Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами

Васильев Д.И.[1]

Аннотация

В данной статье рассматривается применение модели клеточного автомата с локаторами к задаче поиска ближайшего соседа на прямой. Модель клеточного автомата с локаторами подразумевает возможность каждой ячейки автомата передавать через эфир сигнал на сколь угодно большие расстояния. В статье показано, что эта возможность позволяет уменьшить сложность рассматриваемой задачи с линейной до логарифмической по сравнению с классической моделью клеточного автомата.

Ключевые слова: клеточные автоматы, однородные структуры, поиск ближайшей точки.

1. Введение.

Клеточные автоматы являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами.

Понятие клеточного автомата возникло в результате усовершенствования модели Дж. фон Неймана [1, 2, 3], предложенной им для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. Эта модель развивалась и использовалась в работах А. Беркса [4], Э. Мура [5], В. Б. Кудрявцева, А. С. Подколзина, А. А. Болотова [6] и других исследователей [7, 8, 9].

Клеточный автомат — это математический объект с дискретными пространством и временем. Пространство поделено на клетки, в каждой

[1] *Васильев Денис Игоревич* — старший консультант, KORUS Consulting LLC, e-mail: denis.vasilev.igor@gmail.com.

Denis Igorevich Vasilev — Senior Consultant, KORUS Consulting LLC.

из которых находится элементарный автомат. Такты времени задаются натуральными числами. Состояние автомата каждой пространственной клетки определяется очень простыми правилами взаимодействия. Эти правила предписывают изменения состояния автомата каждой клетки в следующем такте времени в ответ на текущее состояние автоматов соседних клеток.

В работе Гасанова Э.Э. [10] было введено понятие клеточного автомата с локаторами, которое отличается от понятия обычного клеточного автомата тем, что допускает передачу информации не только между соседними ячейками, но и на любое расстояние, посредствам передачи сигнала в эфир. В работе рассматривается применение этой модели к одномерной задаче поиска ближайшего соседа: на $\mathbb{Z}^1$ произвольно отмечены особая точка, называемая "центральной и две других, которые будем называть "общими"; нужно понять, какая из общих точек находится ближе к центральной. Классическая модель клеточного автомата решает эту задачу за линейное (по минимуму расстояний между центральной и общими точками) время. В данной работе будет показано, что модель автомата с локаторами может решать эту задачу за логарифмическое время.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э.Гасанову за постановку задачи и к.ф.-м.н. Г.В.Калачеву за ценные замечания и предложения.

2. Описание задачи и формулировка результатов.

В работе Гасанова Э.Э. [10] введено понятие клеточного автомата с локаторами. Здесь приведем это понятие, сузив его на одномерный случай.

Под *телесным углом* в $\mathbb{R}^k$ будем понимать часть пространства $\mathbb{R}^k$, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (*вершины угла*) и пересекающих некоторую гиперповерхность в $\mathbb{R}^k$. По определению будем считать, что вершина телесного угла не входит в телесный угол. Таким образом, в случае $\mathbb{R}^1$ телесным углом из точки a может быть либо луч, выпущенный из a в сторону $a+\epsilon$ или $a-\epsilon$ ($\epsilon > 0$), либо объединение этих двух лучей. Луч соответствующий направлению $a+\epsilon$ будем обозначать как (1), $a-\epsilon$ — (-1), а объединение этих лучей — как Ω (скобки в обозначениях (1) и (-1) акцентируют внимание на том, что соответствующая запись должна восприниматься скорее как вектор, нежели как скаляр).

Клеточным автоматом с локаторами на $\mathbb{Z}^1$ называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}^1, E_n, V, E_q, +, L, \varphi, \psi)$, где $\mathbb{Z}^1$ — множество целых чисел, $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ — подмножество $\{(1); (-1)\}$, $E_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $+$ — коммутативная полугрупповая операция с нейтральным элементом, заданная на E_q, $L = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — упорядоченный набор попарно различных телесных углов в $\mathbb{R}^1$ с вершиной в начале координат (в нашем случае — подмножество $\{(1); (-1); \Omega\}$), φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\varphi : E_n^h \times E_q^m \to E_n$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$, ψ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\psi : E_n^h \times E_q^m \to E_q$. Элементы множества $\mathbb{Z}^1$ называются *ячейками* клеточного автомата σ; элементы множества E_n называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ; элементы множества E_q называются *сигналами вещания*; набор L называется *шаблон локаторов* клеточного автомата σ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ; переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ принимают значения из E_n, переменные $z_1, \ldots, z_m$ принимают значения из E_q. Состояние 0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условия $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$ и $\psi(0, \ldots, 0) = 0$ — как условия сохранения состояния покоя.

