Необходимые и достаточные условия существования изображения с заданным кодом

Алексеев Д.В.[1]

Вводится кодирующая функция, инвариантная относительно аффинных отображений и исследуются ее свойства. Найдены необходимые и достаточные условия того, что данный набор чисел является кодом невырожденного изображения.

Ключевые слова: код изображения, кодирование изображений, аффинная эквивалентность.

Введение

В задачах распознавания часто возникает необходимость представления точечного изображения в виде какого-то кода. Одним из наиболее часто используемых является координатная запись, когда кодом изображения являются координаты его точек. Несмотря на определенные достоинства, эта кодировка не является инвариантной относительно геометрических преобразований, таких, как сдвиг, поворот, растяжение. Кроме того, она подразумевает привязку к некоторой фиксированной системе координат. В то же время представляется осмысленным рассматривать изображения, полученные в результате таких преобразований эквивалентными.

В работах В.Н. Козлова [4]–[5] предложена кодирующая функция, инвариантная относительно аффинных преобразований. Было показано, что совпадение кодов двух плоских изображений является необходимым

[1] *Алексеев Дмитрий Владимирович* — кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. лаборатории Проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: dvalex@rambler.ru

Alekseev Dmitriy Vladimirovich — Candidate of Physical and Matematical Sciences, senior staff scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Problems of Theorecical Cybernetics Lab.

и достаточным условием их аффинной эквивалентности. В данной работе вводится модифицированная кодирующая функция и исследуются ее свойства. В частности, найдены необходимые и достаточные условия того, что некоторый набор чисел является кодом двумерного изображения.

Ранее в работе [2] были получены необходимые и достаточные условия того, что существует трехмерное изображение, обладающее данными плоскими проекциями.

В работе [5] была предложена кодирующая функция ρ, инвариантная к аффинным преобразованиям плоскости: $\rho_{ijk,lmp} = \frac{S(\triangle a_i a_j a_k)}{S(\triangle a_l a_m a_p)}$, где S означает площадь треугольника. Таким образом, набору из n точек ставится в соответствии код, состоящий из $(C_n^3)^2$ чисел. Очевидно, этот код является избыточным. Данная работа исследует вопрос, какова степень его избыточности. Для модифицированной кодирующей функции приводятся явные условия того, что множество чисел является кодом изображения. Для оригинальной функции кодирования также приводятся соответствующие условия (в неявном виде).

В данной работе рассматривается модифицированная кодирующая функция $r_{ijk,lmp} = \frac{S'(\triangle a_i a_j a_k)}{S'(\triangle a_l a_m a_p)}$, где S' — ориентированная площадь, т.е. площадь со знаком, зависящим от направления обхода вершин треугольника.

Для модифицированной кодирующей функции приводятся явные условия того, что множество чисел является кодом изображения. Для оригинальной функции кодирования также приводятся соответствующие условия (в неявном виде).

Дальнейшая структура статьи устроена следующим образом: В разделе 1 вводятся основные понятия и обозначения. В разделе 2 изучаются свойства матрицы кода изображения. В разделе 3 приводится основной результат — необходимые и достаточные условия того, что набор чисел является кодом невырожденного изображения. В разделе 4 формулируются выводы и планы на будущее.

1. Основные обозначения

Введем понятие ориентированной площади треугольника $S'(\triangle abc) = S(\triangle abc)$ в случае положительного направления обхода и $S'(\triangle abc) = -S(\triangle abc)$ в случае отрицательного. Положительным считается такое направлением обхода, при котором треугольник расположен слева, т.е. направление против часовой стрелки.

