О синтезе колонии жуков с линейным ростом

Воротников А.С.[1]

Рассматривается динамическая система, описывающая поведение популяции жуков. Жуки живут на поле, которое в начальный момент представляет собой целочисленную решётку, к каждой клетке которой в начальный момент находится одинаковое количество еды для жуков. Жуки в соответствии с некоторым алгоритмом перемещаются по полю, едят расположенную в нём еду и размножаются, причём на все действия расходуется энергия. Система моделируется однородными структурами. В работе показано, что для любой прямой из некоторого класса существует колония, чей линеаризованный график численности бесконечное число раз пересекает выбранную прямую.

Ключевые слова: автоматное моделирование биологической системы, скорость роста динамических систем, клеточный автомат.

1. Введение

Рассмотрим следующую динамическую систему: дано бесконечное поле с ненулевым однородно расположенным запасом еды. На этом поле появляется жук, который перемещается по полю, ест имеющуюся еду и размножается. Поле моделируется целочисленной решёткой на плоскости, в которой каждому узлу в начальный момент сопоставлено некоторое одинаковое количество еды. Эту целочисленную решётку в дальнейшем будем называть картой. Жук действует по алгоритму, который упрощённо представляется схемой: искать еду, есть, пока не насытишься (если еды не хватило, снова искать), размножатся. На все действия расходуется энергия, которая получается жуком из еды, расположенной

[1] *Воротников Алексей Сергеевич* — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vorotnikov.lexa@yandex.ru.

Vorotnikov Alexey Sergeevich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

на поле. Если запас энергии жука падает ниже ноля, то жук умирает — исчезает с поля. Под размножением подразумевается деление жука на двух жуков, обладающих половиной запаса энергии родителя.

Хочется выяснить поведение функции численности популяции жуков во времени.

Каждого жука можно интерпретировать как рой или колонию. К биологическим видам, образующим подобные структуры относятся: вольвокс[1], хоанофлагеллаты[2], хроокоокковые. Моделирование биологических систем активно развивается со времён публикаций работ Лотки[3] и Вольтерры [4]. Чаще всего применяется подход моделирования дифференциальными уравнениями.

В данной работе предлагается использовать подход автоматного моделирования. Такой подход применялся ранее [5]. Рассматриваемый объект родственен клеточным автоматам [6, 7, 8]. В данный момент ведутся активные исследования в области автоматов и однородных структур [9, 10, 11]

В данной работе построен конкретный класс колоний, для которого показывается, что для любой растущей прямой, чей тангенс угла наклона меньше $\frac{40}{33}$ существует такая колония из этого класса, что её линеаризованный график численности популяции бесконечное число раз пересекает выбранную прямую.

В дальнейшем планируется построить колонии, покрывающие прямые вплоть до вертикальных.

Для любой колонии существует тривиальная квадратичная верхняя оценка численности популяции, но вопрос существования колоний с более чем линейной скоростью роста остаётся открытым.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Пусть $S \in \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant 0\}$.

Картой будем называть множество $\Sigma = \mathbb{Z}^2 \times \{0, S\} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

Проще говоря, карта — это разлинованная на клетки плоскость. Первая компонента — это координаты клетки. Вторая компонента — это количество еды в клетке, т.е. в каждой клетке либо нет еды, либо есть еда, соответствующая запасу энергии S. Последняя компонента — это количество жуков, находящихся в клетке.

Сначала опишем жука неформально.

Будем считать, что имеются 2 параметра, которые свойственны любому жуку:

- $V \in \mathbb{Q}_+$ — расход энергии на переход в соседнюю клетку;
- $D \in \mathbb{Q}_+$ — порог энергии, при превышении которого жук обязан разделиться.

Будем считать, что состояние каждого жука характеризуется четвёркой (x, y, E, d), где x, y — абсцисса и ордината текущей клетки, в которой находится жук, $E \in \mathbb{Q}$ — текущий запас энергии, $d \in \{n, e, s, w\}$ — текущее направление жука. Здесь n, e, s, w задают направления на север, восток, юг, запад соответственно.

Каждый такт жук обязан совершить одно из следующих действий:

- умереть, т.е. исчезнуть с карты;
- съесть поровну с другими жуками, находящимися вместе с ним на одной клетке, всё содержимое клетки, это действие назовём *едой*;
- передвинуться в соседнюю по стороне клетку, это действие назовём *движением*;
- разделиться на двух одинаковых по энергии жуков, это действие назовём *делением*.

Каждый такт жуки функционируют по следующему правилу: сначала все выбирают действие, которое совершат, затем совершают это действие в порядке, указанном выше (сначала все, кто решили «умереть» умирают, затем все, кто решил «есть», едят и т.д.), если необходимо, изменяют состояние карты во время своего действия.

Пусть t — текущий момент времени, $(x(t), y(t), E(t), d(t))$ — текущее состояние некоторого жука. Выбор действия осуществляется по следующим правилам.

