Короткие единичные диагностические тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов

Попков К.А.[1]

Доказано, что почти любую булеву функцию от n переменных можно реализовать неизбыточной двухполюсной контактной схемой, допускающей единичный диагностический тест длины 8 относительно обрывов и замыканий контактов.

Ключевые слова: контактная схема, булева функция, обрыв контакта, замыкание контакта, единичный диагностический тест.

1. Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. (Слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать.) Логический подход к тестированию контактных схем предложен С.В. Яблонским и И.А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$,

[1] *Попков Кирилл Андреевич* — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: kirill-formulist@mail.ru.

Popkov Kirill Andreevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.

получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3, 4, 5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* (см. [5, с. 110–111]), т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

В дальнейшем будем считать, что в схемах могут происходить как обрывы, так и замыкания контактов независимо друг от друга.

Пусть множество T является единичным диагностическим тестом (ЕДТ) для некоторой контактной схемы S. Введём следующие обозначения: $D_{\text{ЕД}}(T)$ — длина теста T; $D_{\text{ЕД}}(S) = \min D_{\text{ЕД}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕДТ T для контактной схемы S; $D_{\text{ЕД}}(f) = \min D_{\text{ЕД}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным контактным схемам S, реализующим функцию f; $D_{\text{ЕД}}(n) = \max D_{\text{ЕД}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{\text{ЕД}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕДТ. По аналогии с функциями $D_{\text{ЕД}}$ можно ввести функции $D_{\text{ЕП}}$, $D_{\text{ПП}}$ и $D_{\text{ПД}}$ для соответственно единичного проверяющего теста (ЕПТ), полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D_{\text{ПП}}(f)$ и $D_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем). Так, например, $D_{\text{ПП}}(n)$ — функция Шеннона длины полного проверяющего теста.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных*, если отношение числа булевых функций от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т.е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Перечислим основные результаты, касающиеся задачи синтеза легкотестируемых контактных схем при рассматриваемых неисправностях. В [5, с. 113, теорема 9] с использованием идей С.В. Яблонского установлено, что функция $D_{\text{ЕД}}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$. Х.А. Мадатян в [6] доказал равенство $D_{\text{ПД}}(n) = 2^n$. Н.П. Редькин в [7] получил оценку $D_{\text{ПП}}(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$. Из утверждения 2) теоремы 1 работы [8] следует, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ вида $\varphi(\tilde{x}^{n-1}) \oplus x^n$, где $\varphi(\tilde{x}^{n-1})$ — произвольная неконстантная булева функция, существует неизбыточная контактная схема, содержащая, помимо переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, дополнительную входную переменную x_0, допускающая ЕПТ длины $4n + 8$ и реализующая булеву функцию, не зависящую существенно от переменной x_0 и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. В работе [9], в частности, доказано (теорема 4), что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ существует неизбыточная контактная схема, содержащая не более пяти дополнительных входных переменных, допускающая ЕПТ длины не более 35 и реализующая такую булеву функцию, что $f(\tilde{x}^n)$ получается из неё подстановкой вместо этих дополнительных переменных некоторых булевых констант. В [10] установлено, что для почти всех булевых функций f от n переменных $D_{\text{ЕП}}(f) = 4$, а также описаны все булевы функции f, для которых величина $D_{\text{ЕП}}(f)$ равна 0, 1, 2 и 3.

В настоящей работе будет описан достаточно обширный класс булевых функций f, для которых $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$ (теорема 2); будет показано, что в этом классе содержатся почти все булевы функции от n переменных (теорема 3).

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть для булевой функции $h(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существуют такой индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ и такие булевы константы $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, что*

$$h(\tilde{\pi}_1) = h(\tilde{\pi}_2) = 1,$$
$$h(\tilde{\pi}_3) = h(\tilde{\pi}_4) = 0,$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{\pi}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),\\
\tilde{\pi}_2 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n),\\
\tilde{\pi}_3 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),\\
\tilde{\pi}_4 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n).
\end{gathered}$$

Тогда функцию $h(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4\}$.

