Вопросы выразимости в классе согласованных функций

Кан А. Н.

В настоящей работе рассматривается 2-полнота в классе P согласованных функций. Данный класс был рассмотрен ранее в работах [3, 4]. Он является предполным в классе PL кусочно-линейных функций. В нем было найдено два 2-предполных класса: класс CPL непрерывных функций, класс PF согласованных финитных функций.

Ключевые слова: Класс кусочно-линейных функций, класс кусочно-линейных непрерывных функций, класс согласованных функций, класс финитных функций, класс согласованных финитных функций, 2-предполнота, функция Хэвисайда.

1. Основные понятия и определения.

Рассмотрим следующие функции действительных аргументов:
1) Функция $\Theta(x)$ (Хэвисайда):

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

2) Функция $\Theta^{'}(x)$:

$$\Theta^{'}(x) = 1 - \Theta(-x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2}$$

3) Функция $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ x, & \text{иначе} \end{cases} \tag{3}$$

Введем некоторые обозначения:

1) Запись вида $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b})$ равняется записи $f(a_1 \cdot t + b_1, ..., a_n \cdot t + b_n)$, где $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, ..., b_n)$.

2) Под операцией "$\cdot$" примененной к векторам, подразумевается операция скалярного произведения векторов.

3) Пусть $M \subset PL$, тогда $M^{(2)}$ это множество состоящие из всех двухместных функций множества M.

4) В данной статье рассматривается замыкание по операциям супер позиции. Замыкание множества $M \in PL$ по операциям суперпозиции, будем обозначать через $[M]$. [1]

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ называется линейной, если найдутся $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}$, такие что $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{a} + c$. Множество всех линейных функций обозначим через L.*

Пусть l_i - гиперплоскость, задаваемая уравнением $\overline{x} \cdot \overline{a_i} + c_i = 0, a_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{\overline{0}\}, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k$. Для каждой точки $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вектор $\sigma(\overline{x}) = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}, \sigma_i = sgn(\overline{x} \cdot \overline{a_i} + c_i)$, где

$$sgn(b) = \begin{cases} -1, & \text{если } b < 0 \\ 0, & \text{если } b = 0 \\ 1, & \text{если } b > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 2. *Две точки $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ эквивалентны относительно гиперплоскостей $l_1, ..., l_k$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$, обозначим это через $\overline{x} \sim \overline{y}$.*

Легко проверить, что отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности. Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на классы эквивалентности $R_1, ..., R_s$.

Определение 3. *Сигнатурой класса R называется вектор $\sigma(R) = \sigma(\overline{x})$, где $\overline{x}$ точка класса R.*

Пусть $R_1, ..., R_s$ - все классы эквивалентности на которые гиперплоскости $l_1, ..., l_k$ разбивают $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется кусочно-линейной, если* $\forall j \in \{1, ..., s\}$ *найдутся* $b_j \in \mathbb{R}^n$ *и* $d_j \in \mathbb{R}$*, что для всех* $\overline{x} \in R_j$ *выполняется* $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{b_j} + d_j$*. Линейную функцию* $\overline{x} \cdot \overline{b_j} + d_j$*, реализуемую на множестве* R_j*, обозначим* $f_{R_j}(\overline{x})$*. Множество всех кусочно-линейных функций обозначим через* PL*.*

Определение 5. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется кусочно-постоянной, если* $f \in PL$ *[1] и* $\forall j \in \{1, ..., s\}, \exists d_j \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall \overline{x} \in R_j$ *(где* R_j *классы эквивалентности [1]),* $f(\overline{x}) = d_j,$*. Класс всех кусочно-постоянной функций обозначим* PC*.*

Определение 6. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется согласованной, если* $f \in PL$ *и* $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{d} \in \mathbb{R}^n, \exists N \in \mathbb{R}_+$ *такие, что* $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b}) - f(\overline{a} \cdot t + \overline{d}) = const$*,* $\forall t > N$*. Класс всех согласованных функций обозначим* P*.*

Определение 7. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется финитной, если* $f \in PL$ *и* $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n, \exists A, B, N \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b}) = A \cdot t + B$*,* $\forall |t| > N$*. Класс всех финитных функций обозначим* Φ*.*

Классы P и Φ замкнуты по операциям суперпозиции и образуют критериальную систему в классе PL кусочно-линейных функций.[3]

Определение 8. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется кусочно-линейной непрерывной, если* $f \in PL$ *и непрерывна. Класс всех кусочно-линейных непрерывных функций обозначим через* CPL*.*

Далее введем понятие 2-предполных классов.

Определение 9. *Пусть* A *замкнутый класс и* $A \subset B$*.* A *2-предполный в классе* B*, если*
$B^{(2)} \subset [A \cup \{f\}]$*, где* $f \notin B \backslash A$*.*

Оказывается, класс непрерывных кусочно-линейных функций является 2-предполным в классе согласованных функций.

