Треугольники и уравнения Лагранжа

Алешин С.В.[1]

Рассматривается задача о равновесном взаимном расположении двух треугольников. Предлагается решение этой задачи на основе метода множителей Лагранжа. Двукратная итерация этого метода дает аналитическое решение.

Ключевые слова: метод Лагранжа, преобразование на плоскости, подобие, вращение, сдвиг, треугольник.

Рассматривается задача о равновесном взаимном расположении двух треугольников. В работе [1] предложена система уравнений, решение которой дает ответ на эту задачу. В данной заметке мы предлагаем применить метод множителей Лагранжа. Решение ищется с помощью двукратной итерации этого метода, что дает аналитическое решение задачи Библ. 2 назв.

На плоскости (X, Y) заданы два треугольника - $\triangle ABC$ с вершинами $A\,(a_1, a_2)$, $B\,(b_1, b_2)$, $C\,(c_1, c_2)$ и $\triangle HGW$ с вершинами $H\,(h_1, h_2)$, $G\,(g_1, g_2)$, $W\,(w_1, w_2)$. Требуется указать отображение $\xi : (X, Y) \to (X', Y')$,

$$X' = d_1 X + d_2 Y + \alpha; \quad Y' = -d_2 X + d_1 Y + \beta, \tag{1}$$

являющееся суперпозицией преобразований подобия и вращения (они определены матрицей D) и сдвига на вектор s:

$$D = \begin{Vmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{Vmatrix}; \quad s = (\alpha, \beta)\,.$$

Искомое отображение ξ переводит треугольник $\triangle HGW$ в треугольник $\triangle H'G'W'$, такой, что расстояния от «новых» вершин H', G', W' до соответствующих вершин A, B, C равны и минимальны, то есть

$$\rho\left(A, H'\right) = \rho\left(B, G'\right) = \rho\left(C, W'\right).$$

[1] *Алешин Станислав Владимирович* — доктор физ-мат наук, профессор, каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — Dr.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Таким образом, мы приходим к задаче

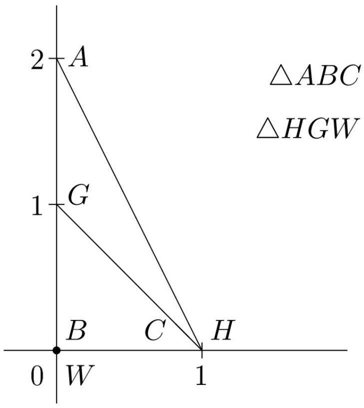
Найти $min\, \rho\,(A, H')$
при условии

$$\begin{cases} \rho\,(A, H') = \rho\,(B, G') = \rho\,(C, W')\,, \\ H' = D \cdot H + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \; G' = D \cdot G + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \; W' = D \cdot W + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

В результате решения задачи треугольник $\triangle HGW$ преобразован в треугольник $\triangle H'G'W'$, который находится в равновесном положении с треугольником $\triangle ABC$, при этом расстояние ρ - минимально.

Интерес может представить то, что решение получается в два шага, и каждый из них это стандартный метод Лагранжа [2], то есть в итоге получаем некоторый комбинированный метод.

Чтобы избежать громоздких формульных преобразований, мы рассмотрим несколько численных примеров, которые, на наш взгляд, хорошо иллюстрируют этот метод.



$\triangle ABC \quad A\,(0,2)\,,\; B\,(0,0)\,,\; C\,(1,0)$

$\triangle HGW \quad H\,(1,0)\,,\; G\,(0,1)\,,\; W\,(0,0)$

Рис. 1. Пример 1.

Преобразование определяется соотношениями

$$H' = (d_1h_1 + d_2h_2 + \alpha; -d_2h_1 + d_1h_2 + \beta) = (d_1 + \alpha; -d_2 + \beta)\,,$$

$$G' = (d_1g_1 + d_2g_2 + \alpha; -d_2g_1 + d_1g_2 + \beta) = (d_2 + \alpha; d_1 + \beta)\,,$$

$$W' = (d_1w_1 + d_2w_2 + \alpha; -d_2w_1 + d_1w_2 + \beta) = (\alpha; \beta)\,.$$

Вместо параметра ρ в равенствах берем ρ^2, то есть

$$\rho^2\left(A, H'\right) = \rho^2\left(B, G'\right) = \rho^2\left(C, W'\right),$$

$$[0-(d_1+\alpha)]^2+[2-(-d_2+\beta)]^2=[0-(d_2+\alpha)]^2+[0-(d_1+\beta)]^2=$$
$$=[1-\alpha]^2+\beta^2.$$

Таким образом, экстремальная задача для данной пары треугольников имеет вид

$$[1-\alpha]^2+\beta^2\to min,$$
$$\begin{cases} {d_1}^2+{d_2}^2+2d_1\alpha-2d_2\beta+2\alpha-4\beta+4d_2+3=0,\\ {d_1}^2+{d_2}^2+2d_2\alpha+2d_1\beta+2\alpha-1=0.\end{cases} \tag{3}$$

В качестве функционала взята величина $\rho^2\left(C,W'\right)=(1-\alpha)^2+\beta^2$, что в дальнейшем приводит к упрощению уравнений.