1) Если $E(t) < 0$, то жук выбирает действие «умереть».
2) Если $0 \leqslant E(t) < D$ и в клетке, в которой находится жук, есть еда, то есть вторая компонента ненулевая, жук выбирает действие «еда».

3) Если $0 \leqslant E(t) < D$ и клетка, в которой находится жук, пустая, т.е. в ней нет еды, то жук проверяет четыре соседние по стороне клетки в таком порядке: передняя, левая, задняя, правая. Направление считается относительно текущего направления жука $d(t)$. Если среди этих клеток есть клетка с едой, то жук поворачивается к ней (т.е. выбирает новое направление движения d') и переходит в состояние «движение». Если все соседние клетки пустые, то жук переходит в состояние «движение» с направлением движения $d' = d(t)$.

4) Если $E(t) \geqslant D$, то жук переходит в состояние «деление».

После выбора действие совершается следующим образом.

1) Если выбрано действие «умереть», то сначала третья компонента клетки уменьшается на единицу, а затем жук убирается с карты.

2) Если выбрано действие «еда», и в клетке $(x(t), y(t))$ вместе с данным жуком находятся всего m жуков, то состояние жука изменяется на $(x(t+1), y(t+1), E(t+1), d(t+1))$, где $x(t+1) = x(t)$, $y(t+1) = y(t)$, $E(t+1) = E(t) - 1 + S/m$, где m — значение третьей компоненты клетки, $d(t+1) = d(t)$. После действия вторая компонента клетки обнуляется, то есть еда в клетке исчезает.

3) Если выбрано действие «движение» и d' — направление движения, то $d(t+1) = d'$, $E(t+1) = E(t) - 1 - V$ а координата жука изменяется по правилу: если $d' = n$, то $x(t+1) = x(t)$, $y(t+1) = y(t) + 1$; если $d' = s$, то $x(t+1) = x(t)$, $y(t+1) = y(t) - 1$; если $d' = e$, то $x(t+1) = x(t) + 1$, $y(t+1) = y(t)$; если $d' = w$, то $x(t+1) = x(t) - 1$, $y(t+1) = y(t)$.

4) Если выбрано действие «деление», состояние жука изменяется на $(x(t+1), y(t+1), E(t+1), d(t+1))$, где $x(t+1) = x(t)$, $y(t+1) = y(t)$, $E(t+1) = (E(t))/2 - 1$, $d(t+1) = d(t)$. При этом на карте появляется один новый жук, состояние которого будет $(x'(t+1), y'(t+1), E'(t+1), d'(t+1))$, где $x'(t+1) = x(t)$, $y'(t+1) = y(t)$, $E'(t+1) = (E(t))/2 - 1$ а $d'(t+1)$ вычисляется по следующему правилу: если $d(t) = n$, то $d'(t+1) = w$; если $d(t) = s$, то $d'(t+1) = e$; если $d(t) = e$, то $d'(t+1) = n$; если $d(t) = w$, то $d'(t+1) = s$, т.е. потомок «смотрит» влево по отношению к родителю. При этом новый жук начинает жить со следующего такта. Третья компонента клетки увеличивается на единицу.

В разделе 3 будет показана корректность определения.

Потомками жука будем называть всех жуков, появившихся на карте в результате деления данного жука.

Однородной картой будем называть карту, у которой все вторые компоненты одинаковые ненулевые.

Колонией назовём совокупность: карта с запасом энергии S и один жук с параметрами (E, V, D). Будем обозначать такую колонию $K = (S, E, V, D)$. В дальнейшем, если не указано иное, рассматриваются колонии на однородных картах. Тогда без ограничения общности состояние жука перед первым тактом характеризуется четвёркой $(0, 1, E, n)$, то есть находится в клетке с координатами $(0, 1)$, обладает запасом энергии E и смотрит наверх. Все случаи сводятся к такому поворотами на $\frac{\pi}{2}$ и целочисленными сдвигами.

В дальнейшем будем рассматривать колонии вида $K = (S, 0, V, D)$ и обозначать такие колонии $K = (S, V, D)$. Таким образом нивелируется влияние начального состояния на последующую жизнь колонии.

Назовём *численностью популяции* в момент t — число жуков $M(t)$ на карте после t тактов.

Назовём *функцией численности* $N(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такую, что $N(t) = M(t)$ для любого целого t. В остальных точках $N(t)$ линейно интерполирует $M(t)$, то есть функция численности является линеаризованной численностью популяции.

Теорема 1. *Для произвольной прямой из класса* $\mathcal{A} = \{y = ax + b \mid 0 < a < \frac{40}{33}, b \in \mathbb{R}\}$ *существует такая колония, что график её функции численности бесконечное число раз пересечёт выбранную прямую.*

3. Вспомогательные утверждения

Если хоть один жук в клетке выбрал действие «еда», то все жуки в этой клетке выбрали или действие «умереть» или действие «еда».

