

О сокращении нелинейной глубины сверточных нейронных схем

Хапкин А.В.¹

В работе рассматриваются одномерные сверточные схемы в базе Маккалока-Питтса. Показано, что рассматриваемые схемы могут быть реализованы схемой из априорной и динамической части, в которой вычисления в априорной части не зависят от входных данных. При этом априорная и динамическая части имеют нелинейную глубину, равную 2.

Ключевые слова: сверточная нейронная сеть, нейронная схема, нелинейная сложность, модель Маккалока-Питтса.

1. Введение.

Сверточная нейронная сеть - специальная архитектура нейронных сетей, предложенная Яном Лекуном в 1988 году [1]. Основная идея таких сетей - последовательное использование сверточных слоев и субдискретизирующих слоёв, что от слоя к слою позволяет переходить ко все более и более высоким абстракциям, при этом на последних слоях выделяются признаки очень высокого уровня. Сеть в процессе обучения самонастраивается и учится сама выбирать такие детали путем фильтра маловажных деталей и выделения существенных. Основными преимуществами сверточных нейронных сетей являются не очень большое количество настраиваемых параметров по сравнению с обычными полносвязными сетями, удобное распараллеливание вычислений, что позволяет использовать для вычисления графические процессоры, относительная устойчивость к повороту и сдвигу исходных данных. Сверточные сети активно

¹Хапкин Артем Владимирович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: 9880817@mail.ru.

Khapkin Artyom Vladimirovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

применяются в задачах компьютерного зрения - распознавании образов, детекции объектов, также такие сети используются для распознавания речи, обработки аудиосигналов и анализа временных рядов.

Поэтому нужно уметь оптимизировать работу сверточных нейронных сетей, особенно важно уметь обходиться сетями с не очень большой нелинейной глубиной, так как в таком случае вытекает ряд преимуществ - это позволяет ускорять время работы сетей, делать сети более интерпретируемыми.

В данной работе рассматриваются сверточные одномерные нейронные схемы. ([2], [3]) в модели Маккалока-Питтса [4]. Выполняется разложение этих сетей на динамическую и априорную части, при этом вычисления априорной части не зависят от входных данных. Минимизируется нелинейная глубина каждой из этих частей.

2. Основные понятия и определения.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ - алфавит входных переменных. Введем следующие функции:

1) постоянная функция $g_c \equiv c, c \in \mathbb{R}$

2) сумматор $\Sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_i \in \mathbb{R}$

3) усилитель $f_\gamma(x) = \gamma x, \gamma, x \in \mathbb{R}$

4) функция Хевисайда, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

5) функция $F(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & x_2 \geq 0 \\ 0, & x_2 < 0 \end{cases}$

Множество таких функций обозначим за Δ' .

По аналогии с автоматными схемами [5] определим схемы из функциональных элементов.

Каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно сопоставить графический объект S с n входными стрелками и одной выходной стрелкой

(коротко входы и выход S). Входам объекта S приписаны слева направо переменные x_1, x_2, \dots, x_n .

Элементы из Δ' изображаются следующим образом:

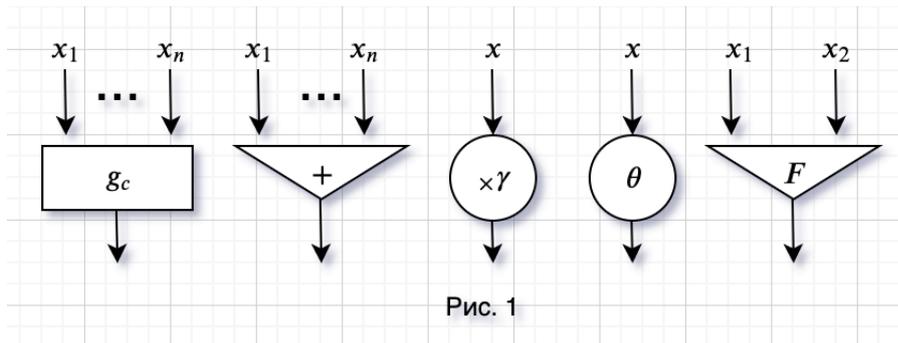


Рис. 1

Графический объект и соответствующая ему функция из Δ' называются функциональными элементами. Теперь индуктивно определим нейронные схемы без памяти. Функциональные элементы из 1-5 - нейронные схемы без памяти. Используя операции суперпозиции [6], а именно операции добавления фиктивного входа, изъятие фиктивного входа, склеивание ходов, переименование ходов без склеивания и последовательное соединение над функциональными элементами, индуктивно определяются нейронные схемы без памяти.

