neq \emptyset$. В таком случае автомат может осуществить следующие действия: он продолжит движение по циклу по правилу левой руки в том же направлении, которое было первоначально, но теперь будет перекрашивать рёбра цикла в серый цвет. Когда автомат перекрасит весь цикл, он увидит вокруг только серые рёбра, после чего должен будет начать движение по циклу по правилу левой руки в направлении, совпадающем с первоначальным. Однако красить что-то в чёрный цвет он начнёт только после того, как увидит слева $G_{i,2} \neq \emptyset$ (это произойдёт тогда, когда автомат окажется в вершине, степень которой больше 2). Автомат перейдёт по правилу левой руки в $G_{i,2}$ и начнёт красить рёбра в чёрный цвет. Таким образом, ситуация сведена в случае, когда автомат начинает движение по графу из поддерева, лежащего внутри грани, ограниченной циклом, причём хотя бы одно такое поддерево существует.

Остальные ситуации можно разбить на 3 случая в зависимости от наличия в графе $G_{1,1}$ и $G_{1,2}$:

- 1) $G_{1,1}$ в графе отсутствует, но есть другие левые ветвления;

2) В графе есть как $G_{1,1}$, так и $G_{1,2}$;

3) В графе есть $G_{1,1}$, но нет $G_{1,2}$.

Разбор каждого из этих случаев начинается с того момента, когда автомат прошёл по циклу по второму разу по правилу левой руки в направлении, совпадающем с первоначальным, и увидел слева серое ребро (это будет ребро, соединяющее вершины v_n и v_1).

1) $G_{1,1}$ в графе отсутствует, но есть другие левые ветвления (см. Рисунок 5).

Автомат перекрасит увиденное им серое ребро, соединяющее вер-

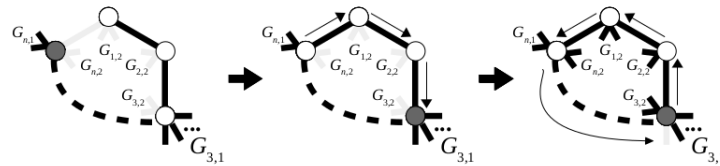


Рис. 5. Первый случай

шины v_n и v_1 , в чёрный цвет, после чего продолжит движение по правилу левой руки в направлении, совпадающем с первоначальным, в поисках первого левого ветвления. Поскольку случай, когда автомат при повторном обходе цикла не обнаружил ни одного левого ветвления, уже был разобран ранее, теперь хотя бы одно левое ветвление есть. Без ограничения общности будем считать, что это $G_{3,1}$. Автомат дойдёт до вершины, которой инцидентны по крайней мере 3 чёрных ребра, одно из которых относится к циклу, второе ведёт в поддерево $G_{3,1}$, которое было обойдено ранее, а третье либо ведёт в то же поддерево, либо относится к циклу. Поскольку автомат знает цвет текущего ребра, а также цвета первого и второго слева, он сможет понять, что дошёл до v_3 . Автомат раскрасит второе справа чёрное ребро, являющееся самым правым из ведущих в $G_{3,1}$, в серый цвет, после чего начнёт движение по циклу по правилу левой руки в направлении, противоположном первоначальному. При этом автомат обойдёт и $G_{3,2}$, $G_{2,2}$, $G_{1,2}$, $G_{n,2}, \dots, G_{4,2}$. Когда автомат окажется в вершине, которой инцидентно лишь одно серое ребро, являющееся при этом самым правым, и хотя бы 2 чёрных ребра, он поймёт, что вернулся в v_3 . В таком случае самое левое ребро будет чёрным, а самое правое – серым. Когда автомат шёл по циклу в направлении, противоположном первоначальному, то в вершинах $v_2, v_1, v_n, \dots, v_4$ самыми правыми для него были некоторые чёрные ребра, а при обходе $G_{i,2}$ ($i \in \{1, 2, 4, \dots, n\}$) самое правое

могло быть серым, но тогда и левое было бы серым. Следовательно, ситуация, когда самое левое – чёрное, а самое правое – серое, означает, что автомат вернулся к ребру, которое перекрашивал в серый цвет. Более того, к этому моменту обход псевдодерева завершён.

2) В графе есть как $G_{1,1}$, так и $G_{1,2}$ (см. Рисунок 6).

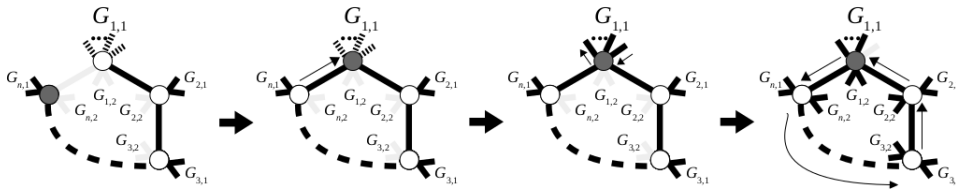


Рис. 6. Второй случай

Автомат перекрасит увиденное им серое ребро, соединяющее вершины v_n и v_1 , в чёрный цвет, после чего по правилу левой руки обойдёт $G_{1,1}$. Возможно, что данное поддерево уже было частично обойдено до попадания в цикл. Когда автомат обойдёт $G_{1,1}$, он по правилу левой руки должен будет перейти из v_1 в v_2 , и при этом правее этого ребра будет лежать ещё не обойдённый $G_{1,2}$. При обходе $G_{1,1}$ по правилу левой руки автомат не может попасть в ситуацию, когда левое ребро, по которому он должен пройти, имеет чёрный цвет, а следующее за ним среди рёбер, инцидентных той же вершине, имеет серый цвет, – следовательно, если автомат увидит такую пару рёбер, ему станет известно, что $G_{1,1}$ обойдён полностью, а второе из увиденных им рёбер является самым левым из рёбер, ведущих из v_1 в $G_{1,2}$. Как только автомат установит, что $G_{1,1}$ обойдён полностью, он перекрасит в серый цвет то ребро из $G_{1,1}$, по которому только что прошёл, пройдёт обратно по этому ребру в v_1 и начнёт движение по циклу по правилу левой руки в направлении, противоположном первоначальному. При этом автомат обойдёт и $G_{1,2}$, $G_{n,2}$, $G_{n-1,2}, \dots$, $G_{3,2}$, $G_{2,2}$. Когда автомат вернётся в вершину, которой инцидентно лишь одно серое ребро, являющееся при этом самым правым, и хотя бы 2 чёрных ребра, он установит, что вернулся в v_1 . Так же, как и в первом случае, автомат завершит обход.

3) В графе есть $G_{1,1}$, но нет $G_{1,2}$ (см. Рисунок 7).

Как и во втором случае, автомат должен пройти по увиденному им

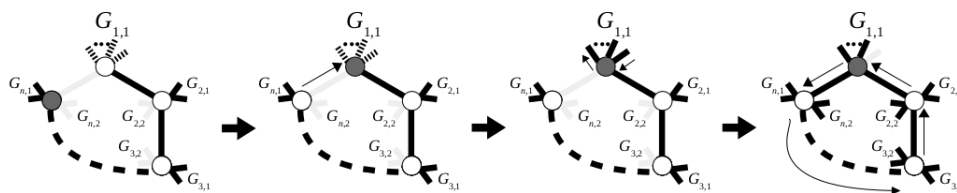


Рис. 7. Третий случай

серому ребру, соединяющему v_n и v_1 , и обойти $G_{1,1}$, однако в случае отсутствия в графе $G_{1,2}$ по правилу левой руки за ребром v_1v_2 будет следовать v_1v_n . Поскольку при втором обходе цикла можно было запомнить, есть ли в графе $G_{1,1}$ и $G_{1,2}$, автомат не станет красить ребро, увиденное им серое ребро, соединяющее v_n и v_1 , в чёрный цвет, в результате чего признак окончания обхода $G_{1,1}$ останется прежним. Так же, как и во втором случае, автомат перекрасит в серый цвет последнее ребро из $G_{1,1}$, по которому он проходил, после чего перейдёт по второму ребру слева (из v_1 в v_n), покрасив соответствующее ребро, и начнёт движение по циклу по правилу левой руки в направлении, противоположном первоначальному. При этом автомат обойдёт и $G_{n,2}$, $G_{n-1,2}, \dots, G_{3,2}$, $G_{2,2}$. Когда автомат попадёт в вершину, которой инцидентно лишь одно серое ребро, являющееся при этом самым правым, и хотя бы 2 чёрных ребра, он установит, что это v_1 . Так же, как и в первых двух случаях, автомат завершит обход.

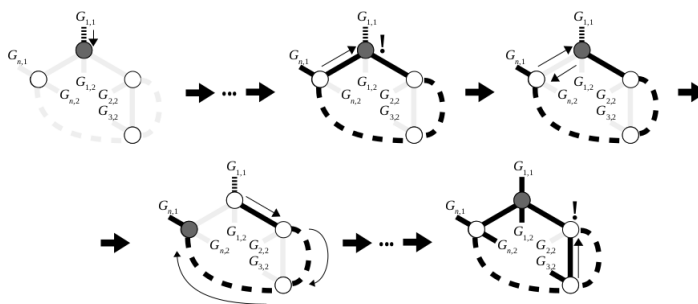


Рис. 8. Обход графа с двумя циклами, имеющими общее ребро

Если граф, обход которого осуществляет автомат, содержит более одного цикла, то при обнаружении второго цикла автомат установит, что граф не является псевдодеревом. Допустим, что в графе есть два цикла, и приведём примеры. Если они имеют общее ребро, то наличие второго

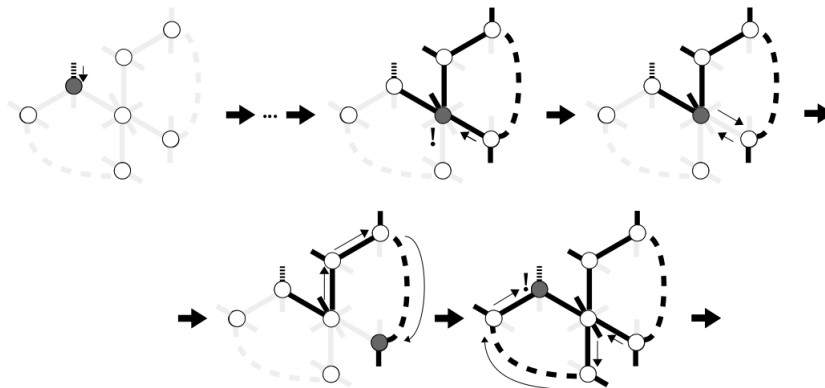


Рис. 9. Обход графа с двумя циклами, имеющими общую вершину

цикла может быть обнаружено тогда, когда автомат будет обходить поддерева, лежащие внутри грани, ограниченной циклом (см. Рисунок 8). Если они имеют общую вершину, то наличие цикла может быть обнаружено после повторного прохода по циклу (см. Рисунок 9).

