Корректность конструктивной теории множеств без аксиомы объемности относительно семантики арифметической реализуемости, основанной на гиперарифметических видах

Коновалов А.Ю.[1]

Определяется семантика арифметической реализуемости для формул языка теории множеств, основанная на гиперарифметических видах. Доказывается корректность конструктивной теории множеств без аксиомы объемности относительной этой семантики.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, арифметическая реализуемость, аксиоматическая теория множеств, гиперарифметические виды.

В интуиционистской математике одним из аналогов понятия множества является *вид* как точно сформулированное условие, которому могут удовлетворять некоторые математические объекты (см. [1]), называемые в этом случае *членами* вида. В работе [2] мы определили конструктивную семантику для языка теории множеств, основанную на гиперарифметических видах. В настоящей статье мы рассмотрим модификацию этой семантики, в которой роль вычислимых функций играют арифметические функции.

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит функциональные символы для всех примитивно-рекурсивных функций,

[1] *Коновалов Александр Юрьевич* — к.ф.-м.н., младший научный сотрудник лаборатории математических проблем искусственного интеллекта мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: alexandr.konoval@gmail.com.

Konovalov Alexander Yurievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Mathematical Problems of Artificial Intelligence.

а также константы для всех натуральных чисел. Атомарные формулы (атомы) языка LA суть выражения $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы. Более сложные формулы языка LA строятся обычным образом из атомов при помощи логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ и кванторов $\exists$, $\forall$.

Пусть фиксировано натуральное число $n \geq 1$. *Униформизацией* формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка LA, не содержащей параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (\forall z < y) \neg\Phi(x_1, \ldots, x_n, z),$$

обозначаемую так: $\Phi^U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, где $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, если и только если $\mathbb{N} \models \Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$, т. е. формула $\Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$ истинна в стандартной интерпретации. Пусть фиксирована геделева нумерация всех формул языка LA. Формулу с геделевым номером z обозначаем Φ_z. Через I_n обозначаем множество геделевых номеров формул языка L, не содержащих параметров отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$. Если $z \in I_n$, то посредством φ_z^n обозначим n-местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_z^U. Отметим, что всякая n-местная частичная функция, определимая в языке LA, имеет вид φ_z^n для некоторого $z \in I_n$. Если φ — n-местная частичная функция, и $k_1, \ldots, k_n$ — натуральные числа, то тот факт, что определено $\varphi(k_1, \ldots, k_n)$, обозначаем так: $!\varphi(k_1, \ldots, k_n)$.

Отношения на множестве натуральных чисел, принадлежащие классу Π_1^1 аналитической иерархии [3, §16.1], назовем Π_1^1-предикатами. Из [3, §16.1, теорема V] следует, что найдется такой Π_1^1-предикат $U(z, x_1, x_2)$, который является универсальным для класса всех 2-местных Π_1^1-предикатов. Натуральное число z назовем Π_1^1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если имеет место $P(x_1, x_2) \iff U(z, x_1, x_2)$. Будем говорить, что отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ является гиперарифметическим, если $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ суть Π_1^1-предикаты. Натуральное число z назовем Δ_1^1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если $z = \mathsf{c}(z_1, z_2)$, где z_1 — Π_1^1-индекс отношения $\neg P(x_1, x_2)$, а z_2 — Π_1^1-индекс отношения $P(x_1, x_2)$. Пусть J — множество всех Δ_1^1-индексов всех 2-местных гиперарифметических отношений, а $D_z(x_1, x_2)$ — гиперарифметическое отношение, Δ_1^1-индекс которого есть z.

Посредством трансфинитной индукции для каждого ординала α определим множество Δ_α следующим образом:

$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in J \mid \neg\,\exists s\,\exists x\, D_z(s,x)\},\ \text{если } \alpha = 0;$$
$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in J \mid \forall s, x\,(D_z(s,x) \to x \in \Delta_\beta)\},\ \text{если } \alpha = \beta + 1;$$
$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \bigcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta,\ \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Через Δ обозначим объединение всех множеств Δ_α, для которых ординал α конечен либо счетен.

Формулы языка теории множеств строятся из предметных переменных, констант элементов множества Δ, двухместных предикатных символов $=$ и $\in$, логических констант $\bot, \top$, логических связок $\wedge, \vee, \to$, кванторов $\forall, \exists$ и скобок по обычным правилам. При записи формул будем использовать следующие сокращения:

- $\neg\Phi \rightleftharpoons \Phi \to \bot$;
- $\exists x{\in}t\ \Phi(x) \rightleftharpoons \exists x(x{\in}t \wedge \Phi(x))$;
- $\forall x{\in}t\ \Phi(x) \rightleftharpoons \forall x(x{\in}t \to \Phi(x))$;
- $\forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightleftharpoons \forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \to \Psi) \wedge \forall x_1, \ldots, x_n(\Psi \to \Phi)$.

Формулами с ограниченными кванторами будем называть такие формулы языка языка теории множеств, в которых все вхождения квантора $\forall$ имеют вид $\forall x{\in}t\ \Phi$, а квантора $\exists$ — $\exists x{\in}t\ \Phi$.

