Класс автоматов, достаточный для оптимального прогнозирования общерегулярных сверхсобытий

Ведерников И.К.[1]

Автомат прогнозирует следующий символ входного сверхслова, если он выдает этот символ на выходе в предыдущий момент времени.

В работе исследуется вопрос сужения класса автоматов для задачи прогнозирования произвольного общерегулярного сверхсобытия в многозначном алфавите. Получен класс автоматов достаточный для задачи прогнозирования, а также с его помощью доказан переход от оценок простых сверхсобытий к оценкам составных.

Ключевые слова: прогнозирование автоматами, общерегулярное сверхсобытие, автоматное прогнозирование общерегулярных сверхсобытий.

1. Введение

В статье А.Г. Вереникина и Э.Э. Гасанова [1] были введены прогнозирующие автоматы — конечные автоматы, предсказывающие сверхслово или множество сверхслов. Говорят, что автомат прогнозирует сверхслово, если через некоторое конечное время после начала, он начинает в момент времени t выдавать элемент входной последовательности под номером $t + 1$.

Оказалось, что полностью прогнозируемы только периодические сверхслова, изначально это было доказано для двоичного алфавита, но в работе [2] данный результат был обобщен на случай k-значных логик.

[1] *Ведерников Илья Константинович* — инженер-разработчик в ООО Независимое конструкторское бюро «Новые исследования и разработки», e-mail: nowaday@bk.ru.

Vedernikov Iliya Konstantinovich — development engineer at the Independent Design Bureau "New Research and Development" LLC.

В работе [3] А.А. Мастихиной было введено понятие частичного прогнозирования, которое имеет место в случае, когда автомат угадывает следующий символ не обязательно в каждый момент времени, но достаточно часто. В одной из следующих работ А.А. Мастихина [4] предъявила критерий частичной прогнозируемости общерегулярных сверхсобытий в двоичном алфавите. Также вопрос частичного прогнозирования сверхсобытий исследовался в работах [3, 5, 6, 7].

Первые результаты по сужению класса автоматов для задачи прогнозирования получены в [6], в частности, было доказано, что достаточно автоматов с размеченными функциями выхода. Функция выхода считается размеченной, если для каждого состояния автомата верно, что для всех значений функции перехода, ведущих в это состояние, функция выхода одинакова.

В данной работе показано, что для общерегулярных сверхсобытий достаточно рассматривать класс представляющих автоматов. Автомат считается представляющим, если для него можно выделить некоторое семейство подмножеств состояний, с помощью которого автомат будет представлять данное сверхсобытие согласно классическому определению из [8].

Также в конце приводится способ переноса оценок простых общерегулярных сверхсобытий на составные. Общерегулярное сверхсобытие простое, если его можно представить в виде сверхитерации регулярного с предпериодом, соответственно, если нельзя, то сверхсобытие составное. В частности, результаты данной работы позволяют перенести выводы работы [7] на произвольные общерегулярные сверхсобытия.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Введем основные определения.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ – конечный алфавит. Через E_k^* и E_k^∞ обозначим соответственно множество всех слов конечной длины и множество всех сверхслов в алфавите E_k. По определению будем считать, что пустое слово Λ принадлежит E_k^*. Подмножества E_k^* называются *событиями*, а подмножества E_k^∞ — *сверхсобытиями*.

Длину слова α обозначим $|\alpha|$, по определению $|\Lambda| = 0$. Если α — сверхслово, то $|\alpha| = \infty$.

Если α — сверхслово в алфавите E_k, n — натуральное число, то n-ую букву сверхслова α будем обозначать $\alpha(n)$, а через $\alpha\underset{n}{]}$ обозначим префикс длины n сверхслова α, т.е. $\alpha\underset{n}{]} = \alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(n)$.

Если α — слово в алфавите E_k, $|\alpha| = m$, n — натуральное число, $n < m$, то через $\underset{n}{[}\alpha$ обозначим суффикс длины n слова α, т.е. $\underset{n}{[}\alpha = \alpha(m-n+1)\dots\alpha(m)$. Если $n = 0$, то положим $\underset{n}{[}\alpha = \Lambda$.