Случай, когда автомат начинает обход графа из $G_{1,2}$, разбирается аналогично.

□

5. Выводы

В данной работе представлены два алгоритма для автоматов, осуществляющих обход графов. Доказано, что автоматы, действующие согласно этим алгоритмам, смогут установить, является ли граф деревом или псевдодеревом, с использованием двух стираемых красок.

Список литературы

- [1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found.*, 1951, 173–180.
- [2] Döpp K., “Automaten in Labyrinthen I”, *EIK*, **7:2** (1971), 79–94.
- [3] Döpp K., “Automaten in Labyrinthen II”, *EIK*, **7:3** (1971), 167–190.
- [4] Кудрявцев В. Б., Килибарда Г., Ушчумлич Ш., “Системы автоматов в лабиринтах”, *Интеллектуальные системы*, **10:1–4** (2006), 449–562.
- [5] Budach L., “Automata and labyrinths”, *Mathematische Nachrichten*, **86:1** (1978), 195–282.
- [6] Насыров А. З., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки”, *Дискретная математика*, **9:1** (1997), 123–133.

- [7] Голованов А. В., “Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта”, *Интеллектуальные системы*, **3:3–4** (1998), 193–212.
- [8] Голубев Д. В., “Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской”, *Интеллектуальные системы*, **4:1–2** (1999), 243–272.
- [9] Dantzig G., *Linear programming and extensions*, Princeton university press, 1963.
- [10] Ищенко Р. А., “О разложении графов на подграфы специального вида”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:4** (2016), 184–192.

Automaton analysis of the properties of a graph to be a tree and a pseudo-tree
Demidova A.A.

In this paper, we investigate the use of automata with erasable colors to determine the properties of connected planar undirected simple graphs. The following facts are proved: two erasable colors are enough for automata to determine whether the graph is a tree or a pseudo-tree.

Keywords: Automata, graphs, trees, pseudotrees.

References

- [1] Shannon Cl. E., “Presentation of a maze-solving machine”, *Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found.*, 1951, 173–180.
- [2] Döpp K., “Automaten in Labyrinthen I”, *EIK*, **7:2** (1971), 79–94.
- [3] Döpp K., “Automaten in Labyrinthen II”, *EIK*, **7:3** (1971), 167–190.
- [4] Kudryavtsev V. B., Kilibarda G., Ušćumlić Š., “Automata systems in labyrinths”, *Intelligent Systems*, **10:1–4** (2006), 449–562 (In Russian).
- [5] Budach L., “Automata and labyrinths”, *Mathematische Nachrichten*, **86:1** (1978), 195–282.
- [6] Nasyrov A. Z., “On traversing labyrinths by automata that leave not-erasable marks”, *Discrete mathematics*, **9:1** (1997), 123–133 (In Russian).
- [7] Golovanov A. V., “On traversing labyrinths by automata that leave a trail at the vertices of the labyrinth”, *Intelligent Systems*, **3:3–4** (1998), 193–212 (In Russian).
- [8] Golubev D. V., “On graph traversal by automata with one not-erasable paint”, *Intelligent Systems*, **4:1–2** (1999), 243–272 (In Russian).
- [9] Dantzig G., *Linear programming and extensions*, Princeton university press, 1963.
- [10] Ischenko R. A., “Decomposition of graphs into subgraphs of a special form”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **20:4** (2016), 184–192 (In Russian).

О формульном представлении функции Шеннона

М. В. Носов¹

В работе представлена формула, задающая функцию Шеннона для схем в базисе из штриха Шеффера.

Ключевые слова: штрих Шеффера, схема из функциональных элементов, функция Шеннона.

Пусть штрих Шеффера является базисом схем из функциональных элементов, пусть $f \in P_{2,n}$. Будем полагать, что схема обязательно содержит хотя бы один элемент, это условие коснётся только селекторов (их сложность будет равна 2). Представим сложность минимальной схемы f (см. Носов М.В. Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера. Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2017. Т.21, вып.2, М., С.193-196).

$$L_{\{\}}(f) = \sum_{p=n+1}^m F(f, p),$$
$$F(f, p) = \prod_{\substack{\{(i_l, j_l, l)\} \\ l=n+1, \dots, m}} Y_m \left(1 - \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^m A \times B \right),$$
$$A = \left(1 - (y_{kp} - f(y_{k1}, \dots, y_{kn}))^2 \right),$$
$$B = \left(1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki} y_{kj})^2 \right),$$

где m такое натуральное число, что для любая булевская функция от n переменных реализуется схемой в базисе из штриха Шеффера, сложности не более $m - n$, $\{(i_l, j_l, l)\}$ множество троек натуральных чисел, $l = n + 1, \dots, m, i_l < l, j_l < l, Y_m = (y_{rt})$ -матрица размером $2^n \times n$, у которой первые n столбцов есть E_2^n , а остальные переменные свободные, принимающие значения $\{(0, 1)\}$. Функционал $F(f, p)$ таков, что

$$F(f, p) = 1 \iff p \leq L_{\{\}}(f),$$
$$F(f, p) = 0 \iff L_{\{\}}(f) < p \leq m.$$

¹Носов Михаил Васильевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@mail.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Следовательно,

$$\sum_{f \in P_{2,n}} F(f, p) = 0 \iff p > L(n),$$
$$\sum_{f \in P_{2,n}} F(f, p) \geq 1 \iff p \leq L(n).$$

Таким образом,

$$L(n) = m - \sum_{p=n+1}^m \int_0^1 \exp\{2\pi i (\sum_{f \in P_{2,n}} F(f, p))t\} dt.$$

**On the formulaic representation of the Shannon function
Nosov M.V.**

The paper presents a formula for the Shannon function for schemes in the basis of the Schaeffer stroke.

Keywords: Schaeffer's stroke, schema of functional elements, Shannon function.

Сложность многослойных d -мерных схем

Т. Р. Сытдыков¹, Г. В. Калачев²

В данной работе рассматривается модель многослойных схем с одним функциональным слоем. В качестве графов-носителей выступают λ -сепарируемые графы. Доказана нижняя оценка функции Шеннона для сложности данного вида схем $\max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$, где k — число слоев. Для d -мерных графов, которые являются частным случаем λ -сепарируемых графов для $\lambda = \frac{d-1}{d}$, таким образом получена нижняя оценка функции Шеннона $\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}$. Для прямоугольных многомерных схем доказанная нижняя оценка асимптотически совпадает с верхней оценкой.

Ключевые слова: многослойные схемы, многомерные схемы, асимптотика функции Шеннона, сложность схем, сепараторы в графах.

1. Введение

Задача синтеза схем, вычисляющих булевы функции и обладающих в некотором смысле оптимальными или субоптимальными характеристиками, возникла в середине XX века в связи с бурным развитием вычислительной техники. С 1950-х гг. одной из наиболее интенсивно исследуемых моделей схем являются схемы из функциональных элементов (СФЭ). Одной из естественных характеристик оптимальности СФЭ является сложность — количество функциональных элементов в схеме. Соответственно, сложность булевой функции можно определить как минимальную сложность схемы, реализующей данную функцию. Маллер в [24] показал, что для любой булевой функции от n переменных порядок ее сложности не превосходит $\frac{2^n}{n}$. Лупанов в [12] доказал, что для почти всех булевых функций от n переменных сложность в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$. Также Лупанов получил асимптотические оценки сложности булевых функций для произвольного конечного базиса.

¹Сытдыков Тимур Рашидович — инженер-программист, Google LLC, e-mail: s7t1r9@gmail.com.

Sitdikov Timur Rashidovich — Software Engineer, Google LLC, e-mail: s7t1r9@gmail.com.

²Калачев Глеб Вячеславович — к.ф.-м.н., м.н.с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Problems of Theoretical Cybernetics Lab.

На практике, однако, при синтезе схем необходимо учитывать такие моменты, как расположение функциональных элементов в пространстве, разводку проводов и др. В 1960-х гг. появились работы, в которых рассматривались модели схем, в той или иной степени учитывающие эти факторы. Коршунов в [10] получил оценки сложности для случая СФЭ, размещенных в трехмерном пространстве с ограниченными снизу расстояниями между элементами и расстояниями между проводами, а также ограниченными сверху длинами проводов. Кравцов в [11] рассматривал плоские схемы, элементы которых определенным образом размещены в клетках прямоугольной решетки, и получил порядок функции Шеннона 2^n . МакКолл в [22] получил порядок нижней оценки функции Шеннона 2^n для планарных схем.

Модели клеточных схем, аналогичные или идентичные модели Кравцова, рассматривались в ряде более поздних работ. Так, Альбрехт в [1] показал, что асимптотика функции Шеннона для клеточных схем имеет вид $c \cdot 2^n$, где c — некоторая константа, зависящая от базиса. Грибок в [2] получил асимптотику функции Шеннона 2^n для определенного базиса клеточных элементов. Также исследовалась взаимосвязь сложности и других характеристик клеточных схем. Черемисин в [15] показал невозможность реализации дешифратора клеточными схемами с одновременно минимальными по порядку сложности и мощностью. Калачев в [5, 6, 7, 8, 9] исследовал одновременную минимизацию сложности и других характеристик плоских схем, таких как мощность и глубина. Ефимов в [3, 4] изучал энергопотребление объемных схем.

Одной из наиболее приближенных к практике моделей схем являются VLSI-схемы. В данной модели длина проводов схемы определяет время распространения сигнала между функциональными элементами. VLSI-схемы рассматривались в ряде работ (Томпсон [27], Ульман [28]). Крамер и ван Льювен [20] исследовали одновременную минимизацию сложности и времени работы VLSI-схем.