Если функция F реализуется нейронной схемой S , то в этом случае будем использовать запись (S, F) . При этом элементы θ и F называются нелинейными, остальные элементы называются линейными. Множество функций $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, реализуемых нейронными схемами без памяти, будем обозначать \mathbb{L} . В работе [6] показано, что множество \mathbb{L} совпадает с множеством кусочно-линейных функций PL .

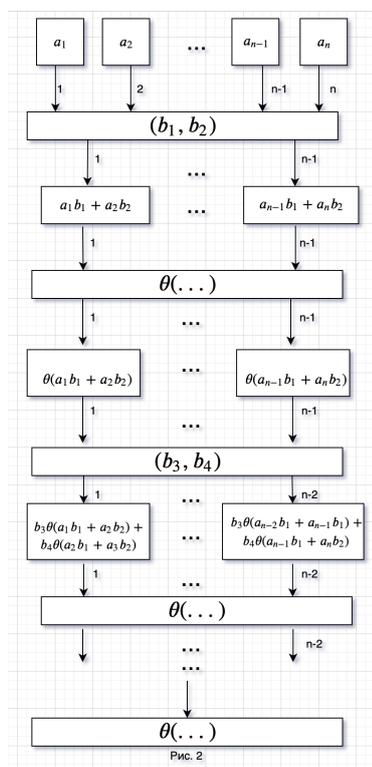
Число элементов в схеме называется сложностью нейронной схемы. Число нелинейных элементов в схеме называется нелинейной сложностью нейронной схемы.

Путем в нейронной схеме называется последовательность функциональных элементов G_1, G_2, \dots, G_k , где вход G_1 является входом схемы, выход G_k является выходом схемы, и для любого $i, i = 1 \dots k - 1$ выход G_i является входом

G_{i+1} . Нелинейной длиной пути называется число нелинейных элементов, содержащихся в нем. Нелинейной глубиной нейронной схемы называется длина самого длинного пути в ней.

Две нейронные схемы эквивалентны, если они реализуют одну и ту же функцию. В работе [6] показано, что для любой нейронной схемы без памяти существует эквивалентная ей схема с нелинейной глубиной 2.

Пусть имеется схема с n входами и одним выходом, в котором последовательно применяются операции свертки и Хевисайда. Приведем ее изображение:



В этой схеме последовательно применяются операции свертки к каждой соседней паре элементов (применяются две операции усилителя и затем одна операция сумматора между ними) и последующем применении функции Хевисайда к ним. К полученному выходу повторяем такую же последовательность операций. Последовательное применение операций свертки и функции Хевисайда будем называть одним сверточным

слоем нейронной схемы. Приведенная схема содержит $n - 1$ сверточных слоев.

В результате таких операций размер входа на каждом последующем слое будет уменьшаться на 1, и в финале у схемы получится только один выход. Полученная нелинейная глубина такой схемы будет равна $n - 1$, так как количество блоков с функцией Хевисайда здесь (длина пути) равно $n - 1$.

Такую схему назовем одномерной сверточной схемой в базисе Маккалока-Питтса.

Нетрудно видеть, что приведенная схема на рис.2 имеет нелинейную глубину $n - 1$. Распишем подробнее, что происходит в процессе вычисления схемы на рис.2.

1. Выходы первого сверточного слоя нейронной схемы (которые передаются на вход второму слою):

$$(\theta(a_1b_1 + a_2b_2), \dots, \theta(a_{n-1}b_1 + a_nb_2)) \quad (1)$$

2. Выходы второго сверточного слоя нейронной схемы (которые передаются на вход третьему слою):

$$\begin{aligned} &(\theta((b_3\theta(a_1b_1 + a_2b_2) + b_4\theta(a_2b_1 + a_3b_2)), \dots, \\ &\theta(b_3\theta(a_{n-2}b_1 + a_{n-1}b_2) + b_4\theta(a_{n-1}b_1 + a_nb_2))) \end{aligned} \quad (2)$$

Далее идет третий сверточный слой с (b_5, b_6) , и так до конца до тех пор, пока у последнего сверточного слоя останется один выход.

3. Преобразование нейронной схемы в явном виде.

3.1. Преобразования схем для сокращения нелинейной глубины.