Здесь нам нужно было вводить упорядочение шаблона соседства V и шаблон локаторов L для того, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между векторами из V и телесными углами из L и переменными локальной функции переходов φ и функции вещания ψ соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ и $z_1, \ldots, z_m$. Это соответствие можно сделать более явным, если индексировать переменные функций φ и ψ самими векторами и телесными углами, т.е. считать, что локальная функция переходов φ и функция вещания ψ зависят от переменных $x_0, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{h-1}}, z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_m}$, здесь индекс первой переменной есть нулевой вектор $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^k$. Если договориться так индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания, то их можно записывать в любом порядке, и тогда можно воспринимать шаблон соседства и шаблон локаторов просто как множество, а не упорядоченный набор.

В дальнейшем мы так и будем поступать: воспринимать шаблон соседства как множество векторов, а шаблон локаторов как множество телесных углов и индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания векторами из шаблона соседства и телесными углами из шаблона локаторов. При этом мы часто будем опускать в индексах внешние круглые скобки у векторов. Например, если $k = 1$, $n = 2$, $q = 2$ и $V = \{(-1), (1)\}$, $L = \{\Omega, (-1), (1))\}$, то пример локальной функции переходов может выглядеть так: $\varphi = x_{-1} \& z_\Omega \vee x_1 \& z_1$.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^1$, ν — телесный угол с вершиной в начале координат, то через $\nu(\alpha)$ обозначим телесный угол, полученный параллельным переносом угла ν в точку α.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^1$ — ячейка клеточного автомата σ, то множество $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α, а множество $L(\alpha) = \{\nu_1(\alpha), \ldots, \nu_m(\alpha_m)\}$ называется *локаторами ячейки* α.

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовем пару (e, f), где e — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}^1$, принимающая значения из E_q, называемая *состоянием эфира*, f — произвольная функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}^1$, принимающая значения из E_n и называемая *распределением состояний клеточного автомата с локаторами* σ. Такую функцию можно интерпретировать как некую мозаику, возникающую в 1-мерном пространстве в результате приписывания каждой точке с целочисленными координатами некоторого состояния из множества E_n и некоторого сигнала из множества E_q. Множество всевозможных состояний клеточного автомата с локаторами обозначим Σ.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^1$, (e, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ, то значение $e(\alpha)$ называем *сигналом ячейки α, определяемым состоянием* (e, f), а значение $f(\alpha)$ — *состоянием ячейки α, определяемым состоянием* (e, f). Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ значение

$$s_i(\alpha) = \sum_{\beta \in \nu_i(\alpha) \cap \mathbb{Z}^1} e(\beta) \tag{1}$$

называем *значением локатора ν_i, определяемым состоянием* (e, f). Здесь суммирование сигналов осуществляется с помощью определяющей операции $+$ полугруппы E_q.

Заметим, что значение локатора не всегда определено. Например, если полугруппа представляет собой множество $\{0; 1\}$ с операцией двоичного сложения, и все ячейки отправляют в эфир 1, то значения локаторов формально будут представлять из себя бесконечную сумму единиц, что некорректно. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те пары автоматов и их начальных состояний, на каждом такте которых значения всех локаторов определены корректно.

На множестве Σ определим *глобальную функцию переходов* Φ клеточного автомата с локаторами σ, полагая $\Phi(e, f) = (e', f')$, где

$(e,f),(e',f') \in \Sigma$ и для любой ячейки $\alpha \in \mathbb{Z}^1$ выполняются тождества

$$f'(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha+\alpha_1), \ldots, f(\alpha+\alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \ldots, s_m(\alpha)), \qquad (2)$$

$$e'(\alpha) = \psi(f(\alpha), f(\alpha+\alpha_1), \ldots, f(\alpha+\alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \ldots, s_m(\alpha)). \qquad (3)$$

Содержательная интерпретация отображения Φ такова, что сигнал каждой ячейки и состояние каждой ячейки "после перехода" определяется по состоянию упорядоченной окрестности ячейки и по значениям локаторов "до перехода" с помощью законов ψ и φ одинаково для всех ячеек.

Поведениями клеточного автомата с локаторами σ называем такие последовательности $(e_0,f_0),(e_1,f_1),(e_2,f_2),\ldots$ его состояний, для которых выполняется $(e_{i+1},f_{i+1}) = \Phi(e_i,f_i)$ для всех $i = 0,1,2,\ldots$, причем (e_i,f_i) называется *состоянием клеточного автомата с локаторами* σ *в момент* i, а (e_0,f_0) также называется *начальным состоянием клеточного автомата с локаторами* σ.