Еще одним направлением исследований является взаимосвязь между характеристиками схем из различных моделей. Сэведж в [25, 26] исследовал связь между VLSI-схемами и планарными схемами. В работе Шкаликовой [16] показана зависимость между площадью плоских схем и объемом трехмерных схем.

Оценки сложности, полученные для перечисленных выше моделей схем, превосходят по порядку оценку Лупанова $\frac{2^n}{n}$ сложности для СФЭ. Одной из причин данного различия является невозможность в условиях пространственных ограничений провести произвольное количество проводов для соединения функциональных элементов. В случае, когда схемы укладываются в граф (например, в прямоугольную решетку), число проводов, которое можно провести между фрагментами графа, есте-

ственным образом ограничивается размером реберного сепаратора, разделяющего данные фрагменты.

В данной работе исследуется зависимость функции Шеннона от характеристик сепарируемости графа, в который укладываются схемы. Рассматриваются схемы с ограничениями на укладку из работы [13]:

- В каждую вершину графа может быть уложено не более одного нетождественного функционального элемента СФЭ.
- В каждое ребро графа может быть уложено не более k ребер СФЭ.

Основным результатом работы является нижняя оценка функции Шеннона для графов с сепаратором размера $O(p^\lambda)$, где p — число вершин графа, $0 < \lambda < 1$. Такие графы далее будем называть λ -сепарируемыми. Также будет доказана применимость полученной оценки к схемам, укладываемым в пространство размерности 2 и выше. Для прямоугольных многомерных схем с учетом полученной в [13] верхней оценки функции Шеннона будет доказана асимптотика указанной функции.

2. Основные определения и полученные результаты

2.1. Многослойные схемы

Модель многослойных схем с одним функциональным слоем рассматривалась в работе [13]. Кратко приведем основные определения.

Согласно [14, с. 148], схема из функциональных элементов (далее СФЭ) в базисе $B \subseteq P_2$ представляет собой размеченный ациклический ориентированный граф. Разметка вершин определяет, какие вершины являются входными или выходными, и всем вершинам, не являющимся входными, сопоставляет булевы функции из базиса B . Ребра СФЭ помечены натуральными числами, и разметка входных ребер вершины определяет порядок аргументов в функции, реализуемой данной вершиной.

Носителем будем называть произвольный непустой граф с конечным или счетным числом вершин. В общем случае носитель может иметь кратные ребра и петли.

Укладкой СФЭ S на носитель T будем называть произвольный гомоморфизм $h: S \rightarrow T$.

Схемой с носителем T будем называть пару (S, h) , где S — схема из функциональных элементов, h — укладка S на T . Для краткости будем говорить «схема» вместо «схема с носителем» в тех случаях, когда это

не приведет к разночтениям. Будем говорить, что схема (S, h) реализует булеву функцию или булев оператор f , если СФЭ S реализует f .

С практической точки зрения данные определения можно трактовать следующим образом. Одной из задач синтеза СБИС является укладка (т. е. размещение) логических элементов и проводов схемы на плату, которую в некотором приближении можно считать графом — носителем схемы.

Обычно в задачах синтеза схем имеются те или иные ограничения на укладку. В данной работе будут рассматриваться следующие ограничения:

Ограничение 1. В каждую вершину носителя может быть уложено не более одного функционального элемента СФЭ, реализующего нетождественную булеву функцию.

Ограничение 2. В каждое ребро носителя может быть уложено не более k ребер СФЭ.

Данные ограничения можно толковать следующим образом: схема состоит из k «слоев», при этом лишь один из слоев является «функциональным» (т. е. может содержать нетождественные функциональные элементы). Остальные слои используются только для разводки проводов. Поэтому схемы, соответствующие ограничениям 1 и 2, будем называть *многослойными схемами*.

Обозначим через M_k^T множество всех k -слойных схем с носителем T .

Под *сложностью* многослойной схемы будем понимать количество вершин носителя, использованных при укладке. Если M — множество многослойных схем, f — булева функция, то естественным образом определяется $L(M, f)$ — сложность функции f в множестве M как минимальная сложность многослойной схемы в M , реализующей функцию f . Если таких схем не существует, можно формально считать сложность булевой функции равной бесконечности.

Стандартным образом определяется функция Шеннона сложности многослойных схем:

$$L(M_k^T, n) = \max_{f \in P_2(n)} L(M_k^T, f).$$

2.2. Носители

Свойства носителей играют важную роль при укладке схем, поскольку при одних и тех же ограничениях разные носители допускают, вообще говоря, совершенно различные укладки. В данной работе в качестве носителей будут рассматриваться λ -сепарируемые графы. Как важный

частный случай λ -сепарируемых носителей будут также рассмотрены d -мерные графы.

Далее под *монотонным классом графов* будем понимать любое множество графов \mathcal{G} , замкнутое относительно операции «взятия подграфа». Очевидно, множество конечных подграфов любого носителя является монотонным классом графов.

2.2.1. Классы графов $\mathcal{G}(q, \theta)$ и $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $\theta > 1$ — некоторые константы. Определим класс графов $\mathcal{G}(q, \theta)$ как множество всех носителей T , обладающих следующими свойствами:

- Степень всех вершин T ограничена некоторым числом q .
- Для любого целого p число различных с точностью до изоморфизма подграфов T с p вершинами не превосходит θ^p .

С точки зрения укладки схем ограниченность степени вершин графов является в некотором смысле «естественным» ограничением. Что касается второго условия, то оно выполнено для достаточно важных категорий графов — например, для планарных графов [17] и для d -мерных графов, которые будут определены ниже.

Формальное определение λ -сепарируемости будет приведено в разделе 3. С содержательной точки зрения в λ -сепарируемом носителе любой подграф с p вершинами может быть разбит на меньшие фрагменты сопоставимого размера удалением $O(p^\lambda)$ вершин (ребер), где $0 < \lambda < 1$.

Подкласс λ -сепарируемых носителей из класса $\mathcal{G}(q, \theta)$ обозначим через $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$.

2.2.2. d -мерные графы

Пусть $d \geq 2$ — целое число, T — некоторый носитель. Будем говорить, что T является *d -мерным графом*, если существуют константы $c_v > 0, c_e > 0$ такие, что T можно уложить в d -мерное евклидово пространство так, что расстояние между любыми двумя вершинами будет не меньше c_v и длина любого ребра будет не больше c_e .

Замечание 1. Ограничения, использованные в данном определении, схожи с ограничениями в определении схем из объемных функциональных элементов из работы Коршунова [10].

Замечание 2. Легко видеть, что одну из констант c_v и c_e всегда можно считать равной 1. В дальнейшем будем предполагать, что $c_v = 1$.

Замечание 3. Ясно, что любой конечный носитель является d -мерным графом с достаточно большим c_e , поэтому для конечных носителей данное определение не имеет смысла. Однако, можно определить *монотонный класс d -мерных графов с параметром c_e* , в котором константа c_e — общая для всех графов класса. Легко видеть, что данное множество графов будет замкнуто относительно операции взятия подграфа. Далее будем опускать константу c_e , говоря о *классе d -мерных графов* в тех случаях, когда численное значение константы c_e не будет играть существенной роли.

Пример 1. Граф d -мерной целочисленной решетки является d -мерным графом. Достаточно положить $c_e = 1$.

Пример 2. Можно показать, что граф бесконечного полного бинарного дерева не является d -мерным ни для какого d . В самом деле, количество вершин, находящихся на расстоянии p от корня дерева, экспоненциально зависит от p , однако количество шаров диаметра 1, которые можно уложить в d -мерном шаре радиуса $c_e \cdot p$, равняется $O(p^d)$.

Укладка схем в d -мерную целочисленную решетку рассматривалась в работе [13]. Как и в указанной работе, будем называть такие схемы *прямоугольными многомерными схемами* и использовать сокращение M_k^d вместо $M_k^{\mathbb{Z}^d}$.

В разделе 5 будет доказано, что все d -мерные носители принадлежат классам $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ .

2.3. Прочие обозначения и соглашения

Выражение $\log a$ всюду будет обозначать двоичный логарифм a . Будем формально считать, что $x \log x = 0$ при $x = 0$.

Будем использовать обозначение $P_2(n, m)$ для множества всех булевых операторов с n входами и m выходами ($n \geq 0, m \geq 1$).

Запись $f(x) \lesssim g(x)$ будет обозначать соотношение $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$. Аналогично будет использоваться обозначение $f(x) \gtrsim g(x)$. В случае зависимости от нескольких параметров возможно использование сложного условия предельного перехода: например, $f(n, k) \lesssim g(n, k)$ при $k \rightarrow \infty, \log k \leq n$.

2.4. Полученные результаты

В данной работе для произвольного носителя $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ будет доказано, что

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max \left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k} \right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Также будет доказано, что произвольный d -мерный носитель принадлежит классу $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ . Следовательно, для d -мерных носителей будет верна нижняя оценка

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Для прямоугольных многомерных схем в работе [13] была получена верхняя оценка функции Шеннона, совпадающая с вышеприведенной нижней оценкой. Таким образом, для данного вида схем будет получена асимптотика сложности:

$$L(M_k^d, n) \sim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

2.5. План работы

С организационной точки зрения доказательная часть данной работы разбита на три раздела.

В разделе 3 приведены общие определения, связанные с сепараторами в графах. Основным результатом указанного раздела является лемма 2. Неформально смысл указанной леммы заключается в том, что λ -сепарируемые графы, допускающие в некотором смысле «хорошее» разбиение на две части, допускают и «хорошее» разбиение на много частей.

В разделе 4 доказывается нижняя оценка функции Шеннона для носителей из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Ключевую роль будет играть лемма 7, из которой следует собственно теорема о нижней оценке.

В разделе 5 доказывается нижняя оценка функции Шеннона для d -мерных носителей и асимптотика для прямоугольных многомерных схем. Фактически будет доказано, что произвольный d -мерный носитель принадлежит классу $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ для $\lambda = \frac{d-1}{d}$ и некоторых постоянных q и θ .