Фиксируем примитивно рекурсивную взаимно-однозначную функцию c, кодирующую пары натуральных чисел натуральными числами. Тогда одноместные обратные функции p_1 и p_2, где $\mathsf{p}_1(x)$ и $\mathsf{p}_2(x)$ суть первая и вторая компоненты пары с кодом x, т. е. $\mathsf{c}(\mathsf{p}_1(x), \mathsf{p}_2(x)) = x$, также примитивно рекурсивны.

Для всякого натурального числа e и произвольной замкнутой формулы Φ языка теории множеств определим отношение «e арифметически реализует Φ» (обозначение: $e\ \mathbf{r}\ \Phi$) следующим индуктивным образом:

- $e\ \mathbf{r}\ (a = b) \rightleftharpoons a = b$;
- $e\ \mathbf{r}\ (a \in b) \rightleftharpoons D_b(e, a)$;
- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi)$;

- $e \mathbf{r} \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \in \Delta$ и $\mathsf{p}_2 e \mathbf{r} \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

- $e \mathbf{r} \forall x_1, \ldots, x_n\, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons [e \in I_{n+1}$ и для всех[1] натуральных чисел s и $a_1, \ldots, a_n \in \Delta$, если $s \mathbf{r} \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то $!\varphi_e^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s)$ и верно $\varphi_e^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s) \mathbf{r} \Psi(a_1, \ldots, a_n)]$, при этом список переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть пустым;

- $e \mathbf{r} \forall x_1, \ldots, x_n\, \Phi(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons [e \mathbf{r} \forall x_1, \ldots, x_n\, (\top \to \Phi(x_1, \ldots, x_n))]$, если список переменных $x_1, \ldots, x_n$ непуст, формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что замкнутая формула Φ языка теории множеств является *арифметически реализуемой*, если найдется такое натуральное число e, что имеет место $e \mathbf{r} \Phi$.

В работе [4] П. Ацель определил интуиционистскую теорию CZF. Аксиомы и схемы аксиом теории CZF суть следующие:

$$\forall x, y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y); \tag{Ext}$$

$$\exists z\, \forall x\, (x \in z \to \bot); \tag{$\varnothing$}$$

$$\forall x\, \exists z\, (x \in z \wedge \forall u{\in}z\, \exists u'{\in}z\, \forall y\, (y \in u' \leftrightarrow y = u)); \tag{Inf}$$

$$\forall x, y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)); \tag{Pair}$$

$$\forall x\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow \exists y\, (y \in x \wedge u \in y)); \tag{Un}$$

$$\forall x\, (\forall u{\in}x\, \Phi(u) \to \Phi(x)) \to \forall x\, \Phi(x), \tag{Ind}$$

$$\forall x\, [\forall v{\in}x\, \exists u\, \Phi(v, u) \to \exists y\, (\forall v{\in}x\, \exists u{\in}y\, \Phi(v, u) \wedge \forall u{\in}y\, \exists v{\in}x\, \Phi(v, u))]; \tag{StrColl}$$

$$\begin{aligned}&\forall x, y\, \exists z\, \forall w\, [\forall v{\in}x\, \exists u{\in}y\, \Phi(v, u, w) \to \\ &\quad \to \exists y'{\in}z\, (\forall v{\in}x\, \exists u{\in}y'\, \Phi(v, u, w) \wedge \forall u{\in}y'\, \exists v{\in}x\, \Phi(v, u, w))];\end{aligned} \tag{SubsetColl}$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \Phi(u)). \tag{BoundSep}$$

При этом в схеме аксиом (BoundSep) предполагается, что $\Phi(u)$— формула с ограниченными кванторами.

Пусть i — натуральное число, удовлетворяющее соотношению $\varphi_{\mathsf{i}}^2(x, s) \simeq s$, и пусть a и b суть различные Δ_1^1-индексы пустого 2-местного отношения. Тогда a, $b \in \Delta_0$ и натуральное число $\mathsf{c}(\mathsf{i}, \mathsf{i})$ арифметически

[1] Однако, если в списке $x_1, \ldots, x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1, \ldots, a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

реализует формулу $\forall z\,(z \in a \leftrightarrow z \in b)$. При этом формула $(a = b)$ не является арифметически реализуемой. Таким образом, аксиома (Ext) не является арифметически реализуемой. Обозначим через CZF^- теорию CZF без аксиомы (Ext). Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Все аксиомы теории* CZF^- *являются арифметически реализуемыми.*

Список литературы

[1] А. Гейтинг, *Интуиционизм*, Мир, М., 1965.

[2] А. Ю. Коновалов, "Семантика реализуемости для конструктивной теории множеств, основанная на гиперарифметический предикатах", *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2017, №3, 59–62.

[3] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, М., 1972.

[4] P. Aczel, "The type theoretic interpretation of constructive set theory", *Log. Coll.*, **77** (1978), 55–66.

The non-extensional constructive set theory is sound with respect to the sematics of the arithmetic realizability based on hyperarithmetic sorts

Konovalov A.Yu.

A semantics of the arithmetical realizability based on hyperarithmetical sorts for formulas of the language of set theory is introduced. It is proved that constructive set theory without the extensionality axiom is sound with this semantics.

Keywords: constructive semantics, realizability, arithmetical realizability, axiomatic set theory, hyperarithmetical sorts.