Введем операцию конъюнкции \wedge . В дальнейшем она будет использоваться на элементах, принимающих значения $\{0, 1\}$. Такая операция выражается через базис Маккалока-Питтса. Нетрудно видеть, что верна следующая лемма:

Лемма 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$, имеет место следующее равенство: $\theta(x_1) \wedge \theta(x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n) = \theta(x_1 + x_2 + \dots + x_n - n)$, где $x_i \in \{0, 1\}$.

3.1.1. Случай $n=3$.

Выпишем в общем виде структуру одномерной сверточной сети в базисе Маккалока-Питтса для $n = 3$.

1. Значение после первой операции свертки.

$$(a_1b_1 + a_2b_2, a_2b_1 + a_3b_2) \quad (3)$$

2. Значение после первой операции Хевисайда.

$$(\theta(a_1b_1 + a_2b_2), \theta(a_2b_1 + a_3b_2)) \quad (4)$$

3. Значение после второй операции свертки.

$$b_3\theta(a_1b_1 + a_2b_2) + b_4\theta(a_2b_1 + a_3b_2) \quad (5)$$

4. Значение после второй операции Хевисайда.

$$\theta(b_3(\theta(a_1b_1 + a_2b_2) + b_4\theta(a_2b_1 + a_3b_2))) \quad (6)$$

Видно, что нелинейная глубина такой схемы равна 2. Обозначим за a'_1 и a'_2 результаты первой операции Хевисайда - $\theta(a_1b_1 + a_2b_2)$, $\theta(a_2b_1 + a_3b_2)$ соответственно.

Этот результат может принимать 4 разных набора значений, и при каждом из таких наборов финальный ответ известен:

$$\begin{aligned} 0, 0 &\rightarrow 0, \\ 0, 1 &\rightarrow \theta(b_4), \\ 1, 0 &\rightarrow \theta(b_3), \\ 1, 1 &\rightarrow \theta(b_3 + b_4) \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что тогда исходную нейронную схему можно переписать в следующем виде:

$$(\theta(b_3) * a'_1 + \theta(b_4) * a'_2) * (1 - a'_1 a'_2) + \theta(b_3 + b_4) * a'_1 a'_2, \quad (8)$$

что проверяется непосредственно подстановкой. Смысл следующий - если попадаем в область $(1, 1)$, то используем правую часть, если не попадаем - то используем левую.

Упростим такую схему:

$$\begin{aligned}
& (\theta(b_3) * a'_1 + \theta(b_4) * a'_2) * (1 - a'_1 a'_2) + \theta(b_3 + b_4) * a'_1 a'_2 = \\
& \theta(b_3) * a'_1 + \theta(b_4) * a'_2 - \theta(b_3) * a'_1 a'_1 a'_2 - \theta(b_4) * a'_2 a'_1 a'_2 + \theta(b_3 + b_4) * a'_1 a'_2 = \\
& \theta(b_3) * a'_1 + \theta(b_4) * a'_2 + (\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4)) * a'_1 a'_2
\end{aligned} \tag{9}$$

Такое упрощение возможно, так как $(a'_1)^2 = a'_1$ и $(a'_2)^2 = a'_2$ - они всегда либо 0, либо 1.

Таким образом, мы переписали одномерную сверточную сеть с $n = 3$ в новом виде, и этот новый вид будет использоваться для сокращения нелинейной глубины при произвольном n .

3.1.2. Случай произвольного n .

Пользуясь аналогичными рассуждениями, разберем случай одномерной сверточной сети в базисе Маккалока-Питтса для произвольного n . В явном виде выпишем рекуррентные преобразования схемы, которые сократят нелинейную глубину до 2.

Выпишем преобразования схемы на рис.2 в более подробном виде:
Входной вектор:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Выходы первого сверточного слоя:

$$(\theta(a_1 b_1 + a_2 b_2), \theta(a_2 b_1 + a_3 b_2), \dots, \theta(a_{n-1} b_1 + a_n b_2))$$

Выходы второго сверточного слоя:

$$(\theta(b_3 \theta(a_1 b_1 + a_2 b_2) + b_4 \theta(a_2 b_1 + a_3 b_2)), \dots)$$

Далее, согласно преобразованиям из схемы на рис.2, спускаемся до выхода $n - 1$ слоя:

$$\theta(b_{2n-3} \theta(\dots) + (b_{2n-2} \theta(\dots)))$$

Как уже говорилось, после каждого сверточного слоя длина выхода следующего слоя будет по длине меньше на 1 чем предыдущего, и входом последнего слоя останутся 2 элемента, которые равны выходу предпоследнего сверточного слоя, обозначим их F_1^{n-2}, F_2^{n-2} .