3. Сепараторы в графах и их свойства

3.1. Определения и простейшие свойства сепараторов

В данном разделе будут даны определения вершинных и реберных сепараторов в графах и доказаны некоторые простейшие свойства сепараторов.

Реберные сепараторы. Будем вводить терминологию о реберных сепараторах аналогично терминологии о вершинных сепараторах из [21].

Определение 1. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Назовем монотонный класс графов \mathcal{G} *реберно $f(p)$ -сепарируемым*, если существуют такие константы $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, $m \geq 2$, что любой граф класса G , содержащий p вершин, где $p \geq m$, можно разбить на два непересекающихся порожденных подграфа, соединенных не более чем $\beta f(p)$ ребрами, при этом количество вершин обоих подграфов не превосходит αp .

Замечание 4. Константа m важна с технической точки зрения, поскольку позволяет не рассматривать некоторые вырожденные случаи. Например, граф K_1 с одной вершиной невозможно разбить на два непустых подграфа в принципе, поэтому можно всегда считать, что $m \geq 2$. В общем случае m может быть больше 2.

Определение 2. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, T — некоторый носитель. Назовем носитель T *реберно $f(p)$ -сепарируемым*, если монотонный класс всех конечных подграфов T является реберно $f(p)$ -сепарируемым.

Ясно, что интерес представляет случай, когда $f(p)$ — медленно растущая функция. По сути, это позволит применять технику разделяй-и-властвуй для получения эффективных алгоритмов и нетривиальных нижних оценок в доказательствах. В данной работе в качестве функции $f(p)$ рассматривается p^λ , где $0 < \lambda < 1$. Реберно p^λ -сепарируемые носители и монотонные классы графов для удобства будем называть *реберно λ -сепарируемыми*.

Вершинные сепараторы. Следующее определение представляет собой модификацию определения 2.1 вершинного сепаратора для графа из [23] применительно к монотонным классам графов.

Определение 3. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Назовем монотонный класс графов \mathcal{G} *вершинно $f(p)$ -сепарируемым*, если существуют такие константы $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, $m \geq 1$, что для любого графа класса G , содержащего p вершин, где $p \geq m$, множество вершин $V(G)$ можно разбить на три непересекающиеся части A , B , C так, что будут выполнены три условия:

- Не существует ребер из A в B .
- $|A|, |B| \leq \alpha p$.
- $|C| \leq \beta f(p)$.

Очевидно, что из реберной $f(p)$ -сепарируемости любого монотонного класса графов будет следовать вершинная $f(p)$ -сепарируемость, так как в качестве вершинного сепаратора достаточно использовать концы ребер

из реберного сепаратора. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, множество звезд (графов $K_{1,n}$) и их подграфов является вершинно 1-сепарируемым, но не является реберно 1-сепарируемым.

Следующее простое утверждение показывает, что для монотонных классов графов с ограниченной степенью вершин из вершинной сепарируемости следует реберная.

Лемма 1. Пусть \mathcal{G} — монотонный класс вершинно $f(p)$ -сепарируемых графов с ограниченной числом q степенью вершин и параметрами α , β и m . Тогда \mathcal{G} является реберно $f(p)$ -сепарируемым с параметрами $\max(\frac{2}{3}, \alpha)$, $q\beta$ и $\max(m, 2)$.

Доказательство. Покажем, как для произвольного графа класса получить реберный сепаратор из вершинного.

Пусть $G \in \mathcal{G}$, $|V(G)| = p \geq \max(m, 2)$. По определению вершинной сепарируемости, вершины G можно разбить на три множества A, B, C , где C — сепаратор. При этом $|A|, |B| \leq \alpha p$, $|C| \leq \beta f(p)$.

Дополним множества A и B вершинами из C до множеств A' и B' соответственно так, что мощности A' и B' были как можно ближе друг к другу. При таком методе дополнения A и B до A' и B' получим, что $1 \leq |A'|, |B'| \leq \max(\frac{2}{3}, \alpha) \cdot p$.

Далее, каждое ребро, соединяющее A' и B' , в изначальном разбиении было смежно хотя бы с одной вершиной из C . В силу того, что степени вершин G ограничены числом q , общее число таких ребер не будет превосходить величины $q|C| \leq q\beta f(p)$.

Поскольку величины $\max(\frac{2}{3}, \alpha)$, $q\beta$ и $\max(m, 2)$ не зависят от графа, реберная $f(p)$ -сепарируемость монотонного класса \mathcal{G} доказана. \square

Таким образом, в определении класса носителей $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$ не важно, о какой именно λ -сепарируемости идет речь (реберной или вершинной), поскольку степени вершин графов из данного класса ограничены числом q .

3.2. Разбиение λ -сепарируемых графов

Неформально, основным результатом данного раздела является следующее утверждение: если λ -сепарируемый граф можно разбить на две несвязанные части сопоставимого размера, удалив малое число ребер, то данный граф можно разбить на множество небольших несвязанных частей ограниченного размера, также удалив малое число ребер.

Следующая лемма представляет собой модификацию леммы 1 из [18] для планарных графов.

Лемма 2. Пусть \mathcal{G} — монотонный класс реберно λ -сепарируемых графов с параметрами α , β и m , где $0 < \lambda < 1$, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, $m \geq 2$. Тогда для любого $r \geq m - 1$, для любого графа $G \in \mathcal{G}$ с p вершинами существует разбиение G на подграфы такое, что

- Число вершин каждого подграфа не превосходит r .
- Общее число ребер, соединяющих различные подграфы, не превосходит $\frac{\delta p r^\lambda}{r}$, где δ — константа, общая для всех графов класса и всех r .

Будем называть полученное разбиение графа r^λ -разбиением.

Доказательство. По сути лемма доказывается аналогично лемме 1 из [18]. Приведем детальную версию доказательства для полноты картины.

Пусть $r \geq m - 1$, $G \in \mathcal{G}$, $|V(G)| = p$. Если $p \leq r$, то тривиальное разбиение из одного графа G будет r^λ -разбиением, что доказывает лемму.

Пусть $p > r$. По определению реберной λ -сепарируемости, граф G можно разбить на две части A и B так, что количество ребер, соединяющих A и B , не превосходит βp^λ , при этом $|A| \leq \alpha p$, $|B| \leq \alpha p$. Рассмотрим соответствующие A и B порожденные подграфы G . Поскольку данные подграфы также принадлежат классу \mathcal{G} , к ним возможно применить аналогичное разбиение на две части. Будем рекурсивно разбивать полученные подграфы на части, пока не получим все подграфы с числом вершин, не превосходящим r .

Покажем, что полученное разбиение является r^λ -разбиением.

Ограничение на число вершин в подграфах разбиения (не больше r вершин в каждом подграфе) выполнено по построению.

Пусть X — общее количество ребер, удаленных при разбиении графа. Докажем ограничение сверху на X . Разобьем все подграфы, которые разбивались на каком-либо шаге разбиения, на множества \mathcal{G}_i в зависимости от размера. В множество \mathcal{G}_1 включим подграфы с размерами из полуинтервала $(r, r\alpha^{-1}]$, в \mathcal{G}_2 — из полуинтервала $(r\alpha^{-1}, r\alpha^{-2}]$, и так далее. Если $t = \lceil \log_\alpha \frac{p}{r} \rceil$, то последнее множество \mathcal{G}_t будет содержать подграфы с размерами из полуинтервала $(r\alpha^{-(t-1)}, r\alpha^{-t}]$.

Пусть $1 \leq i \leq t$. Рассмотрим множество \mathcal{G}_i . Заметим, что множества вершин подграфов из \mathcal{G}_i не пересекаются, поскольку отношение размеров таких подграфов меньше α . Следовательно, сумма размеров всех подграфов из \mathcal{G}_i не превосходит p , откуда $|\mathcal{G}_i| \leq \frac{p}{r} \cdot \alpha^{i-1}$. При этом количество ребер, удаленных при разбиении любого подграфа из \mathcal{G}_i , не превосходит величины $\beta(r/\alpha^i)^\lambda$.

Суммируя по всем подграфам из всех множеств \mathcal{G}_i , получим

$$X \leq \beta \sum_{i=1}^t \frac{\alpha^{i-1} p}{r} \left(\frac{r}{\alpha^i} \right)^\lambda \leq \frac{\beta}{\alpha^\lambda (1 - \alpha^{1-\lambda})} \cdot \frac{pr^\lambda}{r},$$

что соответствует ограничению на количество ребер для r^λ -разбиения. \square

Далее будем использовать следующее вспомогательное обозначение. Пусть $M, S > 0$. Обозначим через $K(M, S)$ множество кортежей $\bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^t$, удовлетворяющих условиям

$$1 \leq x_i \leq M, \quad \sum_{i=1}^t x_i \leq S. \quad (1)$$

Если \mathcal{G} — λ -сепарируемый монотонный класс графов с ограниченной числом q степенью вершин, то свойства r^λ -разбиения можно переформулировать следующим образом. Пусть $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$ — кортеж размеров подграфов r^λ -разбиения, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ — кортеж количеств ребер, соединяющих подграфы r^λ -разбиения с остальной частью графа. Тогда

$$\bar{p} \in K(r, p), \quad \bar{s} \in K\left(qr, \frac{\delta pr^\lambda}{r}\right). \quad (2)$$

4. Нижняя оценка для λ -сепарируемых носителей

В данном разделе доказывается ключевое утверждение работы — теорема о нижней оценке для произвольного носителя из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$:

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right).$$

Заметим, что доказанная оценка зависит только от функции сепарируемости, параметры q и θ на данную оценку не влияют.

С содержательной точки зрения доказательство будет получено следующим образом. Подграфы носителя разбиваются на небольшие фрагменты. Затем число булевых функций, допускающих реализацию в подграфах, будет оцениваться через число булевых операторов, которые могут быть реализованы во фрагментах, и число способов провести провода между фрагментами.

Поскольку доказательство достаточно громоздкое с технической точки зрения, предварительно будет доказано несколько вспомогательных лемм, которые будут выделены в отдельный раздел 4.1. Доказательство основной теоремы будет завершено в разделе 4.2.

4.1. Вспомогательные леммы

Следующее утверждение непосредственно следует из классической леммы, доказанной в [14].