Пусть на плоскости расположены точки $a_1, ..., a_n$. Будем называть множество $A = \{a_1, ..., a_n\}$ изображением. Изображение называется *вырожденным* в случае если все точки лежат на одной прямой и *невырожденным* в противном случае. Зафиксируем некоторую (евклидову) систему координат, будем обозначать координаты точки a_i как $X(a_i)$ и $Y(a_i)$. В дальнейшем для удобства будем обозначать отдельные индексы строчными латинскими буквами, а мультииндексы, т.е. вектора, состоящие из трех индексов, будем обозначать строчными греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, ...$. Компоненты мультииндекса будем обозначать $\alpha = [\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3)]$, а треугольник[1] с соответствующими номерами вершин будем обозначать $\triangle_\alpha = \triangle a_{\alpha(1)} a_{\alpha(2)} a_{\alpha(3)}$. Введем отношение эквивалентности на мультииндексах — не будем различать мультииндексы, если один из них можно получить циклической перестановкой другого. Более формально введем отношение $\alpha \simeq \alpha'$ тогда и только тогда, когда перестановка $\begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) \\ \alpha'(1) & \alpha'(2) & \alpha'(3) \end{pmatrix} \in S_3$ — четная. Будем назвать мультииндексом сопряженным к α и обозначать $\bar{\alpha}$ такой мультииндекс, что перестановка $\begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) \\ \bar{\alpha}(1) & \bar{\alpha}(2) & \bar{\alpha}(3) \end{pmatrix} \in S_3$ — нечетная. Содержательный смысл этого такой — треугольники, соответствующие эквивалентным индексам имеют одинаковую ориентированную площадь, а треугольники, соответствующие сопряженным мультииндексам имеют площади, отличающиеся знаком. В дальнейшем под словом "мультииндекс"будет подразумеваться соответствующий класс эквивалентности.

Всего существует C_n^3 различных треугольников с вершинами в точках $a_1, ..., a_n$, если не учитывать ориентацию и $N = 2 \cdot C_n^3$ — с учетом ориентации.

Занумеруем все мультииндексы (т.е. соответствующие треугольники): $\alpha_1, ..., \alpha_N$, пусть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ — множество всех мультииндексов, обозначим $E : \alpha_i \mapsto i$ соответствующую функцию нумерации.

Рассмотрим множество отношений: $r_{ijk,lmp} = \frac{S'(\triangle a_i a_j a_k)}{S'(\triangle a_l a_m a_p)}$. Если треугольник $\triangle a_l a_m a_p$ вырожден, т.е. $S'(\triangle a_l a_m a_p) = 0$, то используем формальный символ $r_{ijk,lmp} = \infty$. Будем называть это множество кодом изображения $\{a_1, ..., a_n\}$. Подобная кодирующая функция была предложена в [1].

[1] Это обозначение будем использовать также и в случае, когда треугольник вырожден, т.е. все точки лежат на одной прямой.

Определение 1. Рассмотрим матрицу $R = (r_{ij})$ размера $N \times N$ в которой на пересечении $i-$строки и $j-$го столбца расположен элемент $r_{ij} = r_{\alpha_i,\alpha_j} = \frac{S'(\triangle_\alpha)}{S'(\triangle_\beta)}$. Таким образом, элементы кода изображения расположены в виде квадратной таблицы, в которой строки и столбцы занумерованы мультииндексами (треугольниками). Будем называть R *матрицей кода изображения.*

Замечание 1. В дальнейшем будет использоваться также обозначение $r_{\alpha\beta} = R_{E(\alpha)E(\beta)}$, т.е. строки и столбцы матрицы кода могут быть занумерованы мультииндексами.

Пример 1. Рассмотрим трапецию $a_1a_2a_3a_4$, основания которой a_1a_2 и a_4a_3 относятся как $1 : 2$ (см. рис. 1). Занумеруем мультииндексы как

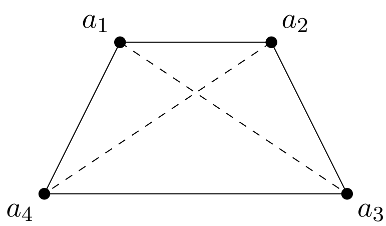

Рис. 1. К примеру 1.

в таблице 1. Заметим, что последние 4 мультииндекса являются сопряженными к первым четырем, так что достаточно построить только часть матрицы кода изображения, соответствующую первым 4 строкам и столбцам. Она будет иметь вид $R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. А полная матрица кода будет иметь вид $R = \begin{pmatrix} R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4 \end{pmatrix}$.

2. Свойства матрицы кода изображения

1) $r_{\alpha\alpha} = 1$ или ∞, при любых $\alpha \in \mathcal{A}$ (**рефлексивность**).

2) При любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, таких, что $r_{\alpha\beta} \notin \{0, \infty\}$ выполняется $r_{\beta\alpha} = r_{\alpha\beta}^{(-1)}$ (**антисимметричность**[2]).

i	α_i
1	$1,2,3$
2	$1,2,4$
3	$1,3,4$
4	$2,3,4$
5	$1,3,2$
6	$1,4,2$
7	$1,4,3$
8	$2,4,3$

Таблица 1. Таблица мультииндексов

3) При любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, таких, что $r_{\alpha\beta}, r_{\beta\gamma} \notin \{0, \infty\}$, выполняется $r_{\alpha\gamma} = r_{\alpha\beta} \cdot r_{\beta\gamma}$ (**транзитивность**).

