Некорректность интуиционистской теории множеств относительно конструктивной семантики, основанной на гиперарифметических видах.

Коновалов А.Ю.

Исследуется вопрос о корректности аксиом интуиционистской теории множеств относительной семантики реализуемости, основанной на гиперарифметических видах.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, аксиоматическая теория множеств, гиперарифметические виды.

В интуиционистской математике одним из аналогов понятия множества является *вид* как точно сформулированное условие, которому могут удовлетворять некоторые математические объекты (см. [1]), называемые в этом случае *членами* вида. В работе [2] мы определили семантику типа реализуемости для языка теории множеств, основанную на гиперарифметических видах. В настоящей статье мы продолжим исследование этой семантики.

Отношения на множестве натуральных чисел, принадлежащие классу Π^1_1 аналитической иерархии [3, §16.1], назовем Π^1_1-предикатами. Из [3, §16.1, теорема V] следует, что найдется такой Π^1_1-предикат $U(z, x_1, x_2)$, который является универсальным для класса всех 2-местных Π^1_1-предикатов. Натуральное число z назовем Π^1_1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если имеет место $P(x_1, x_2) \iff U(z, x_1, x_2)$. Будем говорить, что отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ является гиперарифметическим, если $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ суть Π^1_1-предикаты. Натуральное число z назовем Δ^1_1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если $z = \mathsf{c}(z_1, z_2)$, где z_1 — Π^1_1-индекс отношения $\neg P(x_1, x_2)$, а z_2 — Π^1_1-индекс отношения $P(x_1, x_2)$. Пусть I — множество всех Δ^1_1-индексов всех 2-местных гиперарифметических отношений, а $D_z(x_1, x_2)$ — гиперарифметическое отношение, Δ^1_1-индекс которого есть z.

Посредством трансфинитной индукции для каждого ординала α определим множество Δ_α следующим образом:

$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in I \mid \neg\,\exists s\,\exists x\; D_z(s,x)\},\ \text{если } \alpha = 0;$$
$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in I \mid \forall s, x\,(D_z(s,x) \to x \in \Delta_\beta)\},\ \text{если } \alpha = \beta + 1;$$
$$\Delta_\alpha \rightleftharpoons \bigcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta,\ \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Через Δ обозначим объединение всех множеств Δ_α, для которых ординал α конечен либо счетен.

Формулы языка теории множеств строятся из предметных переменных, констант элементов множества Δ, двухместных предикатных символов $=$ и $\in$, логических констант $\bot, \top$, логических связок $\wedge, \vee, \to$, кванторов $\forall, \exists$ и скобок по обычным правилам. При записи формул будем использовать следующие сокращения:

- $\neg\Phi \rightleftharpoons \Phi \to \bot$;
- $\exists x{\in}t\; \Phi(x) \rightleftharpoons \exists x(x{\in}t \wedge \Phi(x))$;
- $\forall x{\in}t\; \Phi(x) \rightleftharpoons \forall x(x{\in}t \to \Phi(x))$;
- $\exists! x\; \Phi(x) \rightleftharpoons \exists x\,(\Phi(x) \wedge \forall y\,(\Phi(y) \to y = x))$;
- $\forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightleftharpoons \forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \to \Psi) \wedge \forall x_1, \ldots, x_n(\Psi \to \Phi)$.

Фиксируем примитивно рекурсивную взаимно-однозначную функцию c, кодирующую пары натуральных чисел натуральными числами. Тогда одноместные обратные функции p_1 и p_2, где $\mathsf{p}_1(x)$ и $\mathsf{p}_2(x)$ суть первая и вторая компоненты пары с кодом x, т. е. $\mathsf{c}(\mathsf{p}_1(x), \mathsf{p}_2(x)) = x$, также примитивно рекурсивны. Для каждого натурального числа n фиксируем вычислимую нумерацию всех n-местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots$.

Согласно [2], для всякого натурального числа e и произвольной замкнутой формулы Φ языка теории множеств определим отношение «e реализует Φ» (обозначение: $e\ \mathbf{r}\ \Phi$) следующим индуктивным образом:

- $e\ \mathbf{r}\ (a = b) \rightleftharpoons a = b$;
- $e\ \mathbf{r}\ (a \in b) \rightleftharpoons D_b(e, a)$;
- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi$;

- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \in \Delta$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \dots, x_n\, (\Phi(x_1, \dots, x_n) \to \Psi(x_1, \dots, x_n)) \rightleftharpoons$ [для всех[1] натуральных чисел s и $a_1, \dots, a_n \in \Delta$, если $s\ \mathbf{r}\ \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то определено $\varphi_e^{n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$ и верно $\varphi_e^{n+1}(a_1, \dots, a_n, s)\ \mathbf{r}\ \Psi(a_1, \dots, a_n)$], при этом список переменных $x_1, \dots, x_n$ может быть пустым;
- $e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \dots, x_n\, \Phi(x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons [e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \dots, x_n\, (\top \to \Phi(x_1, \dots, x_n))]$, если список переменных $x_1, \dots, x_n$ непуст, формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в $\Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Будем говорить, что замкнутая формула Φ языка теории множеств является *реализуемой*, если найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{r}\ \Phi$.

Интуиционистская теория множеств имеет следующие аксиомы и схемы аксиом:

$$\exists z\, \forall x\, (x \in z \to \bot); \tag{$\varnothing$}$$
$$\forall x\, \exists z\, (x \in z \wedge \forall u{\in}z\, \exists u'{\in}z\, \forall y\, (y \in u' \leftrightarrow y = u)); \tag{Inf}$$
$$\forall x, y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y); \tag{Ext}$$
$$\forall x, y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)); \tag{Pair}$$
$$\forall x\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow \exists y\, (y \in x \wedge u \in y)); \tag{Un}$$
$$\forall y\, \exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow \forall u\, (u \in x \to u \in y)); \tag{Pow}$$
$$\forall x\, (\forall u{\in}x\, \Phi(u) \to \Phi(x)) \to \forall x\, \Phi(x), \tag{Ind}$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \Phi(u)); \tag{Sep}$$
$$\forall x\, [\forall v{\in}x\, \exists u\, \Phi(v, u) \to \exists y\, \forall v{\in}x\, \exists u{\in}y\, \Phi(v, u)]. \tag{Coll}$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Следующие аксиомы интуиционистской теории множеств являются реализуемыми:* ($\varnothing$), (Inf), (Pair), (Un), (Ind), (Coll).

Теорема 2. *Следующие аксиомы интуиционистской теории множеств не являются реализуемыми:* (Ext), (Pow).

[1] Однако, если в списке $x_1, \dots, x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1, \dots, a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

Список литературы

[1] А. Гейтинг, *Интуиционизм*, Мир, М., 1965.

[2] А. Ю. Коновалов, “Семантика реализуемости для конструктивной теории множеств, основанная на гиперарифметический предикатах”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, 2017, № 3, 59–62.

[3] Х. Роджерс, *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, М., 1972.

The intuitionistic set theory is not sound with respect to the constructive sematics based on hyperarithmetic sorts.

Konovalov A.Yu.

The soundness of axioms of the intuitionistic set theory with respect to the realizability semantics based on hyperarithmetical sorts is studied.

Keywords: constructive semantics, realizability, axiomatic set theory, hyperarithmetical sorts.