Сформулируем задачу поиска ближайшего соседа на прямой. Пусть на пространстве $\mathbb{Z}^1$ задано начальное состояние I клеточного автомата, удовлетворяющее следующим критериям:

1) Любой ячейке присвоено одно из трех состояний $\{q_S; q_{C_0}, *\}$.

2) Есть лишь одна ячейка, которой присвоено состояние q_{C_0}.

3) Есть лишь конечное и непустое множество ячеек, которым присвоено состояние q_S.

Решением задачи поиска ближайшего соседа, соответствующей начальному состоянию I назовем состояние автомата, удовлетворяющее следующим критериям:

1) Ячейке, которой в I было присвоено состояние q_{C_0} присвоено состояние q_{CF}.

2) Ближайшей к ячейке в состоянии q_{CF} ячейке из тех, которым в I было присвоено состояние q_S, присвоено состояние q_{LE}, если она находится слева от ячейки в состоянии q_{CF}, и q_{RE} — если справа. Если таких ячеек две, то правой присваивается состояние $*$, а левой — q_{LE}.

3) Ячейкам, которые находятся между ячейками в состояниях q_{CF} и q_{LE} присваивается состояние q_{LF}. Ячейкам, которые находятся между ячейками в состояниях q_{CF} и q_{RE} присваивается состояние q_{RF}.

4) Остальные ячейки находятся в состоянии $*$.

Определим, что клеточный автомат с локаторами σ решает задачу поиска ближайшего соседа, если его начальное состояние удовлетворяет условиям, описанным выше, и его финальное состояние существует и соответствует решению задачи поиска ближайшего соседа для его начального состояния. Существует клеточный автомат σ с 25 состояниями и с мощностью алфавита вещания 12, который решает задачу поиска ближайшего соседа за время, не превосходящее $\log_2 s+7$, где s — расстояние от центральной ячейки с начальным состоянием q_{C_0} до её ближайшего соседа с начальным состоянием q_S.

3. Формальное описание автомата

Рассмотрим клеточный автомат $\sigma = (\mathbb{Z}^1, E_n, V, E_q, +, L, \varphi, \psi)$, где $V = \{(1), (-1)\}$, $E_q = \{0,1\}^2 \times \{0,1,2\}$, а $L = (\nu_{-1}, \nu_1)$, где ν_{-1}, ν_1 — вырожденные телесные углы, соответствующие векторам (-1) и (1).

Полугрупповую операцию на E_q определим следующим образом: $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, max(b_1, b_2), max(c_1, c_2))$

Пусть множество состояний $E_n = \{q^{=}_{CC}; q^{<}_{CC}; q^{>}_{CC}; q_S; q_{C_0}; q_L; q_R;$ $q_{C_{W_2}}; q_{C_{W_1}}; q_{C_{L_1}}; q_{C_{R_1}}; q_{LF}; q_{RF}; q_{LE}; q_{RE}; q_{CF}; q^L_*; q^R_*; q^L_1; q^R_1; q^L_0; q^R_0; q_{L_*}; q_{R_*}; *\}$

Здесь мы позволили себе раздать состояниям произвольные имена, а не 0,1,2... как в определении. Это сделано для упрощения изложения. Состояние покоя при этом соответствует состоянию $*$. Автомат будет сконструирован таким образом, что лишь конечное число ячеек будет находиться в состоянии, отличном от $*$ на каждом из тактов. Учитывая, что операция $+$ обладает свойством $(0,0,0) + (0,0,0) = (0,0,0)$, можно сделать вывод, что значение любого локатора определяется лишь конечным количеством ненулевых слагаемых, то есть корректно определено.

Опишем функции φ и ψ для каждого состояния автомата:

q^L_k и q^R_k, $k \in 0;1$ — ключевые состояния алгоритма. Автомат сконструирован таким образом, что если изначально есть некоторое количество ячеек в состоянии q^L_1, идущих подряд, то на каждом следующем такте каждая вторая ячейка с $k = 1$ перейдет в состояние q_0^L, а остальная часть — в состояние q_1^L. Этот факт будет формально доказан в другом разделе статьи, но суть заключается в том, что такое поведение позволяет побитово передавать двоичную запись длины соответствующего отрезка в эфир.

$$\varphi(q_k^L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q^L_{(k \wedge z^1_{\nu_{-1}})}, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 0 \\ q_{LF}, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 1 \\ * \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{4}$$

$$\psi(q_k^L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (k \wedge z^1_{\nu_{-1}}, k \wedge z^1_{\nu_{-1}}, 0), \tag{5}$$

$$\varphi(q_k^R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q^R_{(k \wedge z^1_{\nu_1})}, \text{ если } , z^3_{\nu_{-1}} = 0 \\ q_{RF}, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2 \\ * \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{6}$$

$$\psi^1(q_k^R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (k \wedge z^1_{\nu_1}, k \wedge z^1_{\nu_1}, 0). \tag{7}$$

q_{C_0} — это начальное состояние центральной ячейки. Ячейка в этом состоянии посылает сигнал $(0, 0, 1)$, чтобы остальные ячейки смогли определиться: они справа или слева от центра.

$$\varphi(q_{C_0}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{C_{W_1}}, \tag{8}$$

$$\psi(q_{C_0}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 1). \tag{9}$$

q_S это начальное состояние целевых ячеек. Ячейки в этом состоянии ждут сигнала из эфира, чтобы перейти в свою левую или правую версию.

$$\varphi(q_S, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q_{L_*}, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 1 \\ q_{R_*}, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1 \\ q_S \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{10}$$

$$\psi(q_S, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 1) \text{ если } z^3_{\nu_1} = 1 \\ (0, 1, 0) \text{ в остальных случаях} \end{cases}. \tag{11}$$

$*$ это начальное состояние внутренних (не центральной и не целевых) ячеек. Ячейки в этом состоянии ждут сигнала из эфира, чтобы перейти в свою левую или правую версию. По совместительству это состояние покоя.

$$\varphi(*, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q_*^L, \text{ если } z_{\nu_1}^3 = 1, z_{\nu_{-1}}^2 = 1 \\ q_*^R, \text{ если } z_{\nu_1}^2 = 1, z_{\nu_{-1}}^3 = 1 \\ * \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{12}$$

$$\psi(*, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0). \tag{13}$$

Состояния q_*^L и q_*^R обеспечивают две функции. Во первых, они нужны для того, чтобы заполнить эфир необходимыми сигналами перед тем, как соответствующие ячейки перейдут в "рабочие"состояния q_1^L и q_1^R. Во вторых, внутренние ячейки в этом состоянии отслеживают специальный сигнал из эфира, исходя из которого можно понять, находятся ли они между центральной и ближайшей со своей стороны целевой ячейкой, или нет. Соответственно, если они не находятся в такой позиции, они затираются.

$$\varphi(q_*^L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} * \text{ если } z_{\nu_1}^3 = 1 \\ q_1^L \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{14}$$

$$\psi(q_*^L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0) \text{ если } z_{\nu_1}^3 = 1 \\ (0, 1, 1) \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{15}$$

$$\varphi(q_*^R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} * \text{ если } z_{\nu_{-1}}^2 = 1 \\ q_1^R \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{16}$$

$$\psi(q_*^R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0) \text{ если } z_{\nu_{-1}}^2 = 1 \\ (0, 1, 1) \text{ в остальных случаях} \end{cases}. \tag{17}$$

Состояния q_{L_*} и q_{R_*} — это специальные состояния для целевых ячеек. Ячейка в этом состоянии, получив специальный сигнал из эфира, может понять, является она ближайшей к центру со своей стороны целевой ячейкой, или нет. В случае отрицательного ответа, соответствующая ячейка затирается.

$$\varphi(q_{L_*}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} * \text{ если } z^3_{\nu_1} = 1 \\ q_L \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{18}$$

$$\psi(q^L_*, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0), \tag{19}$$

$$\varphi(q_{R_*}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} * \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 1 \\ q_R \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{20}$$

$$\psi(q^R_*, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0). \tag{21}$$

Тройка $q^{=}_{CC}, q^{>}_{CC}, q^{<}_{CC}$ — это рабочие состояния центральной ячейки. Центральная ячейка в этих состояниях побитово сравнивает длины отрезков. Алгоритм устроен так, что побитовые записи длин подаются на центральную ячейку от младшего разряда к старшему. Центральная ячейка анализируя соответствующий бит принимает текущий статус: $q^{>}_{CC}$ — если левый бит текущего разряда больше правого, $q^{<}_{CC}$ — если он меньше. При равенстве сигналов статус наследуется с предыдущего такта. Состояние $q^{=}_{CC}$ имеет место только в начальной итерации, или при совпадении всех битов, поданных в центральную ячейку.

$$\varphi(q^X_{CC}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q^X_{CC}, \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 1, z^2_{\nu_1} = 1, z^1_{\nu_{-1}} = z^1_{\nu_1} \\ q^{>}_{CC}, \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 1, z^2_{\nu_1} = 1, z^1_{\nu_{-1}} > z^1_{\nu_1} \\ q^{<}_{CC}, \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 1, z^2_{\nu_1} = 1, z^1_{\nu_{-1}} < z^1_{\nu_1} \\ q_{CF} \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{22}$$

$$\psi(q_{C_1}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0,0,0), \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 1, z^2_{\nu_1} = 1 \\ (0,0,1), \text{ если } (z^2_{\nu_{-1}} = 0 \vee z^2_{\nu_1} = 0) \wedge \\ \wedge ((z^2_{\nu_{-1}} > z^2_{\nu_1}) \vee (z^2_{\nu_{-1}} = z^2_{\nu_1} \wedge q^X_{CC} \neq q^{>}_{CC})) \\ (0,0,2) \text{ в остальных случаях} \end{cases}. \tag{23}$$

q_L и q_R — состояния соответственно левых и правых крайних ячеек. Они просто помечают окончание отрезка и могут затираться, или переходить в свое финальное состояние q_{XE} при получении соответствующего сигнала от центральной ячейки.

$$\varphi(q_L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q_{LE}, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 1 \\ *, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 2 \\ q_L \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{24}$$

$$\psi(q_L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0), \tag{25}$$

$$\varphi(q_R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q_{RE}, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2 \\ *, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1 \\ q_R \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{26}$$

$$\psi(q_R, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0). \tag{27}$$

Состояние $q_{C_{W_2}}$ отслеживает, есть ли хотя бы одна ячейка в состоянии q_S с каждой из сторон. Если с одной из сторон такой ячейки не нашлось (то есть не получен соответствующий сигнал), то центральная ячейка переходит в состояние $q_{C_{L_1}}$ или $q_{C_{R_1}}$, чтобы досрочно завершить работу автомата ввиду отсутствия необходимости в сравнении расстояний до левого и правого соседей.

$$\varphi(q_{C_{W_2}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} q_{C_{L_1}}, \text{ если } z^2_{\nu_1} = 0 \\ q_{C_{R_1}}, \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = 0 \\ q_{C_{W_1}}, \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \tag{28}$$

$$\psi(q_{C_{W_2}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0). \tag{29}$$

Состояние $q_{C_{W_1}}$ это однотактовый сон. Центральная ячейка в этом состоянии ничего не посылает в эфир и никак не реагирует на сигналы извне.

$$\varphi(q_{C_{W_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{C_1}, \tag{30}$$

$$\psi(q_{C_{W_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0). \tag{31}$$

Состояния $q_{C_{L_1}}$ или $q_{C_{R_1}}$ посылают в эфир сигнал, означающий досрочное завершение работы автомата.

$$\varphi(q_{C_{L_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{CF}, \tag{32}$$

$$\psi(q_{C_{L_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 1), \tag{33}$$

$$\varphi(q_{C_{R_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{CF}, \tag{34}$$

$$\psi(q_{C_{R_1}}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 2). \tag{35}$$

Состояния, функции выходов и переходов которых перечислены ниже — это состояния при окончании работы автомата. Они не переходят в новые состояния и не посылают ничего в эфир.

$$\varphi(q_{LF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{LF}, \tag{36}$$

$$\psi(q_{LF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0), \tag{37}$$

$$\varphi(q_{RF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{RF}, \tag{38}$$

$$\psi(q_{RF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0), \tag{39}$$

$$\varphi(q_{LE}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{LE}, \tag{40}$$

$$\psi(q_{LE}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0), \tag{41}$$

$$\varphi(q_{RE}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{RE}, \tag{42}$$

$$\psi(q_{RE}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0), \tag{43}$$

$$\varphi(q_{CF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = q_{CF}, \tag{44}$$

$$\psi(q_{CF}, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0). \tag{45}$$

Ячейки, находящиеся в состоянии с символом L в записи будем называть левыми, с символом R — правыми. Пусть $Q_1 = \{q_k^X\}$, где $X \in \{R, L\}, k = 1$, $Q_0 = \{q_k^X\}$, где $X \in \{R, L\}, k = 0$.

4. Поведение автомата.