Доказательство. Отметим, что в клетке есть еда, иначе ни один жук не выбрал бы действие «еда».

Отметим так же, что если жук выбрал действие «умереть», то он исчез с карты до выполнения других действий остальными жуками.

- Пусть какой-то жук выбрал действие «движение». Это могло произойти, только если он не нашёл еды в клетке, выше мы отметили, что еда в клетке есть, получено противоречие.

- Пусть какой-то жук выбрал действие «деление», тогда он должен был на предыдущем такте выбрать действия «еда» или «деление»: действие «движение» приводит к тому, что на предыдущем такте у жука было больше энергии, чем на текущем, значит он должен был разделится на предыдущем такте, что приводит к противоречию. Если было выбрано действие «еда», то энергии в клетке уже нет, получено противоречие с предположением. Если было выбрано действие «деление», то рассмотрим самое первое деление этого жука на этой клетке, тогда мы приходим к рассмотренному выше случаю, когда перед действием «деление» жук выбирает действие «еда», что снова приводит к противоречию.

□

Рассмотрим колонию $K = (6k+5, 6k-3, 12k-7)$, где k — чётный натуральный параметр не меньше 16. Для доказательства нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Произвольный жук колонии K с нулевым запасом энергии в момент времени t_0 делится после прохождения ровно через k клеток, если после съедения каждой клетки жуку досталось ровно $6k+5$ единиц энергии. Тогда после деления и перехода в соседнюю клетку, то есть в момент времени $t_0 + 2k + 1$, энергия жука равна нулю.*

Доказательство. Для доказательства первой половины утверждения достаточно показать, что

$$E(t_0 + 2k - 3) < D \leqslant E(t_0 + 2k - 1). \tag{1}$$

Это означает, что после прохождения $k-1$ клетки у жука будет недостаточно энергии для деления, а после прохождения k клеток энергии уже хватит.

$$\begin{aligned} E(t_0 + 2k - 3) &= (k-1)(S - V - 2) + V + 1 = \\ &= (k-1)(6k + 5 - 6k + 3 - 2) + 6k - 3 + 1 = 12k - 8, \\ E(t_0 + 2k - 1) &= k(S - V - 2) + V + 1 = 12k - 2, \\ D &= 12k - 7. \end{aligned}$$

Слагаемое $V + 1$ нужно, так как жук совершает на одно движение меньше, чем съедает клеток. Тем самым неравенство (1) доказано.

До деления запас энергии жука равен

$$E(t_0 + 2k - 1) = 12k - 2,$$

после деления он составит

$$E(t_0 + 2k) = \frac{k(S - V - 2) + V + 1}{2} - 1 = \frac{12k - 2}{2} - 1 = 6k - 2.$$

После перехода в соседнюю клетку останется

$$E(t_0 + 2k + 1) = \frac{k(S - V - 2) + V + 1}{2} - 1 - V - 1 =$$
$$= 6k - 2 - 6k + 3 - 1 = 0.$$

□

Лемма 2. *Если жук обязан пройти через клетку с нулевым запасом энергии, то он умрёт.*

Доказательство. Жук не может выбрать действие «движение», обладая энергией больше D. Чтобы перейти через пустую клетку жук должен затратить $2V + 2$ энергии. Поскольку

$$D = 12k - 7 < 12k - 4 = 2(6k - 3 + 1) = 2(V + 1),$$

то жук умрёт. □

Лемма 3. *Если существует жук с нулевым запасом энергии, который съедает $\frac{k}{2} < p \leqslant k - 1$ клеток, получая с каждой клетки $6k + 5$ единиц энергии, затем съедает клетку так, что получает $3k + 2.5$ единицы энергии (делит клетку с другим жуком), и после этого он съест ещё $k - 1 - p + \frac{k}{2}$ клеток, получая с каждой $6k + 5$ единиц энергии, то спустя $k + \frac{k}{2}$ клеток после начала движения жук разделится, перейдёт в соседнюю клетку и умрёт.*

Доказательство. Без ограничения общности начальный момент времени примем равным нулю. В нулевой момент времени жук находится на клетке с ненулевым запасом энергии, иначе он обязан сделать шаг и умереть. Тогда после съедения p клеток энергия жука составит $E(2p-1) = p(S-V-2)+V+1 = 6p+6k-2$, что меньше D — это очевидно из доказательства Леммы 1. В момент времени $2p + 1$ жук съест клетку

Рис. 1. Схема устройства карты Σ. Здесь и далее чёрные клетки — клетки с нулевым запасом энергии, белые с $S \neq 0$.