Лемма 3 ([14], с. 198–200). Пусть $N(n, t, L)$ — число различных булевых операторов с не более n входами и не более t выходами, реализуемых СФЭ с не более чем L функциональными элементами. Тогда существует такая постоянная c , что

$$N(n, t, L) \leq (c(n + L))^{n+t+L}.$$

Далее при выводе нижней оценки будет использоваться r^λ -разбиение подграфов носителя. Рассмотренная ниже техническая лемма 4 служит для упрощения оценки количества булевых операторов, реализуемых подграфами r^λ -разбиения.

Если p и s — целые положительные числа, будем обозначать через $Z(p, s)$ число булевых операторов с не более чем s входами и выходами в сумме, реализуемых СФЭ с не более чем p функциональными элементами.

Ранее было введено вспомогательное обозначение $K(M, S)$ для множества кортежей, удовлетворяющих условиям (1). В доказательстве леммы 4 нам поможет следующее простое свойство:

$$\text{Если } \bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^t \in K(M, S), \text{ то } \sum_{i=1}^t x_i \log x_i \leq S \log M. \quad (3)$$

Также при доказательстве леммы 4 будет использоваться неравенство для неотрицательных x и y

$$(x + y) \log(x + y) \leq x \log x + y \log y + x + y, \quad (4)$$

которое с учетом соглашения $0 \log 0 = 0$ следует из оценки двоичной энтропии $-a \log a - (1 - a) \log(1 - a) \leq 1$ при $a = \frac{x}{x+y}$.

Лемма 4. Пусть $q \geq 1$, $b \geq 0$ и $d > 0$ — константы, k — параметр. Пусть $k \rightarrow \infty$. Обозначим $r = (k \log k)^d$. Пусть L, M — числа, $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ и $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^t$ — произвольная тройка кортежей, удовлетворяющая условиям:

$$\bar{p} \in K(r, L), \quad \bar{s} \in K\left(qkr, \frac{bL}{\log k}\right), \quad u_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^t u_i \leq M. \quad (5)$$

Тогда будет верно соотношение

$$\sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i) \leq d \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right)\right) L \log k + M \log M + O(M). \quad (6)$$

Доказательство. Применяя лемму 3, имеем

$$Z(p_i, s_i + u_i) \leq (c(p_i + s_i + u_i))^{p_i + s_i + u_i}.$$

Логарифмируя и суммируя по всем элементам кортежей, получим

$$\sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i) \leq \sum_{i=1}^t (p_i + s_i + u_i)(\log c + \log(p_i + s_i + u_i)). \quad (7)$$

Дважды применяя (4), затем (3) с учетом (5), оценим правую часть (7):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^t (p_i + s_i + u_i)(\log c + \log(p_i + s_i + u_i)) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^t (p_i \log p_i + s_i \log s_i + u_i \log u_i + (p_i + s_i + u_i)(\log c + 2)) \leq \\ & \leq L \log r + \frac{bL}{\log k} \underbrace{\log(qkr)}_{O(\log k)} + M \log M + (\log c + 2) \underbrace{\left(L + \frac{bL}{\log k} + M \right)}_{O(L+M)} = \\ & = L \log r + M \log M + O(L + M). \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (7), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i) & \leq L \log r + M \log M + O(L + M) = \\ & = Ld(\log k + \log \log k) + M \log M + O(L + M) = \\ & = \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k} \right) \right) Ld \log k + M \log M + O(M). \end{aligned}$$

□

Следующие две леммы позволяют получить тривиальную нижнюю оценку функции Шеннона для схем с произвольным носителем.

Лемма 5 ([14], теорема 11.5). *Для любой постоянной $\varepsilon > 0$ доля n -местных булевых функций f , для которых*

$$L(f) \geq (1 - \varepsilon) \frac{2^n}{n},$$

стремится к единице при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$, T — произвольный носитель. Тогда*

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 5 и того факта, что сложность любой многослойной схемы не меньше сложности соответствующей СФЭ. \square

4.2. Теорема о нижней оценке

В данном разделе будет завершено доказательство нижней асимптотической оценки величины $L(M_k^T, n)$, где T — произвольный носитель из класса $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Также будет доказано следствие, позволяющее получить нижнюю оценку для носителей с функцией сепарируемости более общего вида — например, $\log p$, $\sqrt{p} \log \log p$ и др.

Лемма 7. Пусть $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Пусть $N_k^T(n, m, L)$ — число булевых операторов с n входами и m выходами, реализуемых k -слойными схемами в T сложности не более L . Тогда при $k \rightarrow \infty$ будет выполнено

$$\log N_k^T(n, m, L) \leq \frac{L \log k}{1 - \lambda} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right) \right) + (n + m)(\log L + \log(n + m)) + O(n + m).$$

Доказательство. Обозначим $r = (k \log k)^{\frac{1}{1-\lambda}}$. Будем рассматривать достаточно большие k , при которых для указанного r выполнены условия леммы 2 и каждый конечный подграф G носителя T имеет r^λ -разбиение, которое будем обозначать $P(G)$.

Каждой k -слойной схеме сложности не более L , вычисляющей булев оператор из $P_2(n, m)$, можно сопоставить следующий набор объектов:

- 1) Подграф G носителя, в который уложена реализующая оператор СФЭ.
- 2) Кортеж \bar{v} вершин G , в которые уложены входы и выходы СФЭ.
- 3) Набор ориентированных проводов между различными подграфами разбиения $P(G)$.
- 4) Набор булевых операторов, вычисляемых в подграфах разбиения $P(G)$.

Нетрудно видеть, что схемам, вычисляющим различные операторы, будут соответствовать разные наборы объектов. Таким образом, число различных булевых операторов оценивается сверху как число способов задать описанные наборы объектов. Очевидно, достаточно оценить число вариантов для каждого элемента набора и перемножить результаты.

Обозначим соответствующие числа вариантов как A_1, A_2, A_3, A_4 (где соответствие определяется вышеприведенной нумерацией).

Поскольку $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$, имеем

$$A_1 \leq \theta + \theta^2 + \dots + \theta^L \leq \frac{\theta^{L+1}}{\theta - 1}.$$

Оценим A_2 . Очевидно, существует не более L^{n+m} кортежей из $n + m$ вершин носителя. Поэтому $A_2 \leq L^{n+m}$.

Далее, число ребер между подграфами r^λ -разбиения ограничено величиной $\frac{\delta L r^\lambda}{r} = \frac{\delta L}{k \log k}$, где δ — константа. В каждом из данных ребер может быть проведено до k проводов. Таким образом, между различными подграфами r^λ -разбиения может быть проведено не более $\frac{\delta L}{\log k}$ проводов. Наконец, для каждого провода возможны три варианта: ориентирован в одну сторону, ориентирован в другую сторону и отсутствует. Следовательно,

$$A_3 \leq 3^{\frac{\delta L}{\log k}}.$$

Для получения оценки на A_4 введем следующие обозначения. Пусть G_i — подграфы разбиения $P(G)$, t — число таких подграфов, p_i — число вершин i -го подграфа, s_i — число проводов, которые можно провести из i -го подграфа вовне, u_i — суммарное число входов и выходов схемы, размещенных в i -м подграфе (т.е. количество элементов кортежа \bar{v} , соответствующих вершинам из G_i). Ясно, что каждый булев оператор, вычисляемый подграфом G_i , будет иметь не более p_i функциональных элементов и не более $s_i + u_i$ входов и выходов в сумме. Следовательно, верно соотношение

$$A_4 \leq \prod_{i=1}^t Z(p_i, s_i + u_i).$$

Перемножая оценки для A_i , получим соотношение

$$N_k^T(n, m, L) \leq \frac{\theta^{L+1}}{\theta - 1} \cdot L^{n+m} \cdot 3^{\frac{\delta L}{\log k}} \cdot \prod_{i=1}^t Z(p_i, s_i + u_i).$$

Логарифмируя и отбрасывая отрицательное слагаемое, при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} \log N_k^T(n, m, L) &\leq \underbrace{(L+1) \log \theta + (n+m) \log L}_{O(L)} + \\ &+ \underbrace{\frac{\delta L}{\log k} \log 3}_{o(L)} + \sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим сумму $\sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i)$ в правой части неравенства (8). Покажем, что для оценки данной суммы применима лемма 4.

Применяя соотношения (2), для кортежей $\bar{p} = \{p_i\}_{i=1}^t$, $\bar{s} = \{s_i\}_{i=1}^t$ получим $\bar{p} \in K(r, L)$, $\bar{s} \in K\left(qkr, \frac{\delta L}{\log k}\right)$. Для кортежа $\bar{u} = \{u_i\}_{i=1}^t$ очевидным образом выполнено $u_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^t u_i \leq n + m$. Наконец, по условию леммы $q \geq 1$, $\delta \geq 0$, $\frac{1}{1-\lambda} > 0$, $k \rightarrow \infty$ и $r = (k \log k)^{\frac{1}{1-\lambda}}$. Таким образом, все условия леммы 4 выполнены. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \log Z(p_i, s_i + u_i) &\leq \frac{L \log k}{1-\lambda} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right)\right) + \\ &+ (n+m) \log(n+m) + O(n+m). \end{aligned}$$

Объединяя оценки для слагаемых в правой части неравенства (8), получим

$$\begin{aligned} \log N_k^T(n, m, L) &\leq \frac{L \log k}{1-\lambda} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right)\right) + \\ &+ (n+m)(\log L + \log(n+m)) + O(n+m). \end{aligned}$$

□

В данной работе интерес представляет случай, когда $n + m$ мало по сравнению с L . В этом случае утверждение леммы 7 можно упростить.

