Некорректность теории множеств Цермело-Френкеля относительно конструктивной семантики, основанной на гиперарифметических видах

Коновалов А. Ю.

Определяется семантика реализуемости для формул языка теории множеств, основанная на гиперарифметических видах. Исследуется вопрос о корректности аксиом теории множеств Цермело-Френкеля относительной этой семантики.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, аксиоматическая теория множеств, гиперарифметические виды.

1. В интуиционистской математике одним из аналогов понятия множества является *вид* как точно сформулированное условие, которому могут удовлетворять некоторые математические объекты (см. [1]), называемые в этом случае *членами* вида. При этом существенно, что условие, задающее вид, само должно пониматься интуиционистски. Это означает, что объект x является членом вида y ($x \in y$), если имеется обоснование того факта, что x удовлетворяет условию, задающему вид y. Следуя идее Клини, лежащей в основе *рекурсивной реализуемости* (см. [2, §82]), будем считать, что объект x может рассматриваться как член данного вида y только вместе с числом e, кодирующим обоснование утверждения $x \in y$, так что на самом деле речь должна идти об упорядоченной паре $\langle e, x\rangle$. Используя данный подход, в работе [3] мы определили конструктивную семантику языка теории множеств, основанную на гиперарифметических видах. В настоящей статье мы продолжим исследование этой семантики.

2. Фиксируем примитивно рекурсивную взаимно-однозначную функцию c, кодирующую пары натуральных чисел натуральными числами. Например, определим c как в [4, §5.3]:

$$\mathsf{c}(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + 2uv + v^2 + 3u + v).$$

Тогда одноместные обратные функции p_1 и p_2, где $\mathsf{p}_1(x)$ и $\mathsf{p}_2(x)$ суть первая и вторая компоненты пары с кодом x, т. е. $\mathsf{c}(\mathsf{p}_1(x), \mathsf{p}_2(x)) = x$, также примитивно рекурсивны. Для любого натурального $n > 0$ с помощью функции c индуктивно определяется функция c^n, взаимно-однозначно отображающая $\mathbb{N}^n$ на $\mathbb{N}$:

$$\mathsf{c}^1(x) = x; \quad \mathsf{c}^{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mathsf{c}(\mathsf{c}^n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

В выражениях вида $\mathsf{g}(t)$ мы иногда будем опускать скобки и писать просто $\mathsf{g}t$. Кодирование всех конечных кортежей (включая пустой) натуральных чисел τ^* определим как в [4, §5.6]. А именно,

$$\tau^*(\varnothing) \rightleftharpoons 0, \quad \tau^*(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) \rightleftharpoons \mathsf{c}(\mathsf{c}^n(x_1, \ldots, x_n), n-1) + 1.$$

Если f — всюду определенная одноместная функция натурального аргумента, то, согласно [4, с. 482], функция $\overline{f}$ определяется так:

$$\overline{f}(n) \rightleftharpoons \begin{cases} \tau^*(\langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle), & \text{если } n > 0 \\ 0, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Рекурсивные отношения $T^*_{k,\,l}(z, y_1, \ldots, y_l, x_1, \ldots, x_k)$ определяются в [4, §16.1, с. 483]. Определим отношение $U(z, x_1, x_2)$ следующим образом:

$$U(z, x_1, x_2) \rightleftharpoons \forall f \, \exists w \, T^*_{1,2}(z, \overline{f}(w), x_1, x_2).$$

Отношения на множестве натуральных чисел, принадлежащие классу Π^1_1 аналитической иерархии [4, §16.1], назовем Π^1_1-предикатами. Согласно [4, §16.1, теорема V], отношение $U(z, x_1, x_2)$ является универсальным для класса всех 2-местных Π^1_1-предикатов. Натуральное число z назовем Π^1_1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если имеет место $P(x_1, x_2) \Longleftrightarrow U(z, x_1, x_2)$. Будем говорить, что отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ является гиперарифметическим, если $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ суть Π^1_1-предикаты. Натуральное число z назовем Δ^1_1-индексом отношения $P(x_1, x_2)$, если $z = \mathsf{c}(z_1, z_2)$, где z_1 — Π^1_1-индекс отношения $\neg P(x_1, x_2)$, а z_2 — Π^1_1-индекс отношения $P(x_1, x_2)$. Пусть I — множество всех Δ^1_1-индексов всех 2-местных гиперарифметических отношений, а $D_z(x_1, x_2)$ — гиперарифметическое отношение, Δ^1_1-индекс которого есть z.

3. Посредством трансфинитной индукции для каждого ординала α определим множество Δ_α следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in I \mid \neg\, \exists s\, \exists x\, D_z(s,x)\}, \text{ если } \alpha = 0;\\
&\Delta_\alpha \rightleftharpoons \{z \in I \mid \forall s, x\, (D_z(s,x) \to x \in \Delta_\beta)\}, \text{ если } \alpha = \beta + 1;\\
&\Delta_\alpha \rightleftharpoons \bigcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал.}
\end{aligned}$$

Через Δ обозначим объединение всех множеств Δ_α, для которых ординал α конечен либо счетен. Справедливы следующие утверждения:

1) $\Delta \subseteq I$;

2) если $\alpha < \beta$, то $\Delta_\alpha \subseteq \Delta_\beta$;

3) если $a \in I$, то $a \in \Delta \Longleftrightarrow \forall s, x\, (D_a(s,x) \Rightarrow x \in \Delta)$.