4) Пусть заданы перестановки $\pi, \sigma \in S_3$ и мультииндексы $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Пусть мультииндексы $\alpha' = \pi(\alpha)$ и $\beta' = \sigma(\beta)$ получены применением перестановок π и σ к мультииндексам α и β, соответственно, т.е. $\alpha' = [\alpha(\pi(1)), \alpha(\pi(2)), \alpha(\pi(3))]$ и $\beta' = [\beta(\sigma(1)), \beta(\sigma(2)), \beta(\sigma(3))]$. Тогда либо $r_{\alpha'\beta'} = (-1)^{\pi} \cdot (-1)^{\sigma} \cdot r_{\alpha\beta}$, либо $r_{\alpha\beta} = \infty = r_{\alpha'\beta'}$ (**согласованность с перестановками индексов**).

5) Пусть $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \ldots, N\}$, $\alpha_1 = [i_2, i_3, i_4]$, $\alpha_2 = [i_3, i_4, i_1]$, $\alpha_3 = [i_4, i_1, i_2]$ и $\alpha_4 = [i_1, i_2, i_3]$. Тогда для произвольного $\beta \in \mathcal{A}$ выполнено равенство[3] $r_{\alpha_1\beta} + r_{\alpha_3\beta} = r_{\alpha_2\beta} + r_{\alpha_4\beta}$ (**аддитивность**).

Свойства 1–3 очевидны. Свойство 4 следует из изменения ориентированной площади при перестановках вершин. Свойство 5 следует из подсчета площади четырехугольника $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}$ (см. рис. 2) двумя различными способами. Действительно,

$$S'(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}) = S'(\triangle a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}) + S'(\triangle a_{i_4}a_{i_1}a_{i_2}) = \\ = S'(\triangle a_{i_3}a_{i_4}a_{i_1}) + S'(\triangle a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}).$$

Разделив обе части на $S'(\triangle_\beta)$, получаем требуемое равенство.

Возникает вопрос: являются ли эти условия достаточными для того, чтобы матрица была матрицей кода некоторого изображения? Ниже будет приведен контрпример, показывающий, что это не так.

[2] Если $r_{\alpha\beta} = 0$, то $r_{\beta\alpha} = \infty$. Обратное, вообще говоря, неверно.

[3] В случае нулевого знаменателя равенство рассматриваем как формальное $\infty + \infty = \infty + \infty$.

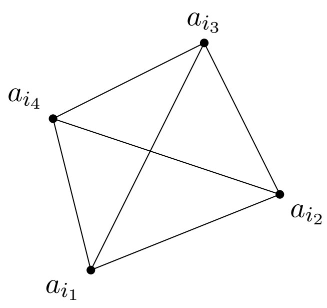

Рис. 2. Аддитивность площадей

Сначала докажем вспомогательную лемму:

Лемма 1. *Пусть треугольник* $\triangle_\beta$ *— невырожденный, обозначим* $\rho_\alpha = r_{\alpha\beta}$*,* $\alpha \in \mathcal{A}$*. Пусть на плоскости задана евклидова система координат. Тогда существует аффинное преобразование* F*, переводящее точки* $a_i, i = 1, ..., n$ *в* $c_i = F(a_i)$*, такое, что координаты* $X(c_i) = \rho_{i,\beta(3),\beta(1)}$*,* $Y(c_i) = \rho_{i,\beta(1),\beta(2)}$*.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что $\beta = [1, 2, 3]$. Построим аффинное преобразование A, переводящее $a_1 \mapsto c_1(0, 0)$, $a_2 \mapsto c_2(1, 0)$ и $a_3 \mapsto c_3(0, 1)$ (такое преобразование существует и единственно). Обозначим (x_i, y_i) — координаты $c_i = A(a_i)$. Тогда $S'(\triangle c_1c_2c_3) = \frac{1}{2}$, $S'(\triangle c_3c_1c_i) = \frac{1}{2}x_i$ и $S'(\triangle c_1c_2c_i) = \frac{1}{2}y_i$. Следовательно, $\rho_{3,1,i} = \frac{S'(\triangle c_3c_1c_i)}{S'(\triangle c_1c_2c_3)} = x_i$ и $\rho_{3,1,i} = \frac{S'(\triangle c_3c_1c_i)}{S'(\triangle c_1c_2c_3)} = y_i$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если треугольник* $\triangle_\beta$ *— невырожденный и* $\rho_{i,\beta(1),\beta(2)} = \rho_{j,\beta(1),\beta(2)} = \rho_{k,\beta(1),\beta(2)}$*, то точки* a_i, a_j, a_k *лежат на одной прямой.*