Для решения задачи применим метод множителей Лагранжа. Функционал Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}=(1-\alpha)^2+\beta^2+\lambda_1\cdot R_1+\lambda_2\cdot R_2.$$

Здесь R_1 (соответственно R_2) – левая часть первого (соответственно второго) равенства системы (3).

Система уравнений Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_1}=\lambda_1(2d_1+2\alpha)+\lambda_2(2d_1+2\beta)=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_2}=\lambda_1(2d_2+4-2\beta)+\lambda_2(2d_2+2\alpha)=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}=-2(1-\alpha)+\lambda_1(2d_1+2)+\lambda_2(2d_2+2)=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta}=2\beta+\lambda_1(-2d_2-4)+\lambda_2(2d_1)=0.\end{cases} \tag{4}$$

Исключая множители λ_1,λ_2 из первых двух уравнений, получаем равенство (левую часть этого равенства обозначим R_3):

$$R_3=(d_1+\alpha)(d_2+\alpha)-(d_1+\beta)(d_2+2-\beta)=0. \tag{5}$$

Это соотношение берем в качестве уравнения связи второй экстремальной задачи

$$\begin{cases}(1-\alpha)^2+\beta^2\to min,\\ R_3=0.\end{cases} \tag{6}$$

Для этой задачи уравнения Лагранжа имеют вид

$$F=(1-\alpha)^2+\beta^2+\lambda\cdot R_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial d_1}=\lambda\cdot\frac{\partial R_3}{\partial d_1}=\lambda[d_2+\alpha-d_2-2+\beta]=\lambda[\alpha-2+\beta]=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial d_2}=\lambda\cdot\frac{\partial R_3}{\partial d_2}=\lambda[d_1+\alpha-d_1-\beta]=\lambda[\alpha-\beta]=0.$$

Отсюда $\alpha - \beta = 0, \alpha + \beta = 2$, т.е. $\alpha = \beta = 1$.

Оставшиеся два уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(1-\alpha) + \lambda[2\alpha + d_1 + d_2] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta + \lambda[2\beta - d_2 + d_1 - 2] = 0.$$

Отсюда, при $\alpha = 1$

$$2 + d_1 + d_2 = 0.$$

Подставляя $d_1 = -2 - d_2, \alpha = 1, \beta = 1$ в любое из уравнений (3), получаем решение, которое должно удовлетворять ограничениям экстремальной задачи (3):

$$2{d_2}^2 + 4d_2 + 1 = 0 \quad \text{или} \quad d_2 = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В итоге имеем два решения задачи (3):

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ d_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ d_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

или

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ d_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ d_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Новое положение треугольника $\triangle H'G'W'$ определяется вершинами (рис. 2)

$$H' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right);\ G' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ W' = (1, -1)\,.$$

При этом выполнены нужные равенства.

$$\rho\left(A, H'\right) = \rho\left(B, G'\right) = \rho\left(C, W'\right).$$

Второй пример показывает, что уравнения Лагранжа могут давать не наилучшее, а допустимое решение.

Исходная конфигурация приведена на рис. 3. Она похожа на задачу 1, однако отличается выбором пар соответствующих вершин. Вершине $A(0,2)$ теперь соответствует вершина $G(0,1)$, вершине $B(0,0)$ - вершина $W(0,0)$, и вершине $C(1,0)$ - вершина $H(0,0)$.

Нетрудно заметить, что положение равновесия достигается, если поднять треугольник $\triangle WGH$ вверх по оси Y на $\frac{1}{2}$. При этом расстояния между соответствующими вершинами станут равны $\frac{1}{2}$. Такому решению соответствуют значения параметров $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$.