поровну с другим жуком, $E(2p+1) = p(S-V-2)+\frac{S}{2}-1 = 6p+3k-1.5$, затем перейдёт в соседнюю клетку: $E(2p+2) = p(S-V-2)+\frac{S}{2}-V-2 = 6p-3k-0.5 > 0$ по условию леммы. Затем жук пройдёт оставшиеся $k-1-p+\frac{k}{2}$ клеток: $E(2(k-1+\frac{k}{2})-1) = (k-2+\frac{k}{2})(S-V-2)+\frac{S}{2}-1 = 6k-12+3k+3k+1.5 = 12k-10.5 < D$, но $E(2(k-1+\frac{k}{2})+1) = (k-1+\frac{k}{2})(S-V-2)+\frac{S}{2}-1 = 6k-6+3k+3k+1.5 = 12k-4.5 > D$. После деления у жука останется $E(2(k-1+\frac{k}{2})+2) = 6k-2.25$ единиц энергии. После перехода в соседнюю клетку количество энергии составит $E(2(k-1+\frac{k}{2})+3) = -0.75$ значит, жук умрёт. $\square$

Лемма 4. *Если карта Σ строится по следующему правилу (см. Рисунок* **??***):*

- *в клетке $(0,0)$ нулевой запас энергии;*
- *вне квадрата со стороной $k-1$ и нижним левым углом в $(0,0)$ у всех клеток нулевой запас энергии;*
- *внутри квадрата со стороной $k-1$ и нижним левым углом в $(0,0)$ у всех клеток, кроме клетки $(0,0)$ запас энергии составляет $6k+5$;*

то функция численности от времени колонии $K = (6k+5, 12k-2, 6k-3, 12k-7)$, состоящей из карты Σ и жука с состоянием перед первым тактом $(0,0,12k-2,e)$, выглядит следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} 1, \text{при } t = 1; \\ 2, \text{при } t \in [1, 2k+1]; \\ 4, \text{при } t \in [2k+2, 4k-4]; \\ 2, \text{при } t \in [4k-3, 4k]; \\ 1, \text{при } t \in [4k+1, 5k+2]; \\ 2, \text{при } t \in [5k+3, 5k+4]; \\ 0, \text{иначе,} \end{cases}$$

где k — чётный натуральный параметр не меньше 16.

Рис. 2. Траектория движения первого жука проведена жирной сплошной линией. Траектория потомка от его первого деления — штрихпунктирной линией, от второго — тонкой сплошной линией. Траектория движения “внука” первого жука (потомка потомка от его первого деления) обозначена тонкой штрихпунктирной линией. Стрелки условно указывают на клетку, в которой каждый конкретный жук умрёт.

Доказательство. В первый такт жук разделится: $E(1) = \frac{12k-2}{2} - 1 = 6k - 2$, сам жук и его потомок перейдут в соседние клетки $E(2) = 6k - 2 - V - 1 = 6k - 2 - 6k + 3 - 1 = 0$. Затем по Лемме 1 пойдут вдоль смежных сторон квадрата до противоположных углов, повернут, пройдут ещё две клетки, а затем делятся в момент времени $1 + 2k + 1 = 2k + 2$. После этого они проходят $k - 5$ клеток до последнего нетронутого угла квадрата, куда приходят одновременно в момент времени $2k + 2 + 2(k - 5) + 1 = 4k - 7$. Жуки поровну съедают квадрат $E(4k - 6) = (k - 5)(S - V - 2) + \frac{S}{2} - 1 = 6k - 30 + 3k + 2.5 - 1 = 9k - 28.5$. В это момент все четыре клетки, смежные с той, на которой они находятся, уже пустые, а значит жуки перемещаются на пустую клетку $E(4k - 5) = 9k - 28.5 - 6k + 3 - 1 = 3k - 26.5$. По условию леммы $3k > 26.5$, значит жуки сделают ещё один шаг, но затем умрут: $E(4k - 4) = 3k - 26.5 - 6k + 3 - 1 = -3k - 24.5 < 0$. Теперь обратим внимание на потомков. Они сделают $k-4$ шага, после чего оба окажутся на одной клетке в момент времени $4k-7$. По Лемме 3 при $p = k-5$ эта ситуация гарантирует смерть обоих жуков не более чем через $\frac{k}{2}+4$ клетки. После прохождения клетки, на которой жуки ”столкнулись”, их энергия составит $E(4k - 6) = 9k - 28.5$, потомок жука, первым появившегося в квадрате, съест одну клетку и окажется перед съеденной клеткой. Он повернёт налево, там находится одна единственная клетка. Жук съест эту клетку и вынужден будет сделать шаг на пустую клетку, а значит умрёт в момент времени $4k + 1$. Второй из рассматриваемых потомков в момент времени $4k - 5$ окажется в начале полосы из клеток с запасом энергии S длинной $k - 4$ клетки. Пройдя ровно $\frac{k}{2} + 4$ клетки он разделится, он и его потомок перейдут в соседние клетки в момент времени $4k - 5 + 2(\frac{k}{2} + 4) - 1 + 1 + 1 = 5k + 4$ и там умрут $E(5k + 5) = -0.75$. Требование $k \geqslant 16$ гарантирует, что у жука будет необходимое количество клеток: $k - 4 \geqslant \frac{k}{2} + 4$. □

4. Доказательство Теоремы 1

Докажем следующее утверждение: существует момент времени t_0 такой, что для любого $t > t_0$ график функции численности колонии, колеблется со всё возрастающей амплитудой, но постоянным периодом в конусе, образованном прямыми $y = \frac{40(x-(k-1))}{2k+1} - 196$ и $y = \frac{20(x-(2k-1))}{2k+1}x - 78$, причём как верхняя, так нижняя граница конуса достигаются бесконечное число раз.