Доказательство. По лемме 1, существует аффинное преобразование, переводящее a_i, a_j, a_k в точки c_i, c_j, c_k с одинаковыми ординатами $Y(c_i) = Y(c_j) = Y(c_k)$, а, следовательно, лежащие на одной прямой.

Следствие 2. *Для того, чтобы два невырожденных изображения* A *и* B *были аффинно–эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы их кодов совпадали (при некоторой нумерации).*

Замечание 2. Это следствие является аналогом теоремы 1 из [4] (для другой кодирующей функции).

Доказательство. Необходимость вытекает из сохранения отношений ориентированных площадей при аффинных преобразования. Докажем достаточность. В невырожденном изображении всегда найдется невырожденный треугольник $\triangle_\beta(A) = \triangle a_i a_j a_k$. Из совпадения кодов следует, что соответствующий треугольник $\triangle_\beta(B) = \triangle b_i b_j b_k$ — тоже невырожденный. Тогда по лемме 1 можно построить аффинные преобразования $F_1 : A \to C$ и $F_2 : B \to C$, где точки изображения C имеют координаты $X(c_i) = \rho_{i,\beta(3),\beta(1)}$, $Y(c_i) = \rho_{i,\beta(1),\beta(2)})$. Следовательно, A и B аффинно–эквивалентны, что и требовалось доказать.

Покажем на примере, что свойства 1–5 не являются достаточными для существования изображения, обладающего данной матрицей кода.

Пример 2. Рассмотрим правильный пятиугольник с вершинами a_1,..., a_5. Обозначим точки пересечения диагоналей b_1,..., b_5 (см. рис. 3). Расположим точки m_1, m_2, m_3 внутри треугольников $\triangle a_1a_2b_4$, $\triangle a_4a_5b_2$ и $\triangle a_3b_1b_5$, соответственно. Поместим в эти точки единичные массы. Для треугольника $\triangle a_ia_ja_k$ рассмотрим суммарную массу точек, расположенных внутри него. Будем называть эту массу, взятую со знаком $+/-$ в зависимости от направления обхода, псевдо-площадью треугольника $\triangle a_ia_ja_k$ и обозначать $S^*(\triangle a_ia_ja_k)$. Очевидно, для псевдо-площади выполняется закон аддитивности. Рассмотрим матрицу $R = (r_{\alpha\beta})$, $r_{\alpha\beta} = S^*(\triangle_\alpha)/S^*(\triangle_\beta)$. свойство 4 вытекает из определения псевдо-площади, а свойство 5 — из ее аддитивности.

Предположим, что матрица R является матрицей кода некоторого изображения $a'_1, ..., a'_5$. Заметим, что

$$r_{123,123} = r_{124,123} = r_{125,123} = 1,$$

тогда, по следствию 1, точки a'_3, a'_4 и a'_5 расположены на одной прямой. Поэтому площадь треугольника $\triangle a'_3a'_4a'_5$ должна быть равна нулю, следовательно, $r_{345,123} = 0$. Но $r_{345,123} = 1 \neq 0$. Противоречие.

Замечание 3. Можно более строго определить понятие псевдо-площади. Для этого надо разместить рис. 3 на комплексной плоскости и интерпретировать точки как элементы $\mathbb{C}$. Рассмотрим мероморфную функцию $f(z) = \frac{1}{z-m_1} + \frac{1}{z-m_2} + \frac{1}{z-m_3}$, тогда в качестве определения псевдо-площади треугольника можно взять интеграл по его контуру:

$$S^*(\triangle a_ia_ja_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\triangle a_ia_ja_k} f(z)\mathrm{dz}.$$