Следствие 1. *В условиях леммы 7 при $k \rightarrow \infty$, $n + m \leq L / \log L$ выполнено*

$$\log N_k^T(n, m, L) \leq \frac{L \log k}{1-\lambda} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right)\right).$$

Лемма 8. *Пусть $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$, $k \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда будет выполнено*

$$L(M_k^T, n) \geq \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right)\right).$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что при достаточно больших n для любого k будет выполнено

$$L(M_k^T, n) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (9)$$

Пусть $k \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Обозначим для краткости $L = L(M_k^T, n)$. Используя определенную в лемме 7 величину $N_k^T(n, m, L)$, запишем тождество

$$N_k^T(n, 1, L) = 2^{2^n}.$$

Из (9) следует, что $n = O(\log L) = o(L/\log L)$. Применяя следствие 1 леммы 7, получим

$$2^n \leq \frac{L \log k}{1 - \lambda} \left(1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right) \right),$$

откуда следует утверждение леммы. \square

Теорема 1. Пусть $0 < \lambda < 1$, $T \in \mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$. Тогда

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Непосредственно следует из лемм 6 и 8. \square

Таким образом, получена нижняя оценка для λ -сепарируемых носителей, т. е. для носителей с функцией сепарируемости вида p^λ . Используя данную теорему, нетрудно вывести нижнюю оценку для носителей с функцией сепарируемости вида $\log p$, $\sqrt{p} \log \log p$ и др.

Следствие 2. Пусть $0 \leq \lambda_0 < 1$, $f(p) = O(p^\lambda)$ для всех $\lambda > \lambda_0$, $T \in \mathcal{G}(q, \theta)$ — произвольный $f(p)$ -сепарируемый носитель. Тогда

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda_0)}{\log k}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $\lambda > \lambda_0$. Очевидно, T является p^λ -сепарируемым носителем. Из теоремы 1 следует, что $L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ при $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Введем обозначение $g(\lambda, k, n) = \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$. Имеем

$$\liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda, k, n)} \geq 1 \quad \text{при } \lambda_0 < \lambda < 1.$$

Легко видеть, что $\frac{g(\lambda, k, n)}{g(\lambda_0, k, n)} \geq \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0}$, откуда

$$A := \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda_0, k, n)} \geq \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0} \cdot \frac{L(M_k^T, n)}{g(\lambda, k, n)} \geq \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0}$$

для всех $\lambda_0 < \lambda < 1$.

Таким образом, $A \geq \sup_{1 > \lambda > \lambda_0} \frac{1-\lambda}{1-\lambda_0} = 1$, откуда следует (10). \square

5. Нижняя оценка для d -мерных схем

В данном разделе будет доказана нижняя оценка для d -мерных схем и асимптотика для прямоугольных d -мерных схем. С содержательной точки зрения нижняя оценка для d -мерных схем будет являться следствием нижней оценки для λ -сепарируемых носителей, поскольку будет доказано, что все d -мерные носители принадлежат классам $\mathcal{G}(\lambda, q, \theta)$.

5.1. Свойства d -мерных графов

Фактически требуется доказать, что d -мерные носители обладают тремя свойствами: ограниченность степени вершин, не более чем экспоненциальный рост числа неизоморфных подграфов фиксированного размера, а также λ -сепарируемость.

Лемма 9. Пусть T — d -мерный носитель (соответственно \mathcal{G} — класс d -мерных графов) с параметром c_e . Тогда степень любой вершины T (соответственно степень любой вершины произвольного графа из \mathcal{G}) ограничена числом $(2c_e + 1)^d$.

Доказательство. При размещении произвольного d -мерного графа в d -мерном пространстве окрестность любой вершины окажется в шаре радиуса c_e . Поскольку d -мерные шары радиуса 0.5 с центрами в вершинах графа не пересекаются и целиком лежат в шаре радиуса $c_e + 0.5$, то количество таких шаров не может превосходить отношение объемов d -мерных шаров радиуса $c_e + 0.5$ и 0.5 соответственно. Это отношение равняется $(2c_e + 1)^d$. \square

Лемма 10. Пусть T — d -мерный граф. Тогда число неразмеченных подграфов T с n вершинами не превосходит величины θ^n , где θ — некоторая константа.

Доказательство. Непосредственно следует из замечания к лемме 2 из [10]. \square

Для доказательства λ -сепарируемости d -мерных графов воспользуемся результатами работы [23]. Введем следующее вспомогательное определение.

Определение 4 ([23], определение 2.3). Пусть $\alpha \geq 1$, и пусть $B = \{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ — система замкнутых d -мерных шаров, внутренности которых не пересекаются. Граф α -пересечений для B есть неориентированный граф с вершинами $V = \{1, 2, \dots, p\}$ и ребрами

$$E = \{\{i, j\}: B_i \cap (\alpha \cdot B_j) \neq \emptyset \text{ и } (\alpha \cdot B_i) \cap B_j \neq \emptyset\}$$

где $\alpha \cdot B_j$ обозначает шар с тем же центром, что и B_j , и в α раз большим радиусом.

Следующая лемма показывает связь между d -мерными графами и графами α -пересечений.

Лемма 11. *Пусть \mathcal{G} — класс d -мерных графов с параметром c_ϵ . Тогда каждый граф из \mathcal{G} можно дополнить некоторым (возможно, нулевым) количеством ребер так, что полученный граф будет графом $2c_\epsilon$ -пересечений в d -мерном пространстве.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{G}$. По определению d -мерных графов, вершины G можно разместить в d -мерном пространстве так, что расстояние между любыми двумя вершинами будет не меньше 1, при этом любые смежные вершины будут находиться на расстоянии не более c_ϵ .

Рассмотрим G' — граф $2c_\epsilon$ -пересечений для системы шаров с радиусом 0.5 и центрами в вершинах графа. Поскольку расстояние между центрами шаров не меньше 1, а радиус равен 0.5, внутренности шаров не пересекаются. Далее, если между некоторыми вершинами графа G имелось ребро, то расстояние между центрами соответствующих шаров не превосходит c_ϵ . Следовательно, шары с соответствующими центрами и радиусами 0.5 и $0.5 \cdot 2c_\epsilon = c_\epsilon$ будут пересекаться. Соответственно, все ребра G являются ребрами G' . \square

Лемма 12 ([23], теорема 2.4). *Пусть $d \geq 1$, $\alpha \geq 1$ — константы. Тогда существует функция*

$$f(p) = O\left(\alpha \cdot p^{\frac{d-1}{d}} + c(\alpha, d)\right)$$

такая, что любой граф α -пересечений в d -мерном пространстве будет являться вершинно $f(p)$ -сепарируемым. При этом сепаратор будет разделять графы класса для части, число вершин которых не превосходит $\frac{d+1}{d+2}$ от изначального числа вершин.

Фактически лемма утверждает о $\frac{d-1}{d}$ -сепарируемости всех графов α -пересечений в d -мерном пространстве.

Замечание 5. В первоисточнике [23] данная лемма была сформулирована несколько иначе. В частности, рассматривался произвольный граф α -пересечений в d -мерном пространстве и утверждалось о его сепарируемости с размером сепаратора, ограниченным $O\left(\alpha \cdot p^{\frac{d-1}{d}} + c(\alpha, d)\right)$. Поскольку функция сепарируемости является общей для всех графов монотонного класса, для упрощения понимания в данной работе формулировка леммы была изменена так, чтобы подчеркнуть независимость функции сепарируемости от выбора графа.

Следствие 3. Пусть \mathcal{G} — класс d -мерных графов. Тогда \mathcal{G} является $r^{\frac{d-1}{d}}$ -сепарируемым.

Доказательство. Непосредственно следует из лемм 11 и 12. \square

5.2. Оценки функции Шеннона

d -мерные схемы. Используя доказанные в предыдущем разделе свойства d -мерных графов, сформулируем теорему о нижней оценке для d -мерных схем.

Теорема 2. Пусть T — произвольный d -мерный носитель. Тогда

$$L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 1, лемм 9, 10 и следствия 3. \square

Прямоугольные многомерные схемы. Прямоугольные многомерные схемы являются частным случаем d -мерных схем, поэтому к ним также применима нижняя оценка из теоремы 2.

В работе [13] для прямоугольных многомерных схем была доказана верхняя оценка функции Шеннона.

Лемма 13 ([13], теорема 1).

$$L(M_k^d, n) \lesssim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Используя теорему 2 и лемму 13, получим асимптотику функции Шеннона для прямоугольных многомерных схем.

Следствие 4.

$$L(M_k^d, n) \sim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

6. Заключение

В данной работе была доказана нижняя оценка функции Шеннона сложности $L(M_k^T, n) \gtrsim \max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ для произвольного λ -сепарируемого носителя T . Важным частным случаем подобных носителей являются d -мерные графы, для которых таким образом получена нижняя оценка $L(M_k^T, n) \gtrsim \frac{2^n}{\min(n, d \log k)}$.

Естественным направлением для развития результатов, полученных в данной работе, является исследование классов графов с функцией сепарируемости, отличной от p^λ . Например, интерес представляют графы, допускающую укладку в гиперболической плоскости. В работе [19] доказано, что подобные графы обладают логарифмической функцией сепарируемости. Следствие 2 теоремы 1 позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона для подобных графов. Однако вопрос о верхней оценке остается открытым.

Список литературы

- [1] А. Альбрехт, “О схемах из клеточных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **33** (1977), 209–214.
- [2] С. В. Грибок, “Об одном базисе для схем из клеточных элементов”, *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, **4** (1999), 36–39.
- [3] А. А. Ефимов, “Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:1** (2019), 117–132.
- [4] А. А. Ефимов, “Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:2** (2019), 105–124.
- [5] Г. В. Калачев, “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26:1** (2014), 49–74.
- [6] Г. В. Калачев, “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы*, **20:2** (2016), 203–266.
- [7] Г. В. Калачев, “Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:1** (2017), 28–96.
- [8] Г. В. Калачев, “Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:2** (2017), 163–192.
- [9] Г. В. Калачев, “О нижней оценке максимального потенциала плоских схем с несколькими выходами через площадь”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22:1** (2018), 111–117.
- [10] А. Д. Коршунов, “Об оценках сложности схем из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.
- [11] С. С. Кравцов, “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [12] О. Б. Лупанов, “О синтезе некоторых классов управляющих систем”, *Проблемы кибернетики*, **10** (1963), 63–97.
- [13] Т. Р. Сытдыков, “Сложность синтеза многомерных клеточных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:3** (2019), 61–80.