Рассмотрим поведение колонии K. Первый жук, пройдя k клеток за $2k-1$ тактов времени, делится. Далее первый жук повторяет те же действия до бесконечности. Для всех его потомков верно то же самое. Но только самый первый потомок первого потомка — жук, появившийся в результате деления на $4k+1$-ом такте — будет жить так же; остальные, выбрав направление s, через $k-1$ клетку встретят перед собой проеденную полоску и повернут в направлении e. Таким образом в ограниченные проеденными линиями квадраты, состоящие из ещё не тронутых клеток, попадут жуки. Жизнь жуков в таких квадратах рассмотрена в Лемме 4, обратим внимание на поведение остальных жуков. А именно, рассмотрим первого потомка первого потомка первого потомка — того самого жука, что появится на карте в момент времени $6k+2$ и разделится первый раз в клетке $(0,0)$. На Рисунке 4 рассматриваемый жук обозначен A. Жук B появляется в момент времени $6k+2$ на клетке $(-k,0)$. Потомок от деления жука A в клетке $(0,0)$ в момент времени $8k+3$, обозначенный на Рисунке 4 C, выберет направление s, и, пройдя через $k-1$ клетку, попадёт на одну клетку с потомком жука B. Потомок жука B появился в момент времени $8k+3$ на клетке $(-k,-k)$ — на Рисунке 4 он обозначен D.

На Рисунке 4 появляется ещё один новый жук E. Он появился на карте вследствие деления жука B в момент времени $10k+4$ на клетке $(-k,-2k)$. По Лемме 3 при $p = k-1$ жуки C и D после "столкновения" в клетке $(0,-k)$ в момент времени $10k+3$ пройдут ещё $\frac{k}{2}$ клеток, разделятся и умрут. Когда потомок от деления жука E в момент времени $12k+5$ на клетке $(0,-2k)$ дойдёт до съеденной жуком C клетки $(0,-\frac{3}{2}k)$, он повернёт налево. Дальнейшее его поведение нас не интересует, так как его жизнь и жизнь его потомков в квадрате ограничена по времени константой $3(k-1)^2$, где 3 — верхняя оценка на количество тактов, необходимое для перемещение жука в соседнюю клетку (достигается при делении жука, иначе нужно 2 такта), а количество клеток равно площади квадрата. То же самое произойдёт и с потомком второго потомка жука E — жуком,

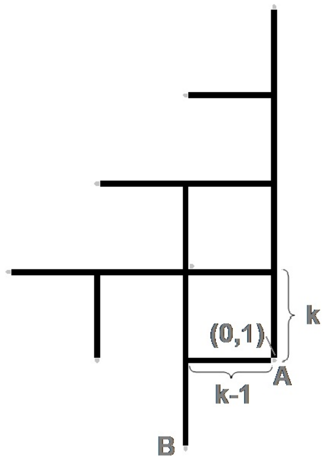

Рис. 3. Рисунок соответствует моменту времени $8k + 1$.

появившемся в клетке $(k, -k)$ в момент времени $16k + 7$ — с той лишь разницей, что он повернёт вниз после обнаружения клетки, съеденной жуком D. Теперь обратим внимание на то, что дальше все потомки жука E будут поворачивать налево, в квадрат, ограниченный предыдущим потомком жука E, потомком предыдущего потомка жука E и полоской, съеденной жуком A. Одновременно будет запускаться жизнь в двух квадратах, такая же, как во все других квадратах на карте.

Поведение жуков B и A аналогично поведению первого жука.

Теперь всё готово для явного описания функции численности колонии K. Рассмотрим жуков вне квадратов и тех, которые только вошли, но ещё не разделились. После такта с действием «деление» жука рассматриваем в рамках рассмотрения квадратов. В третьей четверти (если разбить плоскость на условные четверти: рисунок (4)) жуки живут аналогично жизни во второй с задержкой на $2k+1$ такт. В первой четверти задержка составляет $3(2k+1)$, а в четвёртой жуки живут так же как во второй с задержкой $4(2k+1)$; ещё существуют четыре жука, порождённые поведением жука E с рисунка (4). Итого

$$2\left\lfloor\frac{t}{2k+1}\right\rfloor - 2 + 2\left(\left\lfloor\frac{t}{2k+1}\right\rfloor - 1\right) - 2 + 2\left(\left\lfloor\frac{t}{2k+1}\right\rfloor - 4\right) - 2+$$
$$+2\left(\left\lfloor\frac{t}{2k+1}\right\rfloor - 3\right) - 2 + 4 = 8\left(\left\lfloor\frac{t}{2k+1}\right\rfloor - 2,5\right). \qquad (2)$$