В работе рассматриваются конечные инициальные автоматы в соответствии с нотацией из [8]:

$$V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0),$$

где $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$ – входной и выходной алфавит, Q – множество состояний, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счетного множества, $\varphi : Q \times E_k \to Q$ – функция переходов, $\psi : Q \times E_k \to E_k$ – функция выходов, q_0 – начальное состояние.

Если на вход инициальному автомату V подается слово или сверхслово $x = x(1)x(2)\dots$, на выходе получается слово или сверхслово $y = y(1)y(2)\dots$, и $q(t)$ означает состояние автомата в момент времени t, то функционирование автомата задается системой уравнений

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi\big(q(t), x(t)\big), \\ y(t) = \psi\big(q(t), x(t)\big), \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{N}$.

Также определим автомат без выхода $V = (E_k, Q, \varphi, q_0)$, где E_k, Q, φ, q_0 определяются аналогично определению выше, а функционирование задается системой

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi\big(q(t), x(t)\big), \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{N}$.

Функции φ и ψ естественно расширяются на $Q \times E_k^*$, а именно, если $\alpha \in E_k^*$, $a \in E_k$, то индуктивно определим

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a),$$

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Введем также обозначения

$$\overline{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_1)\varphi(q, \alpha]_2) \dots \varphi(q, \alpha),$$

$$\overline{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2) \dots \psi(q, \alpha),$$

если α — слово, если же α — сверхслово, то

$$\overline{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_1)\varphi(q, \alpha]_2) \dots \varphi(q, \alpha]_n) \dots,$$

$$\overline{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2) \dots \psi(q, \alpha]_n) \dots .$$

Если α — сверхслово в алфавите A, то *пределом* сверхслова α назовем такое множество $A' \subseteq A$, что в сверхслове α бесконечное число раз встречаются символы из A' и только они. Этот факт будем обозначать $A' = \lim \alpha$.

Если есть событие R_1 и событие или сверхсобытие R_2, то через R_1R_2 обозначим их *произведение*, то есть все слова (сверхслова) вида ab, где $a \in R_1, b \in R_2$ (ab – конкатенация слов a и b).

Если R – событие, то обозначим R^* – *итерация* события R, то есть $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^i ...$, а R^∞ – *сверхитерация* события R, $R^\infty = \{a_1a_2a_3...|\ a_i \in R, i = 1, 2, 3...\}$.

Если $Q = Q_1 \times Q_2$, то обозначим $Q_1 = Pr_1(Q),\ Q_2 = Pr_2(Q)$, и будем говорить, что $Pr_i(Q)$ – проекция множества Q на i-ую компоненту.

Сверхсобытие R *представимо* автоматом $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью семейства F, $F \subseteq 2^Q$, тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in R$, существует $Q' \in F$, такое, что $\lim \overline{\varphi}(q_0, \alpha) = Q'$.

Определим *регулярное событие* над алфавитом E_k:

1) $\varnothing, \{a\}, a \in E_k,$ — регулярные события;

2) пусть R_1, R_2 — регулярные события, тогда события $R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ также регулярны.

Определим *общерегулярное сверхсобытие* над алфавитом E_k:

1) если R — регулярное событие над алфавитом E_k, то R^∞ — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом E_k;

2) если R_1 — регулярное событие над алфавитом E_k, R_2 — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом E_k, то R_1R_2 — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом E_k;

3) если R_1, R_2 — общерегулярные сверхсобытия над алфавитом E_k, то $R_1 \cup R_2$ — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом E_k.

Заметим, что в соответствии с [8] любое общерегулярное сверхсобытие представимо в виде $R = T_1R_1^\infty \cup ... \cup T_hR_h^\infty$, где T_i, R_i — регулярные события.