2. 2-предполнота непрерывных кусочно-линейных функций.

Пусть $M \subset P$ и $M \not\subset CPL$, тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. $P^{(2)} \subset [M \cup CPL]$.

Доказательство.

У нас имеется все непрерывные кусочно-линейные функции и функция $f \notin CPL$ не принадлежащая данному классу. Нам нужно доказать что класс CPL 2-предполный в классе P. Будем строить произвольную функцию из $P^{(2)}$ согласованных функций. Доказательство разобьем на две части.

1) Сначала покажем что мы можем построить функцию, которая совпадает с исходной на всех конечных классах эквивалентности, а на бесконечных классах эквивалентности равняется нулю.

Выделим функцию $g(x) \in CPL \backslash \Phi$:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x, & \text{иначе} \end{cases} \tag{5}$$

Легко видеть, что функция $g(x)$ не содержится в классе финитных функций. Из курсовой работы [3] следует, что из функции f являющейся разрывной и функции g не являющейся финитной, можно получить функцию $\Theta(x)$. Также выделим функцию $\overline{F}^o(x, y)$:

$$\overline{F}^o(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ x, & \text{если } y > |x| \\ y, & \text{если } y > 0, y \leq x \\ -y, & \text{если } y > 0, y \leq -x \end{cases} \tag{6}$$

Легко проверить что функция (5) непрерывна.

$\forall N \in \mathbb{R}_+$, определим функцию $F^o_N(x,y) = \overline{F^o}(x, N \cdot \Theta^{'}(y))$:

$$F^o_N(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ x, & \text{если } y > 0, |x| < N \\ c(x,y), & \text{иначе} \end{cases} \tag{7}$$

Функция (6) ведет себя как функция $F(x,y), \forall |x| < N$.

В работе [1] было доказано, что любая функция $f(\overline{x}) \in PL$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{s} F(\bar{b}_j \cdot \overline{x} + d_j, \sum_{i=1}^{k} \chi(sgn(\overline{a}_i \cdot \overline{x} + c_i), \sigma^i_j) - k + 1) \tag{8}$$

Где $s \in \mathbb{N}$ это количество классов эквивалентности, а $k \in \mathbb{N}$ количество разделяющих гиперплоскостей.

Давайте подробнее разберем почему это так. Данное выражение

$$\sum_{i=1}^{k} \chi(sgn(\overline{a}_i \cdot \overline{x} + c_i), \sigma_j^i) - k + 1 \tag{9}$$

из уравнения (7) поэлементно сравнивает вектор сигнатуры класса R_j с вектором сигнатуры точки $\overline{x}$ и если они совпадают (т.е. точка лежит в данном классе эквивалентности) то выражение (8) равно единице в противном случае данное выражение меньше либо равно нулю. Следовательно все выражение в правой части уравнения (7) равно линейной функции соответствующей некому классу эквивалентности R_j если точка $\overline{x}$ лежит в данном классе эквивалентности и равно нулю если точка не принадлежит ни одному классу эквивалентности. Так как мы описываем только конечные классы эквивалентности и функции $F(x, y)$ и $F_N^o(x, y)$ совпадают (при $|x| < N$). Следовательно в уравнении (7) функцию $F(x, y)$ можно заменить на функцию $F_N^o(x, y)$.

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{s} F_N^o(\overline{b}_j \cdot \overline{x} + d_j, \sum_{i=1}^{k} \chi(sgn(\overline{a}_i \cdot \overline{x} + c_i), \sigma_j^i) - k + 1) \tag{10}$$

Аналогично, с помощью уравнения (9) можно представить любую функцию, которая на бесконечных классах эквивалентности равняется нулю.

$$\chi(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{11}$$

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{12}$$

Функции (10) и (11) принадлежат классу PC кусочно-постоянных функций, а следовательно могут быть получены из функции $\Theta(x)$ и линейных функций. [1]

2) Теперь построим функцию, которая совпадает с исходной на всех бесконечных классах эквивалентности.

$\forall N > 0 \in \mathbb{R}$, определим функцию $F_N(x,y)$: $F_N(x,y) = F_N^o(x, \chi(sgn(x-N), -1) + \chi(sgn(x+N), 1)$
$+ \chi(sgn(y), 1) - 2)$.

$$F_N(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } y > 0, |x| \le N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{13}$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. $\forall f \in P^{(2)}, \exists g \in [CPL^{(2)} \cup F^N(x,y) \cup \Theta(x)]$ *такая, что на всех бесконечных классах эквивалентности* $f = g$.

Доказательство.