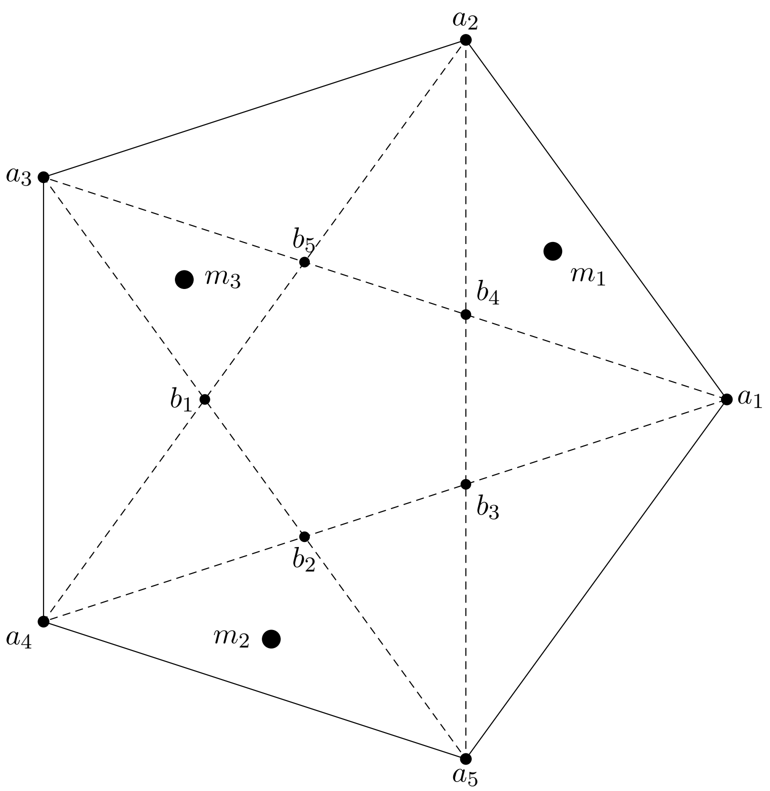

Рис. 3. К примеру 2.

3. Основные результаты

Итак, условий 1–5 недостаточно для существования изображения с указанным кодом. Теорема, приведенная ниже, отвечает на вопрос — какие дополнительные условия надо наложить для существования такого изображения.

Теорема 1. *Пусть матрица R удовлетворяет условиям 1–5. Пусть существуют $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, для которых $r_{\alpha,\beta} \neq \infty$ Тогда для того, чтобы R была матрицей кода некоторого невырожденного изображения, необходимо и достаточно, чтобы при любых $i, j = 1, ..., n$ выполнялось равенство*

$$\rho_{\beta(1),i,j} = \rho_{i,\beta(3),\beta(1)} \cdot \rho_{j,\beta(1),\beta(2)} - \rho_{j,\beta(3),\beta(1)} \cdot \rho_{i,\beta(1),\beta(2)}, \qquad (1)$$

где $\rho_\alpha = r_{\alpha,\beta}$.

Доказательство.

Необходимость. Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $\beta = [1,2,3]$. Рассмотрим отображение из доказательства леммы 1. Точки a_s, $s = 1,2,3$ перейдут в точки с координатами $c_1(0,0)$, $c_2(1,0)$ и $c_3(0,1)$, соответственно, $S'(\triangle c_1c_2c_3) = \frac{1}{2}$. Точки a_i, a_j перейдут в c_i и c_j, с координатами $X(c_i) = \rho_{i,3,1}$, $Y(c_i) = \rho_{i,1,2}$, $X(c_j) = \rho_{j,3,1}$, $Y(c_j) = \rho_{j,1,2}$. Тогда площадь треугольника $\triangle c_1c_ic_j$ можно найти по известной формуле из аналитической геометрии:

$$S(\triangle c_1c_ic_j) = \frac{1}{2} det \begin{pmatrix} X(c_i) & Y(c_i) \\ X(c_j) & Y(c_j) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\rho_{i,3,1} \cdot \rho_{j,1,2} - \rho_{j,3,1} \cdot \rho_{i,1,2}).$$

Поделив обе части на $S'(\triangle c_1c_2c_3) = \frac{1}{2}$, получаем равенство(1).