Если общерегулярное сверхсобытие R можно представить в виде $R = T_1R_1^\infty$, будем говорить, что оно *простое*. Иначе, скажем, что оно *составное*.

Пусть $t \in \mathbb{N}$, скажем, что $(t+1)$-й символ сверхслова $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(t+1)\ldots$ или слова $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(t')$, $t' > t$, *угадан* автоматом $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, если $\psi(q_0, \alpha]_t) = \alpha(t+1)$.

Пусть $\alpha \in E_k^\infty$, обозначим $\sigma_\alpha(V) = \underline{\lim}_{n\to\infty} N_n/n$, где N_n – количество угаданных автоматом V символов в слове $\alpha\underset{n}{]}$. Будем говорить, что $\sigma_\alpha(V)$ – *степень прогнозирования сверхслова* α автоматом V. Если $\alpha \in E_k^*$, $|\alpha| = n$, обозначим $\sigma_\alpha(V) = N/n$, где N – количество угаданных автоматом V символов в слове α. Будем говорить, что $\sigma_\alpha(V)$ – *степень прогнозирования слова* α автоматом V.

Считаем, что множество сверхслов R *частично прогнозируемо*, если существует такой автомат V, что степень прогнозирования для каждого сверхслова множества R строго больше нуля. Обозначим $\sigma_R(V) = \inf\limits_{\alpha\in R} \sigma_\alpha(V)$.

Если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс автоматов, то степень прогнозирования сверхсобытия R на автоматах из этого класса определим как $\sigma_R(\mathfrak{K}) = \sup\limits_{V\in\mathfrak{K}} \sigma_R(V)$.

Будем говорить, что автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$, прогнозирующий сверхсобытие R, лежит в классе представляющих относительно R, если существует автомат $V_0 = (E_k, Q, \varphi, q_0)$, представляющий R с помощью некоторого F, $F \subseteq 2^Q$.

Определим некоторый способ задания выходов, т.е. способ описания функции $\psi : Q \times E_k \to E_k$. Задавать выходную функцию будем, помечая ребра диаграммы Мура – в каждом состоянии отметим одно исходящее ребро. Тогда функция выхода будет описана следующим образом: если у нас отмечено ребро по символу b, $b \in E_k$, исходящее из некоторого состояния q', то для всех q и a, таких что $\varphi(q, a) = q'$, значение выходной функции $\psi(q, a)$ будет равно b. Понятно, что задавая таким образом функцию ψ для каждого состояния, в итоге мы полностью определим ее. Функцию выхода, полученную таким образом, будем называть *размеченной*.

Заметим, что угадывание происходит, когда выход в предыдущий момент времени равен входу в данный момент времени. Поэтому если автомат проходит по отмеченной стрелке, то угадывание происходит.

Обозначим $\mathfrak{A}$ – класс всех автоматов, $\mathfrak{R}(R)$ — множество автоматов, которые лежат в классе представляющих относительно R, $\mathfrak{M}$ – множество всех автоматов с размеченными функциями выхода, а $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(R)$ — все автоматы из $\mathfrak{R}(R)$ с размеченной функцией выхода.

Далее сформулируем основные результаты данной работы:

Теорема 1. *Пусть есть общерегулярное сверхсобытие R и автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ такой, что $V \notin \mathfrak{R}(R)$, тогда существует автомат $V' = (E_k, Q', E_k, \varphi', \psi', q'_0)$, $V' \in \mathfrak{R}(R)$, для которого выполнено, что $\sigma_R(V') \geq \sigma_R(V)$.*