У нас имеются все непрерывные кусочно-линейные функции, все *кусочно-постоянные* функции (порождаются $\Theta(x)$ и *линейными* функциями [1]) и функция $F^N(x,y)$. Пусть f произвольная функция из $P^{(2)}$ и $\{R_i\}$, $i = 1, ..., s$ все бесконечные классы эквивалентности функции f. Построим функцию g, которая бы совпадала на всех бесконечных классах эквивалентности. Так как мы работаем в двумерном случае, то любой бесконечный класс эквивалентности можно представить в виде луча или плоской бесконечной фигуры, которая имеет две (левая и правая) бесконечные границы (в случае луча левая и правая границы совпадают. Границы могут как принадлежать так и не принадлежать своей плоской фигуре). *Соседними классами* эквивалентности будет называть такую пару классов эквивалентности (R_i, R_j) чьи границы имеют общий луч и данный луч входит в одни из этих классов эквивалентности. Без ограничения общности можно считать что R_1 это класс с параллельными оси Y границами (так как добавление фиктивных разделяющих гиперплоскостей не меняют функцию). Пусть $\{R_i^{'}\}$, $i = 1, ..., s$ новый порядок имеющихся классов эквивалентности. Где $R_1^{'} = R_1$, а пары $(R_1^{'}, R_s^{'})$ и $(R_i^{'}, R_{i+1}^{'}), i = 1, .., s-1$ являются соседними классами эквивалентности. Рассмотрим $\{f_{R_i^{'}}\}$, $i = 1, ..., s$ линейные функции, которые реализуются в соответствующих классах эквивалентности. Будем поочередно соединять функции $\{f_{R_i^{'}}\}$ так чтобы получить непрерывную функцию $g_c \in CPL^{(2)}$. Начнем с пары (R_1, R_2). Из определения *согласованных* функций следует, что функции определенные на любых двух параллельных прямых, при достаточно большом значении аргумента, совпадают с точностью до константы. Отсюда следует что прямая, которая является значением функции на границе и плоскость, которая является значением функции на соседнем, относительно границы, классе эквивалентности параллельны. Следовательно существует константа $c \in \mathbb{R}$, что $f_{R_1'}(t_{1,2}) = f_{R_2'}(t_{1,2}) + c$, где $t_{1,2}$ граница классов (R_1, R_2). Константу c можно добавить с помощью *кусочно-постоянных* функций. Определим функцию $f_{c_{1,2}} \in PC$.

$$f_{c_{1,2}} = \begin{cases} c, & x \in R_2' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{14}$$

Прибавим $f_{c_{1,2}}$ к функции f: $g_{c_{1,2}} = f + f_{c_{1,2}}$. Функция $g_{c_{1,2}}$ будет непрерывна на $R_1' \cup R_2'$. Аналогично, проделав все операции для пар (R_i', R_{i+1}'), $i = 2, ..., s-1$. Получим функцию $g_{c_{s-1,s}}$. Возможны два случая:

а) Функция $g_{c_{s-1,s}}$ непрерывна на границе $t_{s,1}$. Тогда с помощью уравнения (9) из первой части теоремы мы можем получить функцию $g_c \in CPL^{(2)}$, которая является непрерывной. Следовательно существует некая непрерывная функция $g_c \in CPL^{(2)}$ такая, что проделав все операции в обратном порядке и со знаком «-» мы получим функцию g, которая совпадала бы на всех бесконечных классах эквивалентности с функцией f. Что нам и нужно.

б) Функция $g_{c_{s-1,s}}$ разрывна на границе $t_{s,1}$. Нам известно что границы класса R_1' параллельны. Следовательно, функции которые реализуются на этих границах параллельны. Из курса геометрии известно, что любые две параллельные прямые можно соединить плоскостью. С помощью Функции $F_N(x, y)$ можно соединить две границы плоскостью. Т.е. переходим к случаю «а». **Утверждение доказано.**

Следовательно, мы можем получить функцию, которая совпадает на бесконечных классах эквивалентности, а далее изменить в ней функции, которые реализуются на конечных классах эквивалентности на произвольные функции. Отсюда следует, что мы может получить любую двухместную согласованную функцию. **Теорема доказана.**

3. 2-предполнота согласованных финитно-параллельных функций.

Определение 10. *Функция* $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется согласованной финитно-параллельной функцией, если* $f \in P$ *и* $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n, \exists N \in \mathbb{R}$ *та-*

кое, что $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b}) + f(\overline{a} \cdot (-t) + \overline{b}) = const$, для $t > N$. Множество всех согласованных финитно-параллельных функций обозначим через PFP.

Определение 11. *Функция $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной финитно-параллельной функцией, если $f \in CPL$ и $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n, \exists N \in \mathbb{R}$ такое, что $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b}) + f(\overline{a} \cdot (-t) + \overline{b}) = const$, для $t > N$. Множество всех непрерывных финитно-параллельных функций обозначим через CFP. [4]*

Класс PFP *согласованных финитно-параллельных* функций замкнут по операциям суперпозиