

Коды, определяющие изображения с точностью до аффинных преобразований

В.Н. Козлов

В работе представлены коды, задающие изображения с точностью до аффинных преобразований, в том числе некоторый новый код.

Ключевые слова: распознавание образов, изображения, коды изображения.

Изображением называем конечное (непустое) множество точек в евклидовых пространствах разной размерности. В частности, двумерное изображение – конечное множество точек на плоскости. Считаем, что любую фигуру можно «аппроксимировать» конечным множеством точек, которые уже сами по себе делают фигуру вполне узнаваемой. При этом если точек много, то такая совокупность точек практически неотличима от исходной фигуры. Так же можно представлять и полутоновые, черно-бело-серые изображения, при этом разная плотность точек в разных частях изображения дает разные оттенки «серого цвета». Как известно, цветное изображение можно представлять как наложение трех монохроматических (аналогов черно-бело-серых) изображений. Это означает, что совокупностями точек можно представлять и цветные изображения. Трехмерные изображения – точки в трехмерном евклидовом пространстве. Соотнесение между трехмерным изображением и двумерными, являющимися их проекциями, приводит к задачам восстановления тел по плоским проекциям и смежным задачам. Наконец, трехмерный мир в динамике можно рассматривать как четырехмерное изображение (последовательность трехмерных сцен).

Далее рассматриваются двумерные изображения, но сказанное может быть обобщено и на случаи большей размерности.

Перенумеруем некоторым образом точки изображения A так, чтобы номера разных точек были попарно различны. Обозначим через M_A множество этих номеров. Пусть S_{mnu} и S_{kps} – площади треугольников с вершинами в тройках точек с номерами m, n, u и k, p, s и пусть

$\rho_{mnu,kps} = S_{mnu}/S_{kps}$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps} = 0$ значение $\rho_{mnu,kps}$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu,kps}$ для всех таких пар троек обозначим через T_A . Код изображения A – пара $\langle M_A, T_A \rangle$. Изображения A и B с кодами $\langle M_A, T_A \rangle$ и $\langle M_B, T_B \rangle$ назовем эквивалентными, если существует такая биекция $\psi: M_A \rightarrow M_B$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A выполнено $\rho_{mnu,kps} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(p)\psi(s)}$. Ясно, что эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их кодов с точностью до перенумерации точек.

Два изображения называем аффинно эквивалентными, если они переводимы друг в друга аффинными преобразованиями. Если все точки изображения не лежат на одной прямой или двух параллельных прямых, то изображение называем плоским.

Теорема 1 [1]. Два плоских изображения эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Содержательно теорема 1 означает, в частности, что код изображения задает его с точностью до аффинных преобразований.

Назовем изображения A и B пропорциональными, если существует такая биекция $\psi: M_A \rightarrow M_B$, при которой для любых точек с номерами m, n, u из M_A (не лежащих на одной прямой), число $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ есть константа, не зависящая от выбора точек m, n, u .

Теорема [2]. Два плоских изображения пропорциональны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Числа $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности не являются элементами кода ни изображения A , ни изображения B . Однако они являются элементами кода изображения S , которое трактуется как среда, и включающего изображения A и B как части. Под этим понимается следующее. Изображение A (или B) называется частью среды S , если точки, составляющие A , есть подмножество точек из S . Если код для S есть $\langle M_S, T_S \rangle$, то, очевидно, код $\langle M_A, T_A \rangle$ можно получить, если собрать в M_A номера из M_S всех точек, вошедших в A , и собрать в T_A все те $\rho_{mnu,kps} = S_{mnu}/S_{kps}$ из T_S , для которых m, n, u, k, s, p вошли в M_A . Говорим в этом случае, что код $\langle M_A, T_A \rangle$ есть часть кода $\langle M_S, T_S \rangle$. В этом случае константные $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности являются элементами кода среды S .

Известны [3,4] результаты о том, что для каждого выпуклого многоугольника (k вершин, $k > 2$) существует и единственен наименьший по площади эллипс, в который этот многоугольник вписывается. Используем это для построения некоторого нового кода изображения.

Лемма 1. Пусть S_t – площадь треугольника с вершинами в точках a, b, c , не лежащих на одной прямой, E – наименьший по площади эллипс, в который вписан треугольник, S_e – площадь эллипса. Тогда отношение площадей S_e и S_t есть константа, не зависящая от треугольника.

Доказательство. Аффинными преобразованиями сделаем треугольник правильным. Эти же преобразования переводят эллипс E в эллипс E' . Поскольку отношения площадей при аффинных преобразованиях сохраняются, то E' – тоже наименьший по площади эллипс, в который вписан преобразованный треугольник, и единственный. Отсюда E' – описанная окружность для правильного треугольника. Действительно, положим, что E' отличен от окружности. Тогда, в силу симметрии треугольника, существуют еще два эллипса E'' и E''' с той же (и значит, минимальной) площадью, в которые вписан треугольник, а это противоречит единственности эллипса. Отношение площадей описанной окружности и правильного треугольника и будут той константой, о которой говорится в формулировке. Лемма доказана.

Пусть теперь A – изображение, M_A^e – множество попарно различных номеров точек в A , S_{mnu}^e и S_{kps}^e – площади наименьших (по площади) эллипсов описанных вокруг треугольников с вершинами в точках соответственно m, n, u и k, p, s , и пусть $\rho_{mnu, kps}^e = S_{mnu}^e / S_{kps}^e$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps}^e = 0$ значение $\rho_{mnu, kps}^e$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu, kps}^e$ для всех таких пар троек обозначим через T_A^e . Эллипс-код изображения A – пара $\langle M_A^e, T_A^e \rangle$. Изображения A и B с кодами $\langle M_A^e, T_A^e \rangle$ и $\langle M_B^e, T_B^e \rangle$ назовем эллипс-эквивалентными, если существует такая биекция $\psi: M_A^e \rightarrow M_B^e$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A^e выполнено $\rho_{mnu, kps}^e = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u), \psi(k)\psi(p)\psi(s)}^e$. Ясно, что эллипс-эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их эллипс-кодов с точностью до перенумерации точек.

Из теоремы 1 и леммы 1 с очевидностью вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Два плоских изображения эллипс-эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Список литературы

- [1] В.Н. Козлов, *Введение в математическую теорию зрительного восприятия*, Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, М., 2007.

- [2] В.Н. Козлов, “Алгоритмы формирования системы взаимосвязанных образов”, *Интеллектуальные системы*, **18**, 2014, 99-114.
- [3] Л. Данцер , Б. Грюнбаум , В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Издательство «Мир», М., 1968.
- [4] В.Л. Загускин, “Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема”, *Успехи математических наук*, **13**, 1958, 89-93.

Codes that define images accurate to affine transformations

V.N. Kozlov

The paper presents codes that define images with an accuracy of affine transformations, including some new code.

Keywords: pattern recognition, images, image codes.