Теорема 1 несложным образом вытекает из доказательства неравенства $D(f) \leqslant 4$ в теореме 2 работы [10], а также из перехода от множества T_1 к множеству T_2 в доказательстве леммы 1 той же работы.

Всюду ниже считаем, что запись вида $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_2}$ или $\overline{\alpha}_{i_1}, \ldots, \overline{\alpha}_{i_2}$ при $i_1 > i_2$ обозначает пустую строку.

Теорема 2. *Пусть для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существуют такие индексы $j, s \in \{1, \ldots, n\}$, $j < s$, и такие булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что*

$$f(\tilde{\rho}_1) = f(\tilde{\rho}_2) = f(\tilde{\rho}_3) = f(\tilde{\rho}_4) = 1, \tag{1}$$

$$f(\tilde{\rho}_5) = f(\tilde{\rho}_6) = f(\tilde{\rho}_7) = f(\tilde{\rho}_8) = 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{\rho}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\\
\tilde{\rho}_2 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n),\\
\tilde{\rho}_3 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n),\\
\tilde{\rho}_4 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{j-1}, \alpha_j, \overline{\alpha}_{j+1}, \ldots, \overline{\alpha}_{s-1}, \alpha_s, \overline{\alpha}_{s+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n),\\
\tilde{\rho}_5 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n),\\
\tilde{\rho}_6 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{j-1}, \alpha_j, \overline{\alpha}_{j+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n),\\
\tilde{\rho}_7 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n),\\
\tilde{\rho}_8 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{s-1}, \alpha_s, \overline{\alpha}_{s+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n).
\end{gathered}$$

Тогда $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.

Доказательство. Пусть i_1, i_2, i_3, i_4 — произвольные попарно различные индексы от 1 до 8. Обозначим через $I_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\tilde{x}^n)$ булеву функцию, равную

1 на наборах $\tilde{\rho}_{i_1}, \tilde{\rho}_{i_2}, \tilde{\rho}_{i_3}, \tilde{\rho}_{i_4}$ и равную 0 на всех остальных наборах длины n. Положим

$$f_1 = f \oplus I_{3478}, \tag{3}$$

$$f_2 = f \oplus I_{3456}, \tag{4}$$

$$f_3 = f \oplus I_{1278}, \tag{5}$$

$$f_4 = f \oplus I_{1256}. \tag{6}$$

Составим таблицу значений функций $f_1(\tilde{x}^n), f_2(\tilde{x}^n), f_3(\tilde{x}^n), f_4(\tilde{x}^n)$ на наборах $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8$. Для этого используем соотношения (1)–(6): например,

$$f_1(\tilde{\rho}_1) = f(\tilde{\rho}_1) \oplus I_{3478}(\tilde{\rho}_1) = 1 \oplus 0 = 1.$$

	$\tilde{\rho}_1$	$\tilde{\rho}_2$	$\tilde{\rho}_3$	$\tilde{\rho}_4$	$\tilde{\rho}_5$	$\tilde{\rho}_6$	$\tilde{\rho}_7$	$\tilde{\rho}_8$
f_1	1	1	0	0	0	0	1	1
f_2	1	1	0	0	1	1	0	0
f_3	0	0	1	1	0	0	1	1
f_4	0	0	1	1	1	1	0	0

Применяя теорему 1 при $h = f_1$, $i = j$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S_1, допускающей ЕПТ $T_1 = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$.

Применяя теорему 1 при $h = f_2$, $i = s$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S_2, допускающей ЕПТ $T_2 = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$.

Применяя теорему 1 при $h = f_3$, $i = s$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_3(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S_3, допускающей ЕПТ $T_3 = \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$.

Применяя теорему 1 при $h = f_4$, $i = j$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_4(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S_4, допускающей ЕПТ $T_4 = \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$.