Перед тем, как прийти к этим двум элементам, на предыдущем шаге всегда остается 3 элемента, а F_1^{n-2}, F_2^{n-2} получаются после свертки этих самых трех элементов и последующем применении функции Хевисайда. Обозначим эти три элемента за $F_1^{n-3}, F_2^{n-3}, F_3^{n-3}$. А каждый этот элемент получается на выходе сверточного слоя, вход которого составляют 4 предыдущих, и так далее, пока не дойдем до самого начала. Обозначим тогда за F_i^j элемент, который получается на свертке j , и который в векторе входов стоит на месте i .

Если переписать схему в терминах F_i^j , то получится следующее. Входной вектор:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Выходы первого сверточного слоя:

$$(F_1^1, F_2^1, \dots, F_{n-1}^1)$$

Выходы второго сверточного слоя:

$$(F_1^2, F_2^2, \dots, F_{n-2}^2)$$

...

Выходы $n - 2$ сверточного слоя:

$$(F_1^{n-2}, F_2^{n-2})$$

Выходы $n - 1$ сверточного слоя:

$$(F_1^{n-1})$$

Значения F_1^{n-2}, F_2^{n-2} определяются рекуррентными соотношениями, в явном виде выпишем их формулу. Слоем глубины 1 будут самые пер-

высшее значение F_i^1 .

$$F_1^1 = \theta(a_1 b_1 + a_2 b_2), F_2^1 = \theta(a_2 b_1 + a_3 b_2), \dots, F_{n-1}^1 = \theta(a_{n-1} b_1 + a_n b_2) \quad (10)$$

Далее до произвольного $1 \leq k < n$ на $k+1$ слое будут находиться следующие элементы:

$$\begin{aligned} F_1^{k+1} &= \theta(b_{2k+1}) * F_1^k + \theta(b_{2k+2}) * F_2^k + (\theta(b_{2k+1} + b_{2k+2}) - \theta(b_{2k+1}) - \\ &\quad - \theta(b_{2k+2})) * F_1^k F_2^k \\ F_2^{k+1} &= \theta(b_{2k+1}) * F_2^k + \theta(b_{2k+2}) * F_3^k + (\theta(b_{2k+1} + b_{2k+2}) - \theta(b_{2k+1}) - \\ &\quad - \theta(b_{2k+2})) * F_2^k F_3^k \\ &\quad \dots \\ F_{n-k-1}^{k+1} &= \theta(b_{2k+1}) * F_{n-k-1}^k + \theta(b_{2k+2}) * F_{n-k}^k + \\ &\quad + (\theta(b_{2k+1} + b_{2k+2}) - \theta(b_{2k+1}) - \theta(b_{2k+2})) * F_{n-k-1}^k F_{n-k}^k \end{aligned} \quad (11)$$

Последний $(n-1)$ слой F_1^{n-1} можно выразить через два предпоследних функциональных элемента F_1^{n-2}, F_2^{n-2} , формула сразу следует из приведенных выше преобразований.

$$\begin{aligned} F_1^{n-1} &= (\theta(b_{2n-3}) F_1^{n-2} + \theta(b_{2n-2}) F_2^{n-2}) + \\ &\quad (\theta(b_{2n-3} + b_{2n-2}) - \theta(b_{2n-3}) - \theta(b_{2n-2})) F_1^{n-2} F_2^{n-2} \end{aligned} \quad (12)$$

Финальный результат такой схемы можно представить не только через последний $n-1$ слой, но и через любой другой - достаточно подставлять слагаемые по формулам, и остановиться на нужном слое. Это наблюдение будем использовать в оценке нелинейной сложности схемы.