Достаточность. Пусть равенство (1) выполнено. Построим множество точек $\{a_i : i = 1, ..., N\}$ с координатами $X(a_i) = \rho_{i,3,1}$, $Y(a_i) = \rho_{i,1,2}$. Построим матрицу кода этого изображения $R^* = (r^*_{\alpha\beta})$ и покажем, что она совпадает с данной матрицей R. Будем обозначать $\rho^*_\alpha = r^*_{\alpha\beta}$. Пусть $\alpha = [i,j,k]$, рассмотрим пересечение $P = \{i,j,k\} \cap \{1,2,3\}$. Содержательно P — это множество общих индексов у α и β. Возможны случаи

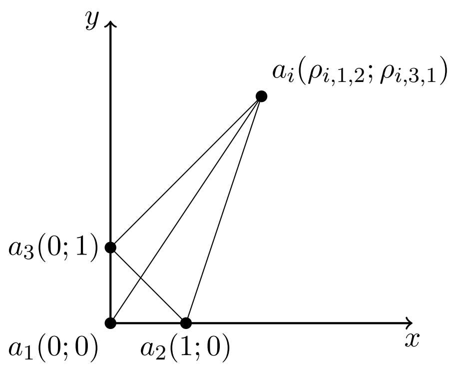

Рис. 4. Случай $|P| = 2$.

- Случай $|P| = 3$. Это означает, что $\alpha = [j,i,k]$ — некоторая перестановка индексов $1,2,3$, т.е. либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = \bar{\beta}$. Тогда $S'(\triangle_\beta) = \frac{1}{2}$ и $S'(\triangle_{\bar{\beta}}) = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\rho^*_\beta = 1 = \rho_\beta$ и $\rho^*_{\bar{\beta}} = 1 = \rho_{\bar{\beta}}$.

- Случай $|P| = 2$ и $1 \in P$ (см. рис. 4). Содержательно это означает, что треугольники $\triangle_\alpha$ и $\triangle_b$ имеют две общие вершины, одна из которых расположена в начале координат. Один из индексов не принадлежит множеству $\{1, 2, 3\}$, не ограничивая общности будем считать, что это i. Если оставшиеся индексы — 1 и 2, то[4] $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \bar{\gamma}$, где $\gamma = [1, 2, i]$. При $\alpha = \gamma$ имеем

  $$S'(\triangle_\gamma) = S'(\triangle a_i a_1 a_2) = \frac{1}{2} Y(a_i) = \frac{1}{2} \rho_{i,1,2}.$$

  Разделив на $S'(\triangle_\beta) = 1/2$, получим $\rho^*_\gamma = \rho_\gamma$. Если же $\alpha = \bar{\gamma}$, то $\rho^*_\alpha = \rho^*_{\bar{\gamma}} = -\rho^*_\gamma = -\rho_\gamma = \rho_{\bar{\gamma}}$.

  Случай, когда $P = \{1, 3\}$ доказывается аналогично.

- Случай $P = \{2, 3\}$ (см. рис. 4). Содержательно это означает, что треугольники $\triangle_\alpha$ и $\triangle_b$ имеют две общие вершины — a_1 и a_2. Один из индексов не принадлежит множеству $\{2, 3\}$, не ограничивая общности будем считать, что это i. Тогда $\alpha = \delta$ или $\alpha = \bar{\delta}$, где $\delta = [i, 3, 2]$. Если $\alpha = \delta$, то по свойству 5 (аддитивности)

  $$\rho^*_\alpha = \rho^*_{i,3,2} = \rho^*_{i,3,1} + \rho^*_{i,1,2} - \rho^*_{1,2,3} = \rho_{i,3,1} + \rho_{i,1,2} - \rho_{1,2,3} = \rho_{i,3,2} = \rho_\alpha.$$

  Третье равенство здесь следует из доказанных ранее равенств $\rho^*_{i,1,2} = \rho_{i,1,2}$ и $\rho^*_{i,3,1} = \rho_{i,3,1}$. Если $\alpha = \bar{\delta}$, то $\rho^*_\alpha = \rho^*_{\bar{\delta}} = -\rho^*_\delta = -\rho_\delta = \rho_{\bar{\delta}}$.