Опишем поведение автомата, разбив его на несколько этапов. Мы будем сопровождать описание этапов их реализацией на простом примере с начальным состоянием, приведенным ниже:

	t=0															
Q	q_S	$*$	q_S	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_{C_0}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_S
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

$Q = q_1, q_2, ..., q_n$ — строка состояний клеточного автомата. Здесь учитывается только та часть ячеек, справа и слева от которых были ячейки, которые не находились в состоянии $*$ изначально, а так же все ячейки, которые изначально находились в состояниях q_S и q_{C_0}

$L^1 = l_1^1, l_2^1, ..., l_n^1$ — строка значений первой компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_{-1}, в каждой ячейке

$L^2 = l_1^2, l_2^2, ..., l_n^2$ — строка значений второй компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_{-1}, в каждой ячейке

$L^3 = l_1^3, l_2^3, ..., l_n^3$ — строка значений третьей компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_{-1}, в каждой ячейке

$R^1 = r_1^1, r_2^1, ..., r_n^1$ — строка значений первой компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_1, в каждой ячейке

$R^2 = r_1^2, r_2^2, ..., r_n^2$ — строка значений второй компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_1, в каждой ячейке

$R^3 = r_1^3, r_2^3, ..., r_n^3$ — строка значений третьей компоненты эфира, соответствующих телесному углу ν_1, в каждой ячейке

$\psi^1 = \psi_1^1, \psi_2^1, ..., \psi_n^1$ — первая компонента посылаемых каждой ячейкой сигналов в эфир

$\psi^2 = \psi^2_1, \psi^2_2, ..., \psi^2_n$ — вторая компонента посылаемых каждой ячейкой сигналов в эфир

$\psi^3 = \psi^3_1, \psi^3_2, ..., \psi^3_n$ — третья компонента посылаемых каждой ячейкой сигналов в эфир

4.1. Этап 1: определение ориентации.

Пусть начальное состояние клеточного автомата удовлетворяет условиям Теоремы 1:

	t=0															
Q	q_S	$*$	q_S	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_{C_0}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_S
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

На первом такте в эфире нет нетривиальных сигналов. Функции переходов состояний q_S и $*$, при тривиальном сигнале из эфира, принимают значения q_S и $*$ соответственно. Функция выходов этих состояний тождественно равны соответственно $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0)$. Функция переходов состояния q_{C_0} тождественно равна $q_{C_{W_2}}$, а функция выходов — $(0, 0, 1)$. Таким образом, на следующем такте состояние поменяет только центральная ячейка. Помимо этого в эфире появятся сигналы от центральной и крайних ячеек:

	t=1															
Q	q_S	$*$	q_S	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$q_{C_{W_2}}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_S
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
R^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ψ^3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Значения функции переходов состояний q_S и $*$ зависят от того, с какой стороны пришли сигналы $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. В зависимости от этого ячейки в состоянии q_S могут перейти в состояния q_{L_*}, подав в эфир сигнал $(0, 0, 1)$, или q_{R_*}, подав сигнал $(0, 1, 0)$, а ячейки в состоянии $*$ — в q^L_* или q^R_* (при этом подав в эфир сигнал $(0, 0, 0)$). Состояние $q_{C_{W_2}}$ отслеживает, есть ли хотя бы одна ячейка в состоянии q_S (ищет сигнал $(0, 1, 0)$) с каждой из сторон. Если с одной из сторон такой ячейки не нашлось (то есть не получен соответствующий сигнал), то центральная ячейка переходит в состояние $q_{C_{L_1}}$ или $q_{C_{R_1}}$, чтобы досрочно завершить работу автомата ввиду отсутствия необходимости в сравнении расстояний до левого и правого соседей. В нашем случае с каждой стороны оказались ячейки в состоянии q_S, поэтому состояние $q_{C_{W_2}}$ по сути представляет собой состояние двухтактового сна:

	t=2															
Q	q_{L_*}	q_*^L	q_{L_*}	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	$q_{C_{W_1}}$	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_{R_*}
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
R^3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
ψ^2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На этом этап определения ориентации заканчивается. Если сравнить начальное и конечное состояния автомата на этом этапе, можно сказать, что из всех ячеек, изначально находившихся в состоянии q_S, вне состояния $*$ остались только две ближайшие к центральной. Эти ячейки из состояния q_S перейдут в состояние q_L, если они слева от центра, и в q_R — если справа; ячейки в состоянии $*$ перейдут в состояние q_*^L если они слева от центра и справа от ячейки в состоянии q_L, и в q_*^R — в противоположном случае; центральная ячейка перейдет в состояние $q_{C_{W_1}}$.

4.2. Этап 2: Сравнение длин.

Это сложный, итеративный этап.