Теорема 2. *Для любого общерегулярного сверхсобытия R выполнено*

$$\sigma_R(\mathfrak{A}) = \sigma_R(\mathfrak{M}\mathfrak{R}(R))$$

Утверждение 1. *Пусть есть общерегулярное сверхсобытие $R = T_1 R_1^\infty \cup \dots \cup T_h R_h^\infty$ и выполнено, что $\sigma_{T_i R_i^\infty}(\mathfrak{M}\mathfrak{R}(T_i R_i^\infty)) \leq g_i$, тогда верна оценка*

$$\sigma_R(\mathfrak{M}\mathfrak{R}(R)) \leq \min_{i=\overline{1,h}} g_i$$

3. Доказательство основных теорем

Теорема 1. *Пусть есть общерегулярное сверхсобытие R и автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ такой, что $V \notin \mathfrak{R}(R)$, тогда существует автомат $V' = (E_k, Q', E_k, \varphi', \psi', q'_0)$, $V' \in \mathfrak{R}(R)$, для которого выполнено, что $\sigma_R(V') \geq \sigma_R(V)$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть существует автомат $V_1 = (E_k, Q_1, E_k, \varphi_1, \psi_1, q_{0,1})$, $V_1 \notin \mathfrak{R}(R)$, такой, что для него выполнено $\sigma_R(V_1) \geq \sigma_R(\mathfrak{R}(R))$.

Положим $V_2 = (E_k, Q_2, E_k, \varphi_2, \psi_2, q_{0,2})$ – произвольный автомат из $\mathfrak{R}(R)$, и пусть он представляет R с помощью семейства F_2, $F_2 \subset 2^{Q_2}$. Далее построим автомат V' такой, что $V' \in \mathfrak{R}(R)$ и $\sigma_R(V') \geq \sigma_R(V_1)$. Сделаем это следующим образом:

1) Положим $Q' = Q_1 \times Q_2$, а начальное состояние $q'_0 = (q_{0,1}, q_{0,2})$.

2) Функцию переходов определим как $\varphi'((q_1, q_2), a) = (\varphi_1(q_1, a), \varphi_2(q_2, a))$, где $q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ a \in E_k$.

3) Функцию выходов зададим аналогично автомату V_1, т.е. $\psi'((q_1, q_2), a) = \psi_1(q_1, a)$, где $q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ a \in E_k$.

Заметим, что по построению сразу выполнено, что степени прогнозирования автоматов V_1 и V' равны. Однако функция выхода автомата V' может не быть оптимальной после построения, поэтому будем считать, что $\sigma_R(V') \geq \sigma_R(V_1)$.

Далее построим F', с помощью которого автомат V' представляет R. Если существует такое $\alpha \in R$, что $\lim \varphi'(q'_0, \alpha) = L$, то добавим L в F'.

Теперь покажем, что автомат V' действительно представляет R с помощью F'. По построению семейства F' сразу выполнено, что, если $\alpha \in R$, то $\lim \varphi'(q'_0, \alpha) \in F'$. С другой стороны верно, что $\lim \varphi_2(q_{0,2}, \alpha) \in F_2$, и по построению функции φ' для любого элемента L из F' выполнено, что $Pr_2(L) \in F_2$. Отсюда получим, что если $\lim \varphi'(q'_0, \alpha)$ принадлежит F', то $Pr_2(\lim \varphi'(q'_0, \alpha))$ принадлежит F_2, а значит α было из R.

Таким образом построен автомат V', который прогнозирует R с помощью F' и угадывает R не хуже чем автомат V_1. Противоречие с оптимальностью V_1. Теорема доказана.

$\square$

Для доказательства следующей теоремы понадобится результат, изложенный в работе [6]. В ней исследуется вопрос о достаточности размеченных функций выхода для задачи прогнозирования, и была доказана следующая теорема

Теорема 3. *Пусть автомат $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ прогнозирует сверхсобытие R со степенью σ, ψ – не размеченная, тогда существует автомат $\widehat{V} = (E_k, \widehat{Q}, E_k, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{q_0})$, где $\widehat{\psi}$ – размеченная, который прогнозирует R со степенью σ. Более того, если $V \in \mathfrak{R}(R)$, то $\widehat{V} \in \mathfrak{MR}(R)$.*

Зная этот результат, докажем теорему 2.