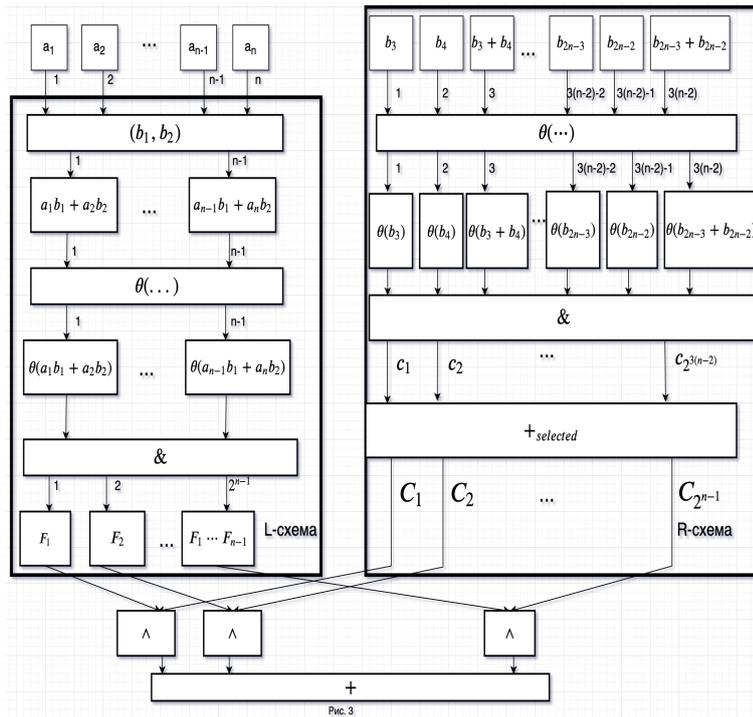
Для того, чтобы получить нелинейную глубину 2, нужно по формулам раскрыть такую сумму до первого уровня (F_i^1), и применить лемму 1.

Таким образом, в явном виде выписаны рекуррентные соотношения, которые позволяют для любой сверточной схемы без памяти с нелинейной глубиной n получить эквивалентную ей нейронную схему без памяти с нелинейной глубиной 2.

3.2. Разложение одномерных сверточных схем.

Если выразить результат вычисления схемы через $F_i^1, i = 1 \dots n - 1$, то получится линейная комбинация слагаемых, при этом каждое слагаемое состоит из 2 множителей - первый множитель равен в F_i^1 или их всевозможных произведений, а второе слагаемое является комбинацией сверток, кроме первой. Следовательно, каждый такой множитель можно посчитать отдельно, в дальнейшем изобразим такие схемы.

Под схемой $\&$ подразумеваем получение всевозможных произведений (конъюнкций) из переданных в этот блок элементов, под схемой $+_{selected}$ подразумевается получение определенных линейных комбинаций. Теперь изобразим, как выглядит вид такой схемы с нелинейной глубиной 2, на основе приведенных выше преобразований:



Здесь c_i - различные произведения операций Хевисайда на множестве $(b_3, b_4, b_3 + b_4, b_5, \dots, b_{2n-3}, b_{2n-2}, b_{2n-3} + b_{2n-2})$, а C_i - это определенные линейные комбинации таких операций Хевисайда, которые полу-

чаются при раскрытии нейронной схемы в явном виде. На выходах C_i схемы $+_{selected}$ реализуется конъюнкция с i подмножеством из функций $\{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\}$.

R -схемой назовем схему, реализующую комбинации сверток (априорная часть схемы, которая не зависит от исходных данных), а L -схемой назовем схему, реализующую преобразования с самими данными (динамическая часть схемы). LR -схемой назовем финальную комбинацию L и R -схемы, изображенную на рис.3.

По построению видно, нелинейная глубина R -схемы и L -схемы равна 2. Схема, изображенная на рис.3, имеет глубину 3, чтобы получить нелинейную глубину 2 после объединения R и L , нужно применить лемму 1.

Такой подход обладает интересным свойством - для новых данных нужно считать заново только преобразования из L -схемы, а преобразования R -схемы достаточно посчитать один раз, так как массивы сверток для разных массивов данных будет одинаков.

Также заметим, что полученную схему можно представить в другом виде - когда выходами L -схемы будут не F_i^1 и их всевозможные произведения, а F_i^k и их всевозможные произведения, где $1 < k < n$, а выходами R -схемы будут комбинации из меньшего числа сверток.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Любая одномерная сверточная сеть в базисе Маккалока-Питтса представляется в виде схемы нелинейной глубины 3, изображенной на рисунке 3.*

3.3. Пример для $n = 4$.

Приведем пример работы такого алгоритма понижения нелинейной глубины. Дан массив (a_1, a_2, a_3, a_4) и даны 3 ядра свертки $(b_1, b_2), (b_3, b_4), (b_5, b_6)$. При таком алгоритме в финальной схеме останутся $F_1^1 = \theta(a_1b_1 + a_2b_2), F_2^1 = \theta(a_2b_1 + a_3b_2), F_3^1 = \theta(a_3b_1 + a_4b_2)$ и также множители $F_1^1F_2^1, F_1^1F_3^1, F_2^1F_3^1, F_1^1F_2^1F_3^1$. Опустив расчеты, выпишем множители, стоящие перед каждым из таких слагаемых - результатом финальной схемы станет их сумма. Под умножением здесь понимается \wedge .