Ячейки в состояниях q_L и q_R будем называть крайними, а ячейки, находящиеся между крайней ячейкой и центральной — внутренними. Определим, что этот этап заканчивается в момент, когда центральная ячейка посылает сигналы $\psi \in \{(0,0,1);(0,0,2)\}$. Из функций выходов и переходов видно, что центральная ячейка на этом этапе всегда находится в состояниях $q_{CC}^{=}, q_{CC}^{>}, q_{CC}^{<}$, поскольку она находится состоянии $q_{CC}^{=}$ изначально, и условия её перехода в состояние вне этой тройки совпадают с условиями подачи этой ячейкой в эфир указанного набора сигналов. Наконец, легко заметить, что дизъюнкция этих условий по сути заключается в том, что все внутренние ячейки хотя бы одной из сторон перешли в состояния $q \in Q_0$.

Рассмотрим функционирование левой части клеточного автомата. Пронумеруем внутренние ячейки автомата слева направо, и будем обозначать за $q^{i,t}, i \in \{1, 2, ..s_L\}, t \geq 0$ состояние i-й ячейки в момент времени t. Будем считать, что $t = 0$ — момент начала этапа 2.1.

$q^{i,t} \in Q_1$ тогда и только тогда, когда $i(mod\ 2^t) = 0$.

Доказательство. Докажем по индукции:

В начальный момент времени $t = 0$ все ячейки находятся в состоянии $q_1^L \in Q_1$, что соответствует тривиальному условию $i(mod\ 2^0) = 0$.

Докажем что лемма выполняется в момент времени $t = 1$. Из описания функции перехода состояний $\{q_1^L; q_1^R; q_0^L; q_0^R\}$ следует, что $q^{i,1} \in Q_1 \leftrightarrow q^{i,0} \in Q_1 \wedge z_{\nu_{-1}}^{i,0} = (1, \alpha, \beta) \leftrightarrow z_{\nu_{-1}}^{i,0} = (1, \alpha, \beta)$ (здесь и далее α и β — произвольные элементы множеств {0;1} и {0;1;2}) соответственно. Мы знаем, что $z_{\nu_{-1}}^{i,0} = \sum\limits_{j=1}^{i} \psi(q_*^L, q_{-1}, q_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \sum\limits_{j=1}^{i-1} (1, 1, 0) = (i(mod\ 2), 1, 0)$, следовательно $q^{i,1} \in Q_1 \leftrightarrow i(mod\ 2) = 0$.

Пусть лемма выполняется для всех $t = 0, 1, 2, ..., k$, докажем что она выполняется в момент времени $k + 1$. Из описания функции перехода состояний $\{q_1^L; q_1^R; q_0^L; q_0^R\}$ следует, что $q^{i,k+1} \in Q_1 \leftrightarrow q^{i,k} \in Q_1 \wedge z_{\nu_{-1}}^{i,k} = (1, \alpha, \beta)$. По построению функций выходов и переходов состояний $\{q_1^L; q_1^R; q_0^L; q_0^R\}$, $\psi^{i,k-1} = (1, \alpha, \beta) \leftrightarrow q^{i,k} \in Q_1$, следовательно $z_{\nu_{-1}}^{i,k} = (\sum\limits_{j(mod\ 2^k)=0, j<i, j>0} 1, \alpha, \beta)$. Таким образом, по предположению индукции:

$q^{i,k+1} \in Q_1 \leftrightarrow q^{i,k} \in Q_1 \wedge z_{\nu_{-1}}^{i,k} = (1, \alpha, \beta) \leftrightarrow i(mod\ 2^k) = 0 \wedge \sum\limits_{j(mod\ 2^k)=0, j<i, j>0} 1 = 1 \leftrightarrow i(mod\ 2^k) = 0 \wedge (i(mod\ 2^{k+1}) > 2^k \vee i(mod\ 2^{k+1}) = 0) \leftrightarrow i(mod\ 2^{k+1}) = 0$ □

Поскольку на этом этапе функции переходов и выходов соответствующих ячеек левой части существенно зависят только от сигналов эфира с левой стороны, а правой части — с правой, левая и правая часть в рамках этого этапа функционируют независимо, и для правой части можно привести аналогичные рассуждения.

Из леммы следует, что в момент времени t в качестве первой компоненты эфира на центральную ячейку приходит величина $\sum\limits_{i(mod\ 2^t)=0, i\in[1;s]} 1 = \lfloor \frac{s}{2^t} \rfloor\ (mod\ 2)$, что по сути является $(t + 1)$-м битом двоичной записи числа s. Таким образом, центральная ячейка может побитово сравнивать числа s_L и s_R, читая их двоичную запись справа налево. Функции выходов и переходов состояний центральной ячейки q_{CC}^X, $X \in \{=, <, >\}$ повторяют алгоритм побитового сравнения чисел: если i-й бит слева больше соответствующего бита справа, то центральная ячейка переходит в состояние $q_{CC}^>$, если меньше — в состояние $q_{CC}^<$, если они равны, то состояние не меняется. Так происходит до тех пор, пока трансляция одного из чисел не закончится ($z_{\nu_{-1}}^2 = 0 \vee z_{\nu_1}^2 = 0$). В этот момент центральная ячейка, в зависимости от своего текущего состояния, отправляет сигнал $(0, 0, 2)$ (левая сторона длиннее) или $(0, 0, 1)$ (правая сторона длиннее).