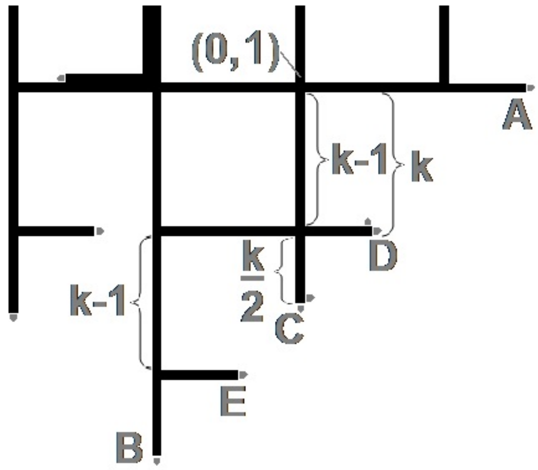

Рис. 4. Рисунок соответствует моменту времени $11k + 7$.

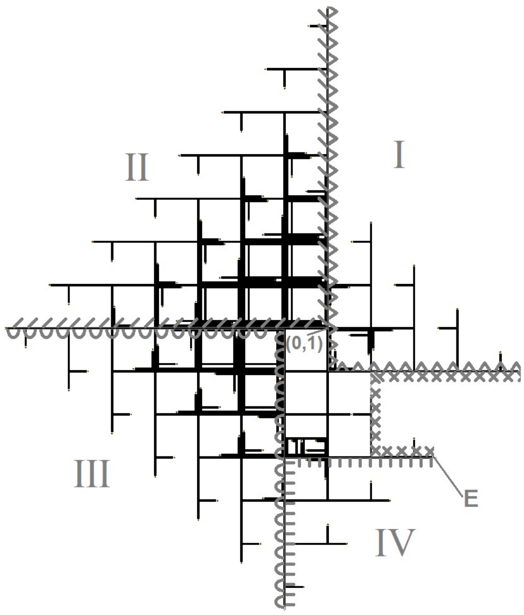

Рис. 5. Схема разбиения плоскости на четверти.

Теперь рассмотрим несколько квадратов, точнее тот случай, который реализуется в этой системе — есть n квадратов, в которых жизнь только началась, но есть ещё $n-1$, $n-2$ и, возможно, меньшее количество квадратов, в которых жизнь ещё не закончилась. Численность популяции жуков в квадратах во второй четверти выглядит так:

$$N_{II}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} mg\big(t - (2k+1)(m+2) - 2k + 1\big),$$

где $g(t)$ — численность популяции жуков в одном квадрате. Первый квадрат появляется только через $6k + 3 + 2k - 1 = 8k + 2$ такта. С учётом озвученных выше задержек можем так же выписать аналогичные функции для всех четвертей:

$$N_{III}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} mg\big(t - (2k+1)(m+3) - 2k + 1\big),$$

$$N_{IV}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} mg\big(t - (2k+1)(m+6) - 2k + 1\big),$$

$$N_{I}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} mg\big(t - (2k+1)(m+5) - 2k + 1\big).$$

Сейчас это суммы функций с пересекающимися носителями, то есть множествами, на которых функция не равна нулю; преобразуем их. Из длины носителя $5k+4$ и величины сдвига $2k+1$ ясно, что пересекаются носители только трёх соседних функций.

Становится понятно, что можно рассматривать интервал $(4k+2, 6k+3]$, до и после него всё повторяется аналогично. Запишем новую функцию $f_n(t)$, с носителем $(4k+2, 6k+3]$, предполагая, что в четверти $n-2$ квадрата соответствуют чёрному графику, $n-1$ квадрат соответствует графику, изображённым редким пунктиром, и n квадратов соответствует графику, изображённому более частым пунктиром, на рисунке (4). Для простоты сдвинем аргумент на $4k+2$.

$$f_n(t) = \begin{cases} n - 2 + 4(n-1) + 2n & = 7n - 6, \text{при } t \in [1, k]; \\ 2(n-2) + 4(n-1) + 2n & = 8n - 8, \text{при } t \in [k+1, k+2]; \\ 4(n-1) + 2n & = 6n - 4, \text{при } t \in [k+3, 2k-5]; \\ 2(n-1) + 2n & = 4n - 2, \text{при } t \in [2k-4, 2k-1]; \\ (n-1) + 2n & = 3n - 1, \text{при } t \in [2k, 2k+1]. \end{cases}$$