Перед F_1^1 : $\theta(b_5)\theta(b_3)$.

Перед F_2^1 : $\theta(b_5)\theta(b_4) + \theta(b_6)\theta(b_3) + (\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_4)\theta(b_3)$

Перед F_3^1 : $\theta(b_6)\theta(b_4)$

Перед $F_1^1 F_2^1$: $\theta(b_5)(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4)) + \theta(b_3)(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6)) +$
 $(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_3)$

Перед $F_2^1 F_3^1$: $\theta(b_4)(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4)) + \theta(b_6)(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6)) +$
 $(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_4)$

Перед $F_1^1 F_3^1$: $(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_3)\theta(b_4)$

Перед $F_1^1 F_2^1 F_3^1$: $(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))$

Тогда результатом будем следующая сумма:

$$\begin{aligned}
& F_1^1 \wedge \theta(b_5)\theta(b_3) + F_2^1 \wedge (\theta(b_5)\theta(b_4) + \theta(b_6)\theta(b_3) + \\
& \quad + (\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_4)\theta(b_3)) + \\
& + F_3^1 \wedge \theta(b_6)\theta(b_4) + F_1^1 F_2^1 \wedge (\theta(b_5)(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4)) + \\
& \quad + \theta(b_3)(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6)) + \\
& \quad (\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_3)) + \\
& \quad + F_2^1 F_3^1 \wedge (\theta(b_4)(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4)) + \\
& \quad + \theta(b_6)(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6)) + \\
& \quad (\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))(\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_4)) + \\
& \quad F_1^1 F_3^1 \wedge ((\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))\theta(b_3)\theta(b_4)) + \\
& + F_1^1 F_2^1 F_3^1 \wedge (\theta(b_5 + b_6) - \theta(b_5) - \theta(b_6))(\theta(b_3 + b_4) - \theta(b_3) - \theta(b_4))
\end{aligned} \tag{13}$$

4. Оценка нелинейной сложности полученных нейронных схем.

Будем оценивать нелинейную сложность схемы, изображенной на рис.3, для случая произвольного n .

Для значения F_1^{n-1} , вычисленного схемой, имеем:

$$F_1^{n-1} = (\theta(b_{2n-3})F_1^{n-2} + \theta(b_{2n-2})F_2^{n-2}) + (\theta(b_{2n-3} + b_{2n-2}) - \theta(b_{2n-3} - \theta(b_{2n-2}))F_1^{n-2}F_2^{n-2} \quad (14)$$

В F_1^{n-1} присутствуют F_1^{n-2} , F_2^{n-2} , $F_1^{n-2}F_2^{n-2}$ в которых по рекуррентным формулам, изложенным выше, присутствуют F_i^{n-3} и все их всевозможные произведения, а в них, в свою очередь, присутствуют F_i^{n-4} и их всевозможные произведения, и так далее.

Допустим, по рекуррентным формулам перешли к слою, на выходах которого присутствуют F_i^{n-k} и их всевозможные произведения. Выражением схемы будет сумма конъюнкций двух частей. Одна из них ответственна за исходные данные (F_i^{n-k} и их всевозможные произведения), другая от исходных входных данных никак не зависит.

Далее под финальным выражением схемы, изображенной на рис.3, понимаем результат, записанный через линейную комбинацию конъюнкций из сверток, которые не зависят от входного вектора, и F_i^{n-k} и их всевозможных произведений.

Докажем несколько лемм, которые пояснят характер каждой из этих частей.

Лемма 2. *В каждом слагаемом из суммы финального выражения обязательно будет множитель из множества F_i^{n-k} $i = 1, \dots, k$ и их всевозможных произведений.*

Доказательство. По построению - на самом финальном уровне есть F_1^{n-2} , F_2^{n-2} , $F_1^{n-2}F_2^{n-2}$, и далее по рекуррентным преобразованиям, изложенным выше, из них и будут появляться элементы F_i^{n-k} и их всевозможные произведения. \square

Лемма 3. *В каждом слагаемом из суммы финального выражения часть, которая не зависит от входного вектора, будет являться линейной комбинацией из результатов операции Хевисайда на следующем множестве:*

$$b_{2n-3}, b_{2n-2}, b_{2n-3} + b_{2n-2}, \dots, (b_{2n-(2k-1)}, b_{2n-(2k-1)}, b_{2n-(2k-2)} + b_{2n-(2k-2)}) \quad (15)$$

и их всевозможные произведения.