Реализацию этапа 2 на нашем примере смотрите ниже:

t=3

Q	$*$	$*$	q_L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	$q_{CC}^=$	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_R
L^1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
L^2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ψ^2	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=4

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_1^L	$q_{CC}^<$	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
L^2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=5

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_0^L	$q_{CC}^>$	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=6

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	$q_{CC}^{>}$	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0

4.3. Этап 3: завершение работы.

Линейный этап. Начинается после того, как в процессе этапа 2 центральная ячейка отправляет в эфир один из сигналов $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$. Пусть левая сторона оказалась длиннее и был отправлен сигнал $(0,0,2)$:

t=6

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	$q_{CC}^{>}$	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0

В следующий такт этот сигнал появляется в эфире:

t=7

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_{CF}	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Левые ячейки, получая такой сигнал на вход, всегда переходят в состояние покоя $*$, крайняя правая — в состояние q_{RE}, а остальные правые ячейки — в состояние q_{RF}:

t=8

Q	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_{CF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RE}
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5. Иллюстрация поведения автомата

Для наглядности ещё раз приведем пример функционирования автомата, но на этот раз целиком:

t=0

Q	q_S	$*$	q_S	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_{C_0}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_S
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

t=1

Q	q_S	$*$	q_S	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$q_{C_{W_2}}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_S
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
R^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ψ^3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=2

Q	q_{L_*}	q_*^L	q_{L_*}	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	q_*^L	$q_{C_{W_1}}$	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_*^R	q_{R_*}
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
R^3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
ψ^2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=3

Q	$*$	$*$	q_L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	q_1^L	$q_{CC}^{=}$	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_1^R	q_R
L^1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
L^2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ψ^2	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=4

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_1^L	$q_{CC}^{<}$	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
L^2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=5

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_1^L	q_0^L	q_0^L	$q_{CC}^{>}$	q_0^R	q_1^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
R^2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

t=6

Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	$q_{CC}^{>}$	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0

	t=7															
Q	$*$	$*$	q_L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_0^L	q_{CF}	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_0^R	q_R
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	t=8															
Q	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	q_{CF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RF}	q_{RE}
L^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6. Время работы автомата

Посчитаем время T, затрачиваемое автоматом σ на поиск кратчайшего отрезка. Из описания поведения автомата видно:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{46}$$

где T_k — длительности соответствующих этапов. Легко заметить, что $T_1 = 3$, $T_3 = 2$. Из Леммы 1 следует, что этап 2 заканчивается в момент $t = \min\limits_{2^r > s} r = \lceil \log_2(s + 0.5) \rceil$, где $s = \min(s_L, s_R)$. Поскольку в Лемме 1 отсчет времени велся от нуля, количество тактов T_2, затраченных на этап 2 будет оцениваться следующим образом:

$$T_2 = \lceil \log_2(s + 0.5) \rceil + 1 \leq \log_2(s) + 2.$$

Следовательно,

$$T \leq \log_2(s) + 7.$$

Список литературы

[1] Дж. фон Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, Москва, 1971.

[2] Neumann J., von, *Collected works*, New York, 1961 – 1963.

[3] Neumann J., von, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.

[4] Burks A., *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.

[5] Мур Э. Ф., “Математические модели самовоспроизведения”, *В кн.: Математические проблемы в биологии*, 1966.

[6] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., *Основы теории однородных структур*, Наука, Москва, 1990.

[7] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С., *Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая. Теория автоматов.*, Издательские решения, Москва, 2018.

[8] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.

[9] Калачев Г.В., Титова Е.Е., “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 105–125.

[10] Гасанов Э.Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20**:2 (2020), 121–133.

The closest neighbour problem solution using the cellular automata with locators model

Vasilev D.I.

The paper considers applying the locator cellular automaton model to the closest neighbour search problem. The locator cellular automaton model assumes the possibility for each cell to translate a signal through any distance using ether. It is proven in this paper that such possibility allows to decrease the problem complexity from linear to logarithmic (against the classic cellular automaton model).

Keywords: cellular automata, homogeneous structures,the closest neighbour search problem.