- [14] А. В. Чашкин, *Дискретная математика*, Академия, Москва, 2012, 352 с.
- [15] О. В. Черемисин, “Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций”, *Дискретная математика*, **15:2** (2003), 113–122.
- [16] Н. А. Шкаликowa, “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*. Т. 2, Наука, Москва, 1989, 177–197.
- [17] N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Poulalhon, G. Schaeffer, “Planar Graphs, via Well-Orderly Maps and Trees”, *Graphs and Combinatorics*, **22** (2006), 185–202.
- [18] G. N. Frederickson, “Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications”, *SIAM Journal on Computing*, **16:6** (1987), 1004–1022.
- [19] S. Kisfaludi-Bak, “Hyperbolic Intersection Graphs and (Quasi)-Polynomial Time”, *Proceedings of the Thirty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '20, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Utah, Salt Lake City, 2020, 1621–1638.
- [20] M. R. Kramer, J. van Leeuwen, “The VLSI complexity of Boolean functions”, *Logic and Machines: Decision Problems and Complexity*, eds. Börger E., Hasenjaeger G., Rödding D., Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 397–407.
- [21] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, “A separator theorem for planar graphs”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **36:2** (1979), 177–189.
- [22] W. F. McColl, “Planar circuits have short specifications”, *2nd STACS. Lecture Notes in Computer Science*, **182** (1985), 231–242.
- [23] G. L. Miller, S. Teng, W. Thurston, S. A. Vavasis, “Geometric separators for finite-element meshes”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19:2** (1998), 364–386.
- [24] D. E. Muller, “Complexity in Electronic Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5:1** (1956), 15–19.
- [25] J. E. Savage, “Planar Circuit Complexity and The Performance of VLSI Algorithms”, *VLSI Systems and Computations*, eds. Kung H.T., Sproull B., Steele G., Springer, Berlin, Heidelberg, 1981, 61–68.
- [26] J. E. Savage, “The performance of multilevel VLSI algorithms”, *Journal of Computer and System Sciences*, **29:2** (1984), 243–273.
- [27] C. D. Thompson, “Area-Time Complexity for VLSI”, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '79, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1979, 81–88.
- [28] J. D. Ullman, *Computational Aspects of VLSI*, W. H. Freeman & Co, USA, 1984.

The complexity of multilayer d -dimensional circuits

Sitdikov T. R., Kalachev G. V.

In this paper we research a model of multilayer circuits with a single logical layer. We consider λ -separable graphs as a support for circuits. We establish the Shannon function lower bound $\max\left(\frac{2^n}{n}, \frac{2^n(1-\lambda)}{\log k}\right)$ for this type of circuits where k is the number of layers. For d -dimensional graphs, which are λ -separable for $\lambda = \frac{d-1}{d}$, this gives the Shannon

function lower bound $\frac{2^n}{\min(n, d \log k)}$. For multidimensional rectangular circuits the proved lower bound asymptotically matches to the upper bound.

Keywords: multilayer circuits, multidimensional circuits, Shannon function asymptotics, circuit complexity, graph separators.

References

- [1] A. Albrecht, “On circuits of cellular elements”, *Problemi Kibernetiki*, **33** (1978), 209–214 (in Russian).
- [2] S. V. Gribok, “On one base for circuits of cellular elements”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15: Vichislitel'naya matematika i kibernetika*, **4** (1999), 36–39 (in Russian).
- [3] A. A. Efimov, “The top assessment of energy consumption in a class of volume schemes”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23:1** (2019), 117–132 (in Russian).
- [4] A. A. Efimov, “The upper estimate of the volumetric power consumption of the circuits that implement boolean operators.”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23:2** (2019), 105–124 (in Russian).
- [5] G. V. Kalachev, “Order of power of planar circuits implementing Boolean functions”, *Discrete Mathematics*, **26:1** (2014), 49–74 (in Russian); English translation in *Discrete Mathematics and Applications*, **24:4** (2014), 185–205.
- [6] G. V. Kalachev, “On the simultaneous minimization of area, power and depth of planar circuits computing partial Boolean operators”, *Intelligent Systems*, **20:2** (2016), 203–266 (in Russian).
- [7] G. V. Kalachev, “Bounds on power of planar circuits computing functions with limited number of ones”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **21:1** (2017), 28–96 (in Russian).
- [8] G. V. Kalachev, “Bounds on power of planar circuits computing monotone functions”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **21:2** (2017), 163–192 (in Russian).
- [9] G. V. Kalachev, “On the lower bound for the maximum potential of plain circuits with several outputs through the area”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22:1** (2018), 111–117 (in Russian).
- [10] A. D. Korshunov, “On the complexity bounds of circuits of volumetric elements and volumetric Boolean circuits”, *Problemi Kibernetiki*, **19** (1967), 275–283 (in Russian).
- [11] S. S. Kravtsov, “On the realization of Boolean functions in one class of logic elements and connectors”, *Problemi Kibernetiki*, **19** (1967), 285–293 (in Russian).
- [12] O. B. Lupanov, “On the synthesis of some classes of control systems”, *Problemi Kibernetiki*, **10** (1963), 63–97 (in Russian).
- [13] T. R. Sitdikov, “The complexity of multidimensional rectangular circuits design”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23:3** (2019), 61–80 (in Russian).
- [14] A. V. Chashkin, *Discrete Mathematics*, Akademiya, Moscow, 2012 (in Russian), 352 pp.

- [15] O. V. Cheremisin, “On the activity of cell circuits realising the system of all conjunctions”, *Discrete Mathematics*, **15**:2 (2003), 113–122 (in Russian); English translation in *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:2 (2003), 209–219.
- [16] N. A. Shkalikova, “On the implementation of Boolean functions by schemes of cellular elements”, *Mathematical Problems of Cybernetics. V.2*, Nauka, Moscow, 1989, 177–197 (in Russian).
- [17] N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Poulalhon, G. Schaeffer, “Planar Graphs, via Well-Orderly Maps and Trees”, *Graphs and Combinatorics*, **22** (2006), 185–202.
- [18] G. N. Frederickson, “Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications”, *SIAM Journal on Computing*, **16**:6 (1987), 1004–1022.
- [19] S. Kisfaludi-Bak, “Hyperbolic Intersection Graphs and (Quasi)-Polynomial Time”, *Proceedings of the Thirty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA ’20, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Utah, Salt Lake City, 2020, 1621–1638.
- [20] M. R. Kramer, J. van Leeuwen, “The VLSI complexity of Boolean functions”, *Logic and Machines: Decision Problems and Complexity*, eds. Börger E., Hasenjaeger G., Rödding D., Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 397–407.
- [21] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, “A separator theorem for planar graphs”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **36**:2 (1979), 177–189.
- [22] W. F. McColl, “Planar circuits have short specifications”, *2nd STACS. Lecture Notes in Computer Science*, **182** (1985), 231–242.
- [23] G. L. Miller, S. Teng, W. Thurston, S. A. Vavasis, “Geometric separators for finite-element meshes”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19**:2 (1998), 364–386.
- [24] D. E. Muller, “Complexity in Electronic Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**:1 (1956), 15–19.
- [25] J. E. Savage, “Planar Circuit Complexity and The Performance of VLSI Algorithms”, *VLSI Systems and Computations*, eds. Kung H.T., Sproull B., Steele G., Springer, Berlin, Heidelberg, 1981, 61–68.
- [26] J. E. Savage, “The performance of multilective VLSI algorithms”, *Journal of Computer and System Sciences*, **29**:2 (1984), 243–273.
- [27] C. D. Thompson, “Area-Time Complexity for VLSI”, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’79, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1979, 81–88.
- [28] J. D. Ullman, *Computational Aspects of VLSI*, W. H. Freeman & Co, USA, 1984.

Классы линейных p -автоматов с операциями суперпозиции

А. А. Часовских¹

Для классов линейных автоматов над простыми конечными полями с операциями суперпозиции найдены все предполные классы.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, операции суперпозиции, полнота, замкнутый класс, предполный класс, простое поле.

Для заданного простого числа p через E_p будем обозначать поле из p элементов, $E_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Линейный p -автомат строится из сумматора по модулю p и задержек с начальным состоянием a , $a \in E_p$, с использованием операций композиции [1]. Класс линейных p -автоматов вместе с операциями суперпозиции обозначим LS_p .

Для класса LS_2 в работе [2] были найдены все предполные классы, то есть максимальные по включению замкнутые по операциям суперпозиции собственные подмножества. Здесь будут получены все предполные классы в LS_p в случае любого простого p .

Следуя работе [1], через $E_p[\xi]$ будем обозначать множество многочленов от переменной ξ с коэффициентами из E_p , а через $E'_p(\xi)$ — множество отношений многочленов из $E_p[\xi]$, с ненулевым свободным членом знаменателя.

Множество всех формальных степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из E_p обозначим $R_p(\xi)$. На множестве $R_p(\xi)$ естественным образом вводим операции сложения и умножения. Для $\alpha \in R_p(\xi)$ через $\alpha(0)$ обозначаем свободный член ряда α .

Нетрудно видеть, что каждый элемент $\frac{u}{v}$ множества $E'_p(\xi)$ можно представить некоторым рядом μ из $R_p(\xi)$ таким, что $\mu \cdot v = u$. При этом коэффициенты ряда μ образуют периодическую (с предпериодом) последовательность.

Согласно работе [1], линейный автомат с n входами из LS_p определяет некоторое отображение f из $R_p(\xi)^n$ в $R_p(\xi)$, для которого в $E'_p(\xi)$ найдутся μ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ такие, что

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i + \mu_0. \quad (1)$$

¹ Часовских Анатолий Александрович — доцент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: chasovskikh@mail.ru.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

В этом случае через $U(f)$ мы для удобства обозначаем множество $\{ \mu_i \mid i = 1, 2, \dots, n \}$.

Положим:

$$T_a = \{ f \mid f \in LS_p, f \text{ сохраняет } a \text{ в начальный момент} \}, a \in E_p,$$

$$M_1 = \{ f \mid f \in LS_p, \forall \mu, \mu \in U(f), \mu - \mu(0) \in \xi^2 E'_p(\xi) \}.$$

Упорядочим все неприводимые приведенные многочлены из $E_p[\xi]$: p_1, p_2, \dots так, что $p_1 = \xi$. Положим далее:

$$M_i = \left\{ f \mid f \in LS_p, \forall \frac{u}{v}, \frac{u}{v} \in U(f), p_i \nmid v \right\}, i \in \{2, 3, \dots\}.$$

Через V_1 обозначим множество всех автоматов из LS_p , которые в начальный момент зависят не более чем от одного входа, а через V_p — множество всех таких f , $f \in LS_p$, что, если для f выполнено (1), то $\sum_{i=1}^n \mu_i(0) = 1$.