4. Формулы языка теории множеств строятся из предметных переменных, констант элементов множества Δ, двухместных предикатных символов $=$ и $\in$, логических констант $\bot, \top$, логических связок $\wedge, \vee, \to$, кванторов $\forall, \exists$ и скобок по обычным правилам. Формулы, которые не содержат свободных вхождений предметных переменных, будем называть замкнутыми. При записи формул будем использовать следующие сокращения:

- $\neg\Phi \rightleftharpoons \Phi \to \bot$;
- $\exists x{\in}t\, \Phi(x) \rightleftharpoons \exists x(x{\in}t \wedge \Phi(x))$;
- $\forall x{\in}t\, \Phi(x) \rightleftharpoons \forall x(x{\in}t \to \Phi(x))$;
- $\exists! x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \exists x\, (\Phi(x) \wedge \forall y\, (\Phi(y) \to y = x))$;
- $\forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightleftharpoons \forall x_1, \ldots, x_n(\Phi \to \Psi) \wedge \forall x_1, \ldots, x_n(\Psi \to \Phi)$.

5. Для каждого натурального числа n фиксируем вычислимую нумерацию всех n-местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots$.

Согласно [3], для всякого натурального числа e и произвольной замкнутой формулы Φ языка теории множеств определим отношение «e реализует Φ» (обозначение: $e\ \mathbf{r}\ \Phi$) следующим индуктивным образом:

- $e\ \mathbf{r}\ (a = b) \rightleftharpoons a = b$;
- $e\ \mathbf{r}\ (a \in b) \rightleftharpoons D_b(e, a)$;
- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi$;

- $e\ \mathbf{r}\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \in \Delta$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons$ [для всех[1] натуральных чисел s и $a_1, \ldots, a_n \in \Delta$, если $s\ \mathbf{r}\ \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то определено $\varphi_e^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s)$ и верно $\varphi_e^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s)\ \mathbf{r}\ \Psi(a_1, \ldots, a_n)$], при этом список переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть пустым;
- $e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, \Phi(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons [e\ \mathbf{r}\ \forall x_1, \ldots, x_n\, (\top \to \Phi(x_1, \ldots, x_n))]$, если список переменных $x_1, \ldots, x_n$ непуст, формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что замкнутая формула Φ языка теории множеств является *реализуемой*, если найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{r}\ \Phi$.

Теория множеств Цермело-Френкеля имеет следующие аксиомы и схемы аксиом:

$$\forall x, y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y); \tag{Ext}$$
$$\exists z\, \forall x\, (x \in z \to \bot); \tag{$\varnothing$}$$
$$\forall x\, \exists z\, (x \in z \wedge \forall u{\in}z\, \exists u'{\in}z\, \forall y\, (y \in u' \leftrightarrow y = u)); \tag{Inf}$$
$$\forall x, y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)); \tag{Pair}$$
$$\forall x\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow \exists y\, (y \in x \wedge u \in y)); \tag{Un}$$
$$\forall y\, \exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow \forall u\, (u \in x \to u \in y)); \tag{Pow}$$
$$\forall z\, (\exists u\, (u \in z) \to \exists y{\in}z\, \forall x\, (x \in y \wedge x \in z \to \bot)); \tag{Reg}$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \Phi(u)); \tag{Sep}$$
$$\forall x\, [\forall v{\in}x\, \exists! u\, \Phi(v, u) \to \exists y\, \forall v{\in}x\, \exists u{\in}y\, \Phi(v, u)]. \tag{Rep}$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Следующие аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля являются реализуемыми:* ($\varnothing$), (Inf), (Pair), (Un), (Rep).

Теорема 2. *Следующие аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля не являются реализуемыми:* (Ext), (Pow), (Reg).

[1] Однако, если в списке $x_1, \ldots, x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1, \ldots, a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

Список литературы

[1] Гейтинг А., *Интуиционизм*, Мир, М., 1965.

[2] Клини С. К., *Введение в метаматематику*, Мир, М., 1957.

[3] Коновалов А. Ю., “Семантика реализуемости для конструктивной теории множеств, основанная на гиперарифметический предикатах”, *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **3**, 2017, 59–62.

[4] Роджерс Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, М., 1972.

The Zermelo–Fraenkel set theory is not sound with respect to the constructive sematics based on hyperarithmetic sorts

Konovalov A. Yu.

A semantics of the realizability based on hyperarithmetical sorts for formulas of the language of set theory is introduced. The soundness of axioms of the Zermelo–Fraenkel set theory with respect to this semantics is studied.

Keywords: constructive semantics, realizability, axiomatic set theory, hyperarithmetical sorts.