Соединим последовательно схемы S_1 и S_2, а также схемы S_3 и S_4. Полученные две схемы соединим параллельно. Обозначим итоговую схему через S. Докажем, что данная схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для любого $i \in \{1, \ldots, 8\}$ на наборе

$\tilde{\rho}_i$ она выдаёт значение $f_1(\tilde{\rho}_i)f_2(\tilde{\rho}_i) \vee f_3(\tilde{\rho}_i)f_4(\tilde{\rho}_i)$, которое, как нетрудно видеть из таблицы, равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } i \geqslant 5, \end{cases}$$

и в силу (1), (2) равно $f(\tilde{\rho}_i)$. В то же время, на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины n, не принадлежащем множеству $T = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$, подсхема S_m, $m = 1, 2, 3, 4$, выдаёт значение

$$f_m(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \oplus I_{\ldots}(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \oplus 0 = f(\tilde{\tau}), \tag{7}$$

а схема S — значение

$$f_1(\tilde{\tau})f_2(\tilde{\tau}) \vee f_3(\tilde{\tau})f_4(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}).$$

Тем самым доказано, что схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем теперь, что данная схема неизбыточна, а множество T является для неё ЕДТ. Предположим, что имеет место неисправность (обрыв или замыкание) произвольного одного контакта схемы S. Пусть при этом неисправный контакт содержится в подсхеме S_m для некоторого $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Множество T_m является ЕПТ для неизбыточной схемы S_m, поэтому существует такой набор $\tilde{\rho} \in T_m$, что при указанной неисправности подсхема S_m выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ «неправильное» значение $\overline{f}_m(\tilde{\rho})$. Вместе с тем, для любого $m' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{m\}$ подсхема $S_{m'}$ выдаёт на этом наборе «правильное» значение $f_{m'}(\tilde{\rho})$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $m = 1$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $\overline{f}_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 1-й, 2-й, 5-й и 6-й столбцы таблицы, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 0, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2\}, \\ 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 1 = 1, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}, \end{cases}$$

и в силу (1), (2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

2. Пусть $m = 2$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})\overline{f}_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 1-й, 2-й, 7-й и 8-й столбцы таблицы, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 0 = 0, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2\}, \\ 1 \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 = 1, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}, \end{cases}$$

и в силу (1), (2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

3. Пусть $m = 3$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee \overline{f}_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 3-й, 4-й, 5-й и 6-й столбцы таблицы, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 = 0, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4\}, \\ 0 \cdot 1 \vee 1 \cdot 1 = 1, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}, \end{cases}$$

и в силу (1), (2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

4. Пусть $m = 4$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})\overline{f}_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 3-й, 4-й, 7-й и 8-й столбцы таблицы, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 = 0, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4\}, \\ 1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 1, & \text{если } \tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}, \end{cases}$$

и в силу (1), (2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

В каждом из случаев 1–4 установлено, что на наборе $\tilde{\rho} \in T_m \subset T$ схема S выдаёт значение $\overline{f}(\tilde{\rho})$, отличное от значения $f(\tilde{\rho})$, выдаваемого этой схемой при отсутствии в ней неисправностей. Тем самым доказано, что схема S неизбыточна, а множество T является для неё ЕПТ.

Далее, на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины n, не принадлежащем множеству T, при рассматриваемой неисправности подсхема S_m выдаёт некоторое значение $a_{\tilde{\tau}} \in \{0, 1\}$, а подсхема $S_{m'}$ — «правильное» значение $f_{m'}(\tilde{\tau})$, равное $f(\tilde{\tau})$ в силу (7), для любого $m' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{m\}$. Тогда схема S выдаёт на данном наборе значение

$$a_{\tilde{\tau}} f(\tilde{\tau}) \vee f(\tilde{\tau}) f(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}).$$

Таким образом, значение любой функции неисправности схемы S на любом двоичном наборе длины n, не принадлежащем множеству T, совпадает со значением функции f на этом наборе. Поэтому любые две различные функции неисправности данной схемы могут различаться только на наборах из множества T и обязаны различаться хотя бы на одном наборе из этого множества, откуда вытекает, что T — ЕДТ для схемы S.