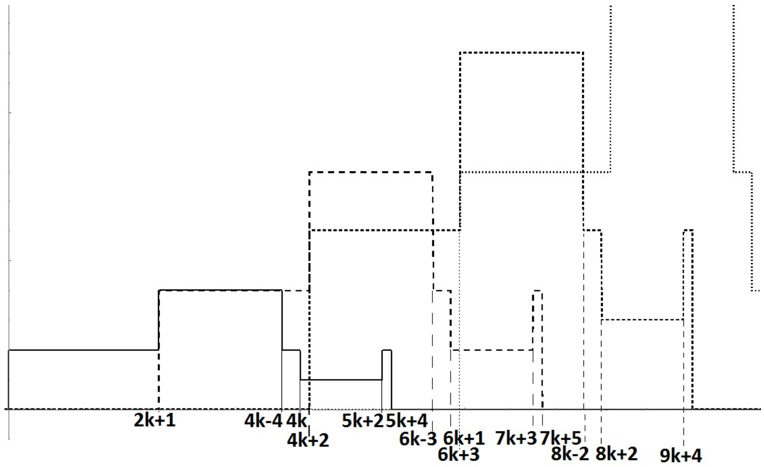

Рис. 6. Графики $g\big(t\big), 2g\big(t-(2k+1)\big), 3g\big(t-2(2k+1)\big), 4g\big(t-3(2k+1)\big)$.

Тогда, учтя, что для корректного применения функции $f_n(t)$ надо чтобы в четверти был запущен третий "слой" квадратов, перепишем функцию для второй четверти.

$$N'_{II}(t) = \sum_{m=3}^{\infty} f_m\big(t-(2k+1)(m+2)-2k+1\big),$$
$$N'_{II}(t) = N_{II}(t),\ t > 5(2k+1)+2k-1.$$

Аналогично переписываются функции для оставшихся четвертей.

Вернёмся к двум квадратам, которые появились из-за жука E. Выпишем для них аналогичную функцию.

$$f(t) = \begin{cases} 2+8+4 & = 14,\ \text{при } t \in [1,k]; \\ 4+8+4 & = 16,\ \text{при } t \in [k+1,k+2]; \\ 8+4 & = 12,\ \text{при } t \in [k+3,2k-5]; \\ 4+4 & = 8,\ \text{при } t \in [2k-4,2k-1]; \\ 2+4 & = 6,\ \text{при } t \in [2k,2k+1]. \end{cases}$$

Теперь соберём всю информацию про квадраты в одну сумму

$$\begin{aligned}
N'(t) = \sum_{m=3}^{\infty}\Big(& f_{m+4}\big(t-(2k+1)((m+4)+2)-2k+1\big)+\\
&+f_{m+3}\big(t-(2k+1)((m+3)+3)-2k+1\big)+\\
&+f_{m+1}\big(t-(2k+1)((m+1)+5)-2k+1\big)+\\
&+f_{m}\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)+\\
&+f\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)\Big)=\\
=\sum_{m=3}^{\infty}\bigg(& f_{\lfloor\frac{t}{2k+1}\rfloor-3}\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)+\\
&+f_{\lfloor\frac{t}{2k+1}\rfloor-4}\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)+\\
&+f_{\lfloor\frac{t}{2k+1}\rfloor-6}\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)+\\
&+f_{\lfloor\frac{t}{2k+1}\rfloor-7}\big(t-(2k+1)(m+6)-2k+1\big)+\\
&f\big(t-(2k+1)(m+7)\big)\bigg)=\\
&=\sum_{m=3}^{\infty}F'_{\lfloor\frac{t}{2k+1}\rfloor-7}\big(t-(2k+1)(m+7)\big),
\end{aligned}$$

где

$$F'_n(t)=\begin{cases}7(4n+8)-4*6+14=28n+46, & \text{при } t\in[1,k];\\ 8(4n+8)-4*8+16=32n+48, & \text{при } t\in[k+1,k+2];\\ 6(4n+8)-4*4+12=24n+44, & \text{при } t\in[k+3,2k-5];\\ 4(4n+8)-4*2+8=16n+32, & \text{при } t\in[2k-4,2k-1];\\ 3(4n+8)-4*1+6=12n+26, & \text{при } t\in[2k,2k+1].\end{cases}$$

Выпишем явный вид для $N(t)$ при $t>\max\big(20k+10, 8(2k+1)+3(k-1)^2\big)$. Первая величина в максимуме гарантирует, что жизнь началась уже во всех четвертях, а вторая, что в двух проблемных квадратах, порождённых жизнью жука E, не останется ни одного жука.