Доказательство. Доказательство по индукции.

На последнем слое $n - 1$ это верно. На слое $n - 2$ это также верно, так как в каждом множителе фигурируют элементы $\theta(b_{2n-3}), \theta(b_{2n-2}), \theta(b_{2n-3} + b_{2n-2})$. Допустим это верно для слоя $n - k$. Это значит, что каждая часть слагаемого, которая не зависит от исходного изображения, содержит в себе комбинации из следующего множества:

$$\begin{aligned} & (b_{2n-3}, b_{2n-2}, b_{2n-3} + b_{2n-2}), \dots, \\ & (b_{2n-(2k-1)}, b_{2n-(2k-2)}, b_{2n-(2k-1)} + b_{2n-(2k-2)}) \end{aligned} \quad (16)$$

и их всевозможные произведения. Обозначим такое множество за Θ^{n-k} .

На слое $n - k$ в финальной сумме в каждом слагаемом есть части F_i^{n-k} и их всевозможные произведения (по прошлой лемме). Части, которые не зависят от начальных данных, для таких множителей будут являться линейными комбинациями результатов операций Хевисайда на множестве Θ^{n-k} по предположению индукции.

Начинаем использовать основное преобразование. Для произвольного j , $1 \leq j < n - k$ верно следующее:

$$\begin{aligned} F_j^{n-k} &= \theta(b_{2n-(2k-3)}) * F_j^{n-k-1} + \theta(b_{2n-(2k-4)}) * F_{j+1}^{n-k-1} + \\ & (\theta(b_{2n-(2k-3)} + b_{2n-(2k-4)}) - \theta(b_{2n-(2k-3)}) - \theta(b_{2n-(2k-4)})) * F_j^{n-k-1} F_{j+1}^{n-k-1} \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно такому преобразованию, каждые элементы после раскрытия всех скобок будут умножаться на одно из $\theta(b_{2n-(2k-3)}), \theta(b_{2n-(2k-4)}), \theta(b_{2n-(2k-3)} + b_{2n-(2k-4)})$, либо их линейные комбинации, и обозначим такое множество за R^k .

Зафиксируем произвольный элемент из уровня $n - k - 1$, который зависит от исходного изображения. Без ограничения общности, пусть это будет $F_{i_1}^{n-k-1} F_{i_2}^{n-k-1} \dots F_{i_l}^{n-k-1}$. Рассмотрим, какой получится член перед ним, не зависящий от исходного изображения. Для этого нужно сгруппировать все слагаемые с множителем $F_{i_1}^{n-k-1} F_{i_2}^{n-k-1} \dots F_{i_l}^{n-k-1}$ и

просуммировать его оставшиеся множители, которые не зависят от вектора входных данных.

Допустим, такой множитель встретился t раз. Тогда финальный множитель будет иметь вид:

$$F_{i_1}^k F_{i_2}^k \cdots F_{i_t}^k : \sum_{i=1}^t a_i * r_i * W_i \quad (18)$$

Здесь W_i - это множитель, который по предположению индукции является линейной комбинацией из множества Θ^{n-k} , $a_i \in \mathbb{Z}$, а $r_i \in R^k$.

Получается, что такая сумма будет являться линейной комбинацией из следующего множества:

$$\begin{aligned} & \theta(b_{2n-3}), \theta(b_{2n-2}), \theta(b_{2n-3} + b_{2n-2}), \cdots \\ & \cdots, \theta(b_{2n-(2k-3)}), \theta(b_{2n-(2k-4)}), \theta(b_{2n-(2k-3)} + b_{2n-(2k-4)}) \end{aligned} \quad (19)$$

и их всевозможных произведений, то есть для уровня $n - k - 1$ утверждение также верно. \square

Оценим нелинейную сложность LR -схемы. Схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1^{n-1} = & \sum_{i=1}^{n-1} x_i \wedge F_i^1 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n-1} x_{ij} \wedge F_i^1 * F_j^1 + \cdots + \\ & + x_{12 \dots n-1} \wedge F_1^1 \wedge F_2^1 \cdots \wedge F_{n-1}^1 \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь всевозможные x - это те самые линейные комбинации из сверток (кроме первой), про которые говорится в предыдущей лемме. Также сгруппировали такую сумму по одинаковому количеству множителей F_i^1 .