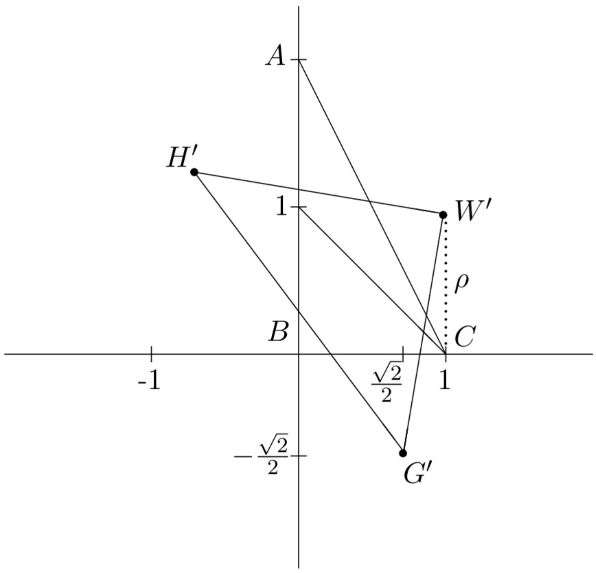
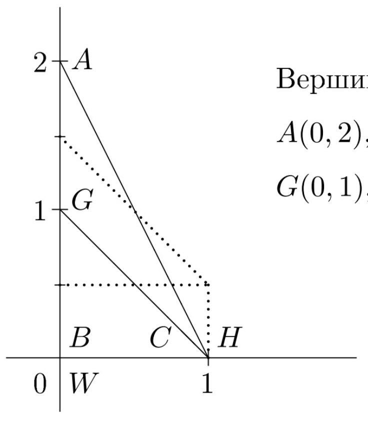


Рис. 2.



Вершины треугольников:

$A(0,2),\ B(0,0),\ C(1,0)$

$G(0,1),\ W(0,0),\ H(1,0)$

Рис. 3.

Экстремальная задача имеет вид

$$min(\alpha^2+\beta^2),$$

$$\begin{cases}(d_2+\alpha)^2+(2-d_1-\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)=0,\\(1-d_1-\alpha)^2+(-d_2+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)=0.\end{cases} \tag{7}$$

Функционал Лагранжа:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \lambda_1[1] + \lambda_2[2].$$

Здесь, [1] (соответственно, [2]) - левая часть первого (соответственно, второго) равенства системы (7).

Система уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_1} = \lambda_1[d_1 + \beta - 2] + \lambda_2[d_1 + \alpha - 1] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_2} = \lambda_1[d_2 + \alpha] + \lambda_2[d_2 - \beta] = 0.$$

Устраняя λ_1 и λ_2, получаем равенство

$$R = \alpha^2 + \beta^2 + d_1\beta - d_2\beta + d_1\alpha + d_2\alpha + d_2 - \alpha - 2\beta = 0, \tag{8}$$

которое используем для получения второй системы Лагранжа.
Функционал Лагранжа

$$\hat{\Phi} = \alpha^2 + \beta^2 + \lambda \cdot R.$$

Система уравнений

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial d_1} = \lambda \frac{\partial R}{\partial d_1} = \lambda[\beta + \alpha] = 0, \text{ т.е. } \beta = -\alpha,$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial d_2} = \lambda \frac{\partial R}{\partial d_2} = \lambda[-\beta + \alpha + 1] = 0, \text{ т.е. } -2\beta + 1 = 0, \beta = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \alpha} = 2\alpha + \lambda \frac{\partial R}{\partial \alpha} = -1 + \lambda[-2 + d_1 + d_2] = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \beta} = 2\beta + \lambda \frac{\partial R}{\partial \beta} = 1 + \lambda[-1 + d_2 - d_1] = 0.$$

Из двух первых равенств этой системы получаем $\beta = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2}$.
Используя два оставшихся равенства, получаем

$$-3 + 2d_1 = 0, \qquad d_1 = \frac{3}{2}.$$

Подставляя в основные уравнения (7), получаем

$$d_2{}^2 - d_2 - \frac{1}{4} = 0, \qquad d_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

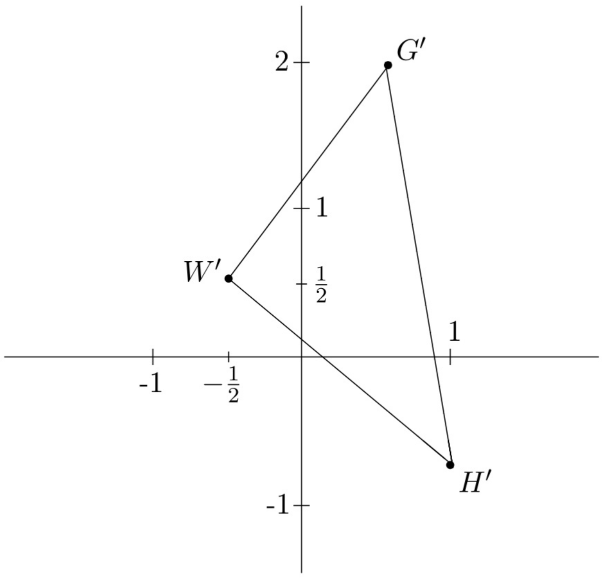


Рис. 4.