$$N(t) = \sum_{m=3}^{\infty} F'_{\left\lfloor \frac{t}{2k+1} \right\rfloor - 7}\left(t - (2k+1)(m+6) - 2k + 1 \right) + $$
$$+ 8\left(\left\lfloor \frac{t}{2k+1} \right\rfloor - 2,5 \right) =$$
$$= \sum_{m=3}^{\infty} F'_{\left\lfloor \frac{t}{2k+1} \right\rfloor - 7}\left(t - (2k+1)(m+6) - 2k + 1 \right) + $$
$$+ 8\left(\left\lfloor \frac{t}{2k+1} \right\rfloor - 7 \right) + 8 * 4,5 =$$
$$= \sum_{m=3}^{\infty} F_{\left\lfloor \frac{t}{2k+1} \right\rfloor - 7}\left(t - (2k+1)(m+7) \right),$$

где

$$F_n(t) = \begin{cases} 28n + 46 + 8n + 36 = 32n + 82, \text{ при } t \in [1, k-2]; \\ 32n + 48 + 8n + 36 = 40n + 84, \text{ при } t \in [k-1, k]; \\ 24n + 44 + 8n + 36 = 32n + 80, \text{ при } t \in [k+1, 2k-7]; \\ 16n + 32 + 8n + 36 = 24n + 68, \text{ при } t \in [2k-6, 2k-3]; \\ 12n + 26 + 8n + 36 = 20n + 62, \text{ при } t \in [2k-2, 2k-1]; \\ 28(n+1) + 46 + 8n + 36 = 32n + 110, \text{ при } t \in [2k, 2k+1]. \end{cases}$$

Таким образом функция численности колеблется со всё возрастающей амплитудой, но постоянным периодом в конусе, образованном прямыми $y = \frac{40(x-(k-1))}{2k+1} - 196$ и $y = \frac{20(x-(2k-1))}{2k+1} - 78$, причём бесконечное число раз достигает как верхней, так и нижней прямой, составляющих конус. Так же понятно, что сколь угодно повышая k мы сможем добиться сколь угодно низкого наклона нашего конуса над горизонтальной осью. Обозначенное выше ограничение, заставляющее нас работать с чётными k, не повлияет на покрытие: найдём k, при которых нижняя граница конуса для k лежит ниже верхней границы для $k+2$.

$$\frac{20}{2k+1} < \frac{40}{2(k+2)+1};$$

$$40k + 100 < 80k + 40;$$

$$40k > 60,$$

что точно верно при $k \geqslant 16$.

Таким образом для произвольной прямой из класса $\mathcal{A} = \{y = ax + b | 0 < a < \frac{40}{33}, b \in \mathbb{R}\}$ построена такая колония K, что график её функции численности бесконечное число раз пересечёт выбранную прямую. Если прямая пересекала ось Oy выше конуса, ограничивающего график функции численности, то она неизбежно единственный раз пересечёт верхнюю границу, но никогда не пересечёт нижнюю, тогда как сам график бесконечное число раз достигает обеих границ. Аналогична ситуация, когда прямая начинается ниже конуса.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] Хржановский В. Г. , *Ботаника*, Высшая школа, Москва, 1975.

[2] *Зоология беспозвоночных.* Т. 1: *От простейших до моллюсков и артропод*, ред. В. Вестхайде и Р. Ригера., Т-во научных изданий КМК, 2008.

[3] Lotka, A. J. , "Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems", *Proc. Nat. Acad.*, **6** (1920), 410-415.

[4] Volterra, V., "Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically", *Nature*, **118** (1926), 558-560.

[5] Н. Б. Лупанова, "Об автоматном моделировании некоторых биологических систем", *Докл. АН СССР*, **301**:5 (1988), 1066–1069; *Dokl. Math.*, **33**:8 (1988), 559–561.

[6] Кудрявцев В. Б. , Алёшин С. В. , Подколзин А. С. , *Введение в теорию авоматов: Монография*, 2, Издательство Московского университета, Москва, 2019, ISBN: 978-5-19-011370-9.

[7] Кудрявцев В. Б. , Гасанов Э. Э. , Подколзин А. С. , *Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая. Теория автоматов.*, Издательские решения, Москва, 2018, ISBN: 978-5-4493-5160-9.

[8] Подколзин А. С., "О поведениях однородных структур", *Проблемы кибернетики.*, 1974, № 31, 133–166.

[9] Калачев Г. В. , Титова Е. Е., "О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, **22**:3 (2018), 105-125.

[10] Гасанов Э. Э., "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, **24**:2 (2020), 4-8.

[11] Ведерников И. К., "Класс автоматов, достаточный для оптимального прогнозирования общерегулярных сверхсобытий", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.*, **24**:1 (2020).

On the synthesis of a colony of beetles with linear growth

Vorotnikov A.S.

The dynamic system of field and bugs - colony - them is considered. Bugs live on the field that is modeled by integer lattice in each sell of which there are the same count of the food for bugs at the first moment. Bugs must move around field or eat food or divide or dye according to the some algorithm moreover all activities spending energy. This system is modeled by cellular automaton. The colony whose linearized population size infinite number of times crossing line from some class built in this work.

Keywords: automaton modelling of biological system, growth rate of homogeneous structures, cellular automaton.