Теорема 1. *Множество $JS_p = \{V_1, V_p, T_0, T_1, \dots, T_{p-1}, M_1, M_2, \dots\}$ состоит из всех предполных классов в LS_p .*

Теорема 2. *JS_p — приведенная критериальная система [1] в LS_p .*

Список литературы

- [1] Часовских А.А., “Условия полноты линейно-р-автоматных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:3** (2014), 203–252.
- [2] Часовских А.А., “Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции”, *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2013, № 8, 3–13.

Linear p-automata classes with superposition operations Chasovskikh A.A.

All precomplete classes are found for classes of linear automata over simple finite fields with superposition operations.

Keywords: finite automaton, linear automaton, operation of superposition, completeness, closed class, maximum subclass, finite field.

References

- [1] Chasovskikh A.A., “Completeness conditions for linear automata functions”, *Intelligent systems*, **18:3** (2014), 203–252 (In Russian).
- [2] Chasovskikh A.A., “Linear automata functions with superposition operations”, *Neurocomputers: development, application*, 2013, № 8, 3–13 (In Russian).

Часть 4.
Материалы семинаров кафедры
MaTIC

Доклады семинара «Вопросы сложности алгоритмов поиска»

В весеннем семестре 2020 – 2021 учебного года на научном семинаре «Вопросы сложности алгоритмов поиска» под руководством профессора Эльяра Эльдаровича Гасанова состоялось 7 докладов.

10 февраля 2021 года

Расширенные вычисления как новый концепт алгоритма

к.ф.-м.н. Волков Н.Ю.

В докладе предложена новая процедура вычислений, расширяющая понятие алгоритма. Образуется континуальное множество расширенных алгоритмов, в которое классические алгоритмы Тьюринга естественным образом вложимы, как простейший (нулевой) элемент. Полученная конструкция универсальна. При помощи расширенных алгоритмов вычислимы все (частичные) счётнозначные функции вида $f : N_0^n \rightarrow N_0$ и любые иные функции.

Вводится понятие относительной вычислимости α -вычислимости, которое позволяет классифицировать расширенные алгоритмы и изучать внутреннюю структуру этого множества. Понятие невычислимости становится относительным. Невычислимые по Тьюрингу функции становятся возможным классифицировать по трудности их вычисления расширенными алгоритмами.

В свете этого, известный “Тезис Чёрча” перестаёт быть актуальным. В то же время, “Тезис Тьюринга”, ранее считавшийся ему эквивалентным, нуждается в пересмотре и, после уточнения (расширения) процедуры вычислений на машине Тьюринга, сохраняет своё значение.

17 февраля 2021 года

Распознавание свойства почтидревовидности графов автоматами

студ. специалитета Демидова А.А.

Связный граф называется почти-1-деревом (или почти деревом) в том случае, если из него нужно удалить одно ребро для того, чтобы он стал деревом. Таким образом, почти-1-деревьями являются графы, состоящие из цикла, из каждой вершины которого исходит дерево. Рассматриваемому автомату доступно некоторое количество красок, которые он наносит на рёбра в течение обхода графа. Кроме того, в любой момент времени автомату известно, красил ли он только что ребро, по которому прошёл. Доказано, что автомату хватит трёх красок для того, чтобы узнать, является ли граф почти-1-деревом или же в нём содержится более одного цикла.

24 февраля 2021 года

Верхняя оценка переключательной мощности реализации периодических последовательностей плоскими автоматными схемами

студ. специалитета Воротников А.С.

По аналогии с переходом от СФЭ к структурным автоматам можно перейти от плоских схем к автоматным плоским схемам. В базис элементов добавляется “задержка”, правила подключения элементов, а так же интерпретация реализуемого данной схемой объекта (в нашем случае — автомата) остаются прежними. Для циклично функционирующих автоматных плоских схем без входа можно ввести такую меру сложности, как переключательная мощность, равную сумме затрат энергии на переключение с каждого такта цикла на следующий, нормированной на длину цикла. Показано, что переключательная мощность схемы, реализующей периодическую однобитную последовательность длины 2^n не больше $\frac{2^n}{n}$ по порядку. Предъявляется схема, обладающая такой переключательной мощностью. При построении применялись идеи, ранее возникавшие в конструкциях плоских схем.

17 марта 2021 года

Перевод рисунков, содержащих дорожную разметку, в формальную модель

студ. специалитета Горелова А.А.

Доклад посвящен формализации изображения дорожного участка и представления в виде модели дорожной ситуации, основанной на теоретико-графовом подходе. Для перехода к формальной модели необходимо извлечение ключевых элементов из изображения. В данном случае, к ним относятся дорожная разметка и знаки, которые действуют на дорожный участок. Таким образом, задача состоит в том, чтобы определить формальную модель, алгоритм, переводящий изображение в эту формальную модель и алгоритм обработки изображения для извлечения ключевых элементов.

31 марта 2021 года

Моделирование перемагничивания и магнитной релаксации спиновых вентиляей

студ. специалитета Аллаяров Р.С.

Развитие технологии “Point-of-Care” биосенсорных платформ нового поколения для современных медицинских исследований набирает обороты. Ее цель — дать людям портативные и компактные устройства для проведения медицинских исследований на месте, без необходимости посещения клиник.

В основе биосенсорной платформы лежит ее чувствительный механизм, который задает способы фиксации, характеристики и интерпретирования биомедицинских сигнатур. Последние достижения в области технологий “Lab-on-a-chip” позволили интегрировать различные биосенсоры с микрофлюидикой. У технологии “Lab-on-a-chip” есть два режима магнитного считывания — “label free” и “labeled”. Первый режим ориентирован на прямое обнаружение физико-химических изменений биологических образцов, вызванных химическим или биологическим связыванием. Его основным недостатком является требовательность к тонкой предобработке биологических образцов для устранения ложных срабатываний. “Labeled” биосенсоры, напротив, не требовательны к предобработке и имеют высокую селективность.

Использование магнитных частиц микро- и нанометрового масштаба в качестве меток для “Labeled“-биосенсоров сулит множество преимуществ. Во-первых, в основном биологические объекты для сканирования не являются магнитными. Поэтому нет искажения сигналов от наночастиц. Во-вторых, довольно хорошо разработаны методики связывания магнитных частиц и биологических клеток при помощи технологии антитело-антиген. К тому же, возможно использование магнитных частиц для сепарации и транспортировки магнитомеченных клеток.

В докладе представлено объединение проведенных экспериментальных работ по детектированию наночастиц на платформе I (однослойный CoFeB) и платформе II (система CoFeB/Ta/CoFeB) при помощи атомно-силовой микроскопии, СКВИД-магнитометрии, ЭПР-спектроскопии. Охарактеризованы перемагниченные области под наночастицами при помощи простых эмпирических уравнений и микромагнитного моделирования перемагничивания платформ под воздействием полей рассеяния кластеров магнитных наночастиц Fe/Fe₃O₄. Рассчитано локальное изменение магнитосопротивления платформы II под кластером наночастиц, которое согласуется с экспериментом. Рассчитано локальное изменение эффективной магнитной анизотропии рассматриваемых платформ под кластерами наночастиц, согласующееся с экспериментом.

7 апреля 2021 года

Порядок переключательной мощности автоматных плоских схем, реализующих периодические последовательности

студ. специалитета Воротников А.С.

По аналогии с переходом от СФЭ к структурным автоматам можно перейти от плоских схем к автоматным плоским схемам. В базис элементов добавляется “задержка”. Теперь корректными считаются ещё и схемы с ориентированными циклами, если такие циклы содержат хотя одну “задержку”; правила подключения элементов, а так же интерпретация реализуемого данной схемой объекта (в нашем случае — автомата) остаются прежними. Для автоматных плоских схем без входа можно ввести такую меру сложности, как переключательная мощность, равную сумме затрат энергии на переключение с каждого такта цикла на следующий, нормированной на длину цикла.

Показано, что переключательная мощность схемы, реализующей периодическую однобитную последовательность длины 2^n не больше $\frac{2^n}{n}$

по порядку, при условии использования не менее n^2 “задержек” асимптотически. Предъявляется схема, обладающая такой переключательной мощностью, для построения которой требуется не более n^2 “задержек” асимптотически.

Так же показано, что среди схем, реализующих некоторую последовательность длины 2^n и содержащих не более n^2 “задержек” по порядку, доля схем, имеющих переключательную мощность менее $\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n}$, стремится к нулю с ростом n .

Эти два утверждения дают порядок переключательной мощности для схем включающих n^2 “задержек” асимптотически.

При построении активно применялись идеи, ранее возникавшие в конструкциях плоских схем.

14 апреля 2021 года

Автоматное моделирование аэродинамики крыла

студ. специалитета Гордеева А.С.

В доклада исследуется задача моделирования движения полёта крыла в воздушном потоке. Для этой цели использованы клеточные автоматы, имитирующие движение воздуха, а также автомат, моделирующий крыло. Крыло имеет некоторую несимметричную форму. Клеточные автоматы изображают прямолинейное движение частиц, но при столкновении с крылом “обтекают” его, причем скорость частиц, движущихся по более длинной стороне крыла, больше скорости частиц с другой стороны. Из-за этого возникает подъемная сила. Автомат, моделирующий крыло, “видит” клеточные автоматы из некоторой окрестности и вычисляет их скорость, на основе этого вычисляется вектор подъемной силы. В результате чего крыло меняет свои координаты.

Найдена явная формула для вычисления скоростей в общем случае, достаточных для того, чтобы крыло поднималось. Также представлено доказательство утверждения для упрощенного профиля крыла. Показано совпадение теоретического расчёта с результатами моделирования. Приведен пример, демонстрирующий, что скорость, вычисленная по явной формуле, убывает при малом увеличении угла атаки.

**К сведению авторов публикаций в журнале
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете ЛАТ_EX, предоставляются к загрузке через WEB-форму http://intsysjournal.org/generator_form.
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте <http://intsysjournal.org>, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

Подписано в печать: 10.06.2021

Дата выхода: 25.06.2021

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).