Будем оценивать количество нелинейных операций, которое требуется на подсчет множителей в финальной схеме, не зависящих от исходного изображения (сверток). Нетрудно посчитать, что количество возможных произведений из сверток на последнем слое равно 0 (там нет сверток), на предпоследнем слое равно $2^3 - 1$ (всевозможные произведения $\theta(b_{2n-3})$, $\theta(b_{2n-2})$, $\theta(b_{2n-3} + b_{2n-2})$), на уровне $n - k$ количество всевозможных произведений из встретившихся сверток равно $2^{3(k-1)} - 1$. Тогда на самом первом слое количество таких произведений будет равно $2^{3(n-2)} - 1$.

Максимальное количество множителей такого слагаемого равно количеству всевозможных элементов из сверток, то есть $3(n - 2)$.

Также нужно учесть, что в рассматриваемом базисе нет операции произведения функций, поэтому ее нужно добавить, для этого нужно использовать то, что произведение Хевисайдов возможно разложить в операцию Хевисайдов от суммы операций Хевисайдов (лемма 1).

Соответственно, для того, чтобы посчитать один раз все такие множители, нужно совершить максимум следующее количество операций умножения на функции Хевисайда:

$$3(n - 2 + 1)(2^{3(n-2)} - 1) = 3(n - 1)(2^{3(n-2)} - 1)$$

Так как все множители предпосчитаны, то любая линейная комбинация не будет давать прироста к нелинейной сложности схемы - в линейной комбинации помимо произведений сверток есть только сумматор и умножение на число, которые не являются нелинейными операциями.

Теперь оценим количество нелинейных операций, которое нужно потратить на подсчет элементов, зависящих от начального изображения, то есть от F_i^1 . Всевозможных комбинаций из произведений F_i^1 имеется 2^{n-1} , при этом длина самого длинного элемента не превосходит $n - 1$. Также аналогично в случае с подсчетом множителей нужно учесть, что в нашем базисе нет операции произведения функций, поэтому нужно использовать лемму 1. Соответственно, чтобы посчитать всевозможные произведения, необходимо совершить $(n - 1 + 1)2^{n-1} = n2^{n-1}$ нелинейных операций.

Итого, оценивая финальную нелинейную сложность схемы, приходим к следующей оценке: на подсчет множителей из сверток нужно $3(n - 1)(2^{3(n-2)} - 1)$ нелинейных операций, на подсчет множителей из элементов, которые зависят от исходного изображения, нужно $n2^{n-1}$ операций, также нужно учесть, что здесь происходит перемножение операций, и добавится еще 2^{n-1} операций для перемножения сверток и F_i^1 . Итого $3(n - 1)(2^{3(n-2)} - 1) + n2^{n-1} + 2^{n-1}$. Видно, что наибольший вклад в рост нелинейной сложности вносит $R -$, в дальнейшем будет вестись работа по сокращению ее нелинейной сложности.

Из такой оценки можно сразу следует теорема.

Теорема 2. *Порядок роста нелинейной сложности LR–схемы с нелинейной глубиной 2 не превосходит $n2^{3n}$. При этом нелинейная сложность L-схемы не превосходит $n2^n$.*

Таким образом, в этой работе одномерные сверточные нейронные схемы в базисе Маккалока-Питтса разложены на динамическую и априорную составляющие, каждая из которых имеет нелинейную глубину 2.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доценту кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ, к.ф.-м.н., Часовских Анатолию Александровичу, за помощь в проведении исследования и постановке задачи.

Список литературы

- [1] Y. LeCun, B. Boser, J. S. Denker, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard, L. D. Jacke, *Backpropagation applied to Handwritten Zip Code Recognition*, *Neural Computation*, 1989.
- [2] *Автоматы. Сборник статей. Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. Пер. с англ. под ред. А. А. Ляпунова*, Изд. иностр. лит., 1956.
- [3] С. Хайкин, *Нейронные сети: полный курс, 2-е издание*, Вильямс, 2006.
- [4] W. S. McCulloch, W. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, **5**, 1943.
- [5] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 pp.
- [6] Половников В.С., *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, МГУ, 2007

On reducing the nonlinear depth of convolutional neural schemes Khapkin A.V.

The paper considers one-dimensional convolutional schemes in the McCulloch-Pitts basis. It is shown that the considered schemes can be implemented by a scheme from the a priori and dynamic parts, in which the calculations in the a priori part are independent of the input data. In this case, the a priori and dynamic parts have a nonlinear depth equal to 2.

Keywords: convolutional neural network, neural scheme, nonlinear complexity, McCulloch-Pitts model.