В итоге получаем, что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой S, допускающей ЕДТ T длины 8. Следовательно,

$$D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant D_{\text{ЕД}}(S) \leqslant D_{\text{ЕД}}(T) = 8.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Теорема 3. *Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо неравенство $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 4$. Нетрудно заметить, что множество всех двоичных наборов длины n можно разбить на 2^{n-3} попарно непересекающихся упорядоченных восьмёрок наборов

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}} = ((&\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},1,1,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},0,0,0),\\ (&\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},0,0,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},1,1,0),\\ (&\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},0,1,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},1,0,0),\\ (&\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},1,0,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},0,1,0)),\end{aligned}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}$ — булевы константы, образующие все возможные комбинации (для краткости обозначим данные восемь наборов через $\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}}, \tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}}, \ldots, \tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}$ соответственно, где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3})$). Пусть F_n — множество булевых функций от n переменных, не принимающих ни на одной из этих восьмёрок наборов ни одну из восьмёрок значений $(1,1,1,1,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1,1,1,1)$. Любая булева функция $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству F_n, удовлетворяет либо соотношениям

$$\begin{aligned} f(\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_3^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_4^{\tilde{\alpha}}) = 1,\\ f(\tilde{\rho}_5^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_6^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_7^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}) = 0,\end{aligned}$$

либо соотношениям

$$\begin{aligned} f(\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_3^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_4^{\tilde{\alpha}}) = 0,\\ f(\tilde{\rho}_5^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_6^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_7^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}) = 1\end{aligned}$$

для некоторых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3} \in \{0,1\}$. Тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 при $j = n-3$, $s = n-2$, $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 1$ и некотором $\alpha_{n-2} \in \{0,1\}$, поэтому $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.

Найдём мощность множества F_n. На каждой из 2^{n-3} восьмёрок наборов $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}}$ любая функция из этого множества может принимать любую из $2^8 - 2 = 254$ восьмёрок значений. Следовательно, $|F_n| = 254^{2^{n-3}}$. Тогда

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{254^{2^{n-3}}}{256^{2^{n-3}}} = \left(\frac{127}{128}\right)^{2^{n-3}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено неравенство $D_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$, откуда следует справедливость теоремы 3. $\square$

3. Заключение

Описанный в работе для почти всех булевых функций от n переменных метод синтеза реализующих их контактных схем, допускающих единичные диагностические тесты длины 8 относительно обрывов и замыканий контактов, ввиду малой длины тестов, а значит, малого времени, необходимого для тестирования таких схем, может найти практическое применение. Вместе с тем, пока не удалось получить единой верхней оценки длины минимального единичного диагностического теста для **любой** булевой функции от n переменных, т.е. верхней оценки величины $D_{\text{ЕД}}(n)$, улучшающей оценку $D_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ из [5, с. 113, теорема 9]. Представляет интерес также изучение возможностей реализации всех или почти булевых функций от n переменных контактными схемами, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно обрывов и замыканий не более k контактов, где $k \geqslant 2$ — заданное натуральное число.

Список литературы

[1] Лупанов О.Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1984, 138 с.

[2] Чегис И.А., Яблонский С.В., “Логические способы контроля работы электрических схем”, *Труды МИАН*, **51** (1958), 270–360

[3] Яблонский С.В., “Надёжность и контроль управляющих систем”, *Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.)*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1986, 7–12.

[4] Яблонский С.В., “Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем”, *Математические вопросы кибернетики. Вып. 1*, Наука, Москва, 1988, 5–25.

[5] Редькин Н.П., *Надёжность и диагностика схем*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1992, 192 с.

[6] Мадатян Х.А., “Полный тест для бесповторных контактных схем”, *Проблемы кибернетики. Вып. 23*, Наука, Москва, 1970, 103–118.

[7] Редькин Н.П., “О полных проверяющих тестах для контактных схем”, *Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Вып. 39*, Изд-во ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1983, 80–87.

[8] Романов Д.С., “О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты”, *Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки*, **156**:3 (2014), 110–115.

[9] Романов Д.С., Романова Е.Ю., “О единичных проверяющих тестах для схем переключательного типа”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2015, № 1, 5–23.

[10] Попков К.А., “Короткие единичные проверяющие тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:3 (2019), 97–130.

Short single diagnostic tests for contact circuits under breaks and closures of contacts

Popkov K.A.

We prove that almost any Boolean function on n variables can be implemented by an irredundant two-pole contact circuit allowing a single diagnostic test of length 8 regarding breaks and closures of contacts.

Keywords: contact circuit, Boolean function, contact break, contact closure, single diagnostic test.