Таким образом, решение задачи

$$G' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right); \quad H' = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad W' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Это решение приведено на рис. 4.

Наконец, пример с тупоугольным треугольником, который уже находится в «равновесном» положении, и решение уравнений Лагранжа должно это отражать. На рис. 5 приведена исходная ситуация.

Следуя той же схеме решения, что в двух предыдущих задачах, рассмотрим «неподвижный» треугольник $\triangle ABC$ и «подвижный» тупоугольный треугольник $\triangle HGW$.

Задача имеет вид

$$\rho^2\left(A, H'\right) \to min,$$

$$\begin{cases} \rho^2\left(A, H'\right) - \rho^2\left(C, W'\right) = 0, \\ \rho^2\left(B, G'\right) - \rho^2\left(C, W'\right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial d_1} = \lambda_1\left[\beta - \alpha\right] + \lambda_2\left(2\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)d_1 + \alpha\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) +$$

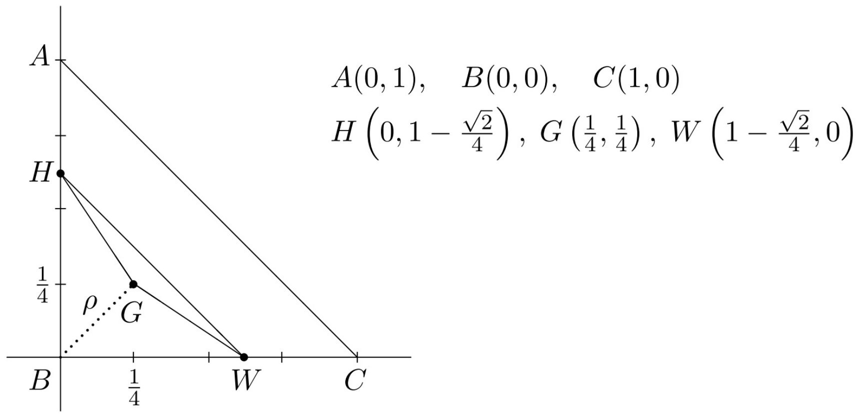


Рис. 5.

$$+\lambda_2\left(+\frac{3}{2}\beta-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}=\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2\left(2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)d_2+\frac{1}{2}\alpha\right)+ \tag{10}$$

$$+\lambda_2\left(-\beta\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=0.$$

Исключая λ_1 и λ_2, получаем функционал Φ для второй задачи Лагранжа

$$\Phi=(\beta-\alpha)\left(2d_2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\alpha-\beta\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-$$

$$-(\alpha+\beta)\left(2d_1\left(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\beta+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0. \tag{11}$$

Вторая задача Лагранжа дает уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial d_1}=\left[(\alpha+\beta)\cdot 2\left(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\lambda=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial d_2}=\left[(\beta-\alpha)\cdot 2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\lambda=0,$$

из которых следует

$\alpha+\beta=0,\ \beta-\alpha=0,\ \alpha=\beta=0.$

Подставляя эти значения в (9), получим

$$\frac{1}{8}{d_1}^2+\frac{5}{16}{d_2}^2+\frac{1}{8}d_1 d_2=$$

$$=2-2d_1\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+{d_2}^2\left(\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}.$$

Это уравнение выполнено при $d_1=1, d_2=0$, таким образом, решение

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ d_1=1,\ d_2=0.$$

То есть треугольник $\triangle GHW$ остается на месте, при этом расстояния совпадают

$$\rho\left(A,H'\right)=\rho\left(B,G'\right)=\rho\left(C,W'\right).$$

Список литературы

[1] Козлов В.Н., *Введение в математическую теорию зрительного восприятия*, Издательство центра прикладных исследований МГУ, Москва, 2007.

[2] Тихомиров В.М., *Рассказы о максимумах и минимумах*, МЦНМО, Москва, 2006.

References

[1] Kozlov V.N., *Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu zritel'nogo vospriyatiya [Introduction to the mathematical theory of visual perception]*, Publishing House of the Center for Applied Research of Moscow State University, Moscow, 2007 (in Russian).

[2] Tikhomirov V.M., *Rasskazy o maksimumakh i minimumakh [Stories about the highs and lows]*, MCCME, Moscow, 2006 (in Russian).

Triangles and Lagrange Equations

Aleshin S.V.

The paper considers the problem of the equilibrium mutual arrangement of two triangles and proposes a solution to this problem based on the method of Lagrange multipliers. Two-time iteration of this method gives analytical solution.

Keywords: Lagrange method, transformation on a plane, similarity, rotation, shift, triangle.