- Случай $P = \{1\}$ (см. рис. 5). Содержательно это означает, что треугольники $\triangle_\alpha$ и $\triangle_\beta$ имеют единственную общую вершину, расположенную в начале координат. Не ограничивая общности рассуждений, что оставшиеся две точки это a_i и a_j. Рассмотрим $\triangle a_1 a_i a_j$, его ориентированная площадь равна

  $$S'(\triangle a_1 a_i a_j) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} X(a_i) & Y(a_i) \\ X(a_j) & Y(a_j) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\rho_{i,3,1} \cdot \rho_{j,1,2} - \rho_{j,3,1} \cdot \rho_{i,1,2}).$$

  Разделив на $S'(\triangle a_1 a_2 a_2) = 1/2$, получим $\rho^*_{1,i,j} = \rho_{i,3,1} \cdot \rho_{j,1,2} - \rho_{j,3,1} \cdot \rho_{i,1,2} = \rho_{1,i,j}$, где последнее равенство вытекает из (1).

- Общий случай — произвольные i, j, k. Воспользуемся тем, что как ρ так и ρ^* обладают свойством аддитивности. Тогда $\rho^*_{i,j,k} = \rho^*_{1,i,j} +$

[4] Напомним, что равенство мультииндексов понимается с точностью до циклической перестановки их компонент.

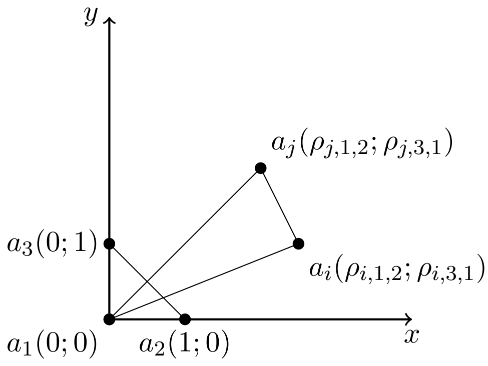

Рис. 5. Случай $P = \{1\}$.

$\rho^*_{1,j,k} - \rho^*_{1,i,k}$, что, как показано в предыдущем случае равно $\rho_{1,i,j} + \rho_{1,j,k} - \rho_{1,i,k} = \rho_{i,j,k}$, что и требовалось доказать.

Возвращаясь к кодам, не учитывающим ориентацию ([4])

Определение 2. Набор чисел $s_{\alpha,\beta} \in \{\pm 1\}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ будем называть *расстановкой знаков.* Расстановку знаков будем назвать согласованной, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ выполнены равенства

1) $s_{\alpha\beta} \cdot s_{\beta\gamma} = s_{\alpha\gamma}$;

2) $s_{\pi(\alpha)\sigma(\beta)} = (-1)^\pi \cdot (-1)^\sigma \cdot s_{\alpha\beta}$, $\pi, \sigma \in S_3$.

Замечание 4. Для согласованной расстановки знаков, очевидно выполняются равенства $s_{\alpha\alpha} = 1$ и $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ при любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

Следствие 3. *Набор чисел $r^*_{\alpha\beta}$ является кодом невырожденного изображения тогда и только тогда, когда существует согласованная расстановка знаков $s_{\alpha,\beta}$, такая, что для $r_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} \cdot r^*_{\alpha\beta}$ выполнены условия 1–5 и (1).*

4. Заключение

Полученные результаты полностью описывают множество возможных кодов невырожденных изображений. В дальнейшем планируется построение аналогичных условий для других кодирующих функций, например, сохраняющих проективную эквивалентность.

Список литературы

[1] Агниашвили П.Г., “Однозначность восстановления изображения по его коду в n-мерном случае”, *Интеллектуальные системы*, **15**:1–4 (2011), 293–332.

[2] Алексеев Д.В., “К вопросу о восстановлении трехмерного тела по его плоским проекциям”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 66–85.

[3] Козлов В.Н., “Доказательность и эвристика при распознавании визуальных образов”, *Интеллектуальные системы*, **14**:1–4 (2010), 35–52.

[4] Козлов В.Н., *Элементы математической теории зрительного восприятия*, Изд–во ЦПИ при мех.–мат. ф–те МГУ, Москва, 2001, 128 с.

[5] Козлов В.Н., “О кодировании дискретных фигур”, *Дискретная математика*, **8**:6 (1996), 57–61.

[6] Kozlov V.N., “Image Coding and Recognition and Some Problems of Stereovision”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **7**:4 (1997), 448–466.

Necessary and sufficient conditions for the existence of an image with a given code

Alekseev D.V.

The article introduces an image encoding function which is invariant with respect to affine transform. The properties of the encoding funciton are investigated. Necessary and sufficient conditions are found for a given set of numbers to be a code of nonsingulari image.

Keywords: image code, image encoding, affine equivalence.