Теорема 2. *Для любого общерегулярного сверхсобытия R выполнено*

$$\sigma_R(\mathfrak{A}) = \sigma_R(\mathfrak{MR}(R))$$

Доказательство. Возьмем произвольное общерегулярное сверхсобытие R и произвольный автомат V из $\mathfrak{A}$. Для них по теореме 1 существует автомат V' из $\mathfrak{R}(R)$ такой, что $\sigma_R(V) \leq \sigma_R(V')$. Далее по теореме 3 существует автомат V'' из $\mathfrak{MR}(R)$ такой, что $\sigma_R(V') \leq \sigma_R(V'')$. В итоге получаем, что $\sigma_R(V) \leq \sigma_R(V'')$, и поскольку R и V произвольные, то $\sigma_R(\mathfrak{A}) = \sigma_R(\mathfrak{MR}(R))$. □

Утверждение 1. *Пусть есть общерегулярное сверхсобытие* $R = T_1 R_1^\infty \cup \dots \cup T_h R_h^\infty$ *и выполнено, что* $\sigma_{T_i R_i^\infty}(\mathfrak{MR}(T_i R_i^\infty)) \leq g_i$, *тогда верна оценка*

$$\sigma_R(\mathfrak{MR}(R)) \leq \min_{i=\overline{1,h}} g_i$$

Доказательство. Докажем от противного, пусть $\sigma_R(\mathfrak{MR}(R)) > g_j$, где $g_j = \min_{i=\overline{1,h}} g_i$.

Возьмем автомат V из $\mathfrak{MR}(R)$ такой, что $\sigma_R(V) > g_j$. Заметим, что $T_j R_j^\infty \subset R$, следовательно, $\sigma_{T_j R_j^\infty}(V) > g_j$.

Предположим автомат V принадлежит $\mathfrak{MR}(T_j R_j^\infty)$, но тогда получим противоречие с оценкой $\sigma_{T_j R_j^\infty} \mathfrak{MR}(T_j R_j^\infty) \leq g_j$, следовательно верно обратное, т.е. $V \notin \mathfrak{MR}(T_j R_j^\infty)$. Но тогда по теореме 1 существует автомат V', $V' \in \mathfrak{MR}(T_j R_j^\infty)$, такой, что $\sigma_{T_j R_j^\infty}(V') \geq \sigma_{T_j R_j^\infty}(V) > g_j$. Получили противоречие с исходной оценкой. Утверждение доказано.

□

Список литературы

[1] Вереникин А.Г., Гасанов Э.Э., "Об автоматной детерминизации множеств сверхслов", *Дискретная математика*, **18**:2 (2006), 84–97.

[2] Гасанов Э.Э., "Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами", *Интеллектуальные системы*, **19**:1 (2015), 23–34.

[3] Мастихина А.А., "О частичном угадывании сверхслов", *Интеллектуальные системы*, **11**:1–4 (2007), 561–572.

[4] Мастихина А.А., "Критерий частичного предвосхищения общерегулярных свехсобытий", *Дискретная математика*, **23**:4 (2011), 103–114.

[5] Ведерников И.К., "Исследование алгоритма, задающего функцию выхода прогнозирующего автомата", *Интеллектуальные системы*, **20**:3 (2016), 103–111.

[6] Ведерников И.К., “Критерий почти полного прогнозирования сверхслова в многозначном алфавите”, *Интеллектуальные системы*, **23**:2 (2019), 87–103.

[7] Ведерников И.К., “О верхней оценке степени частичного прогнозирования общерегулярных сверхсобытий”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2019, № 5, 10–16.

[8] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.

A class of machine sufficient for optimal prediction of general regular super-events

Vedernikov I.K.

The machine predicts the next character of the input sequence if it outputs that character the moment before.

The paper considers the machine class contraction for the task of predicting an arbitrary general regular super-event in the multivalued alphabet. The class of machine sufficient for the predicting problem is obtained in this paper. In addition, the transition from the estimations of simple super-events to the estimations of the complex super-events is proved with the help of the class aforementioned.

Keywords: predicting machine, prediction of superwords by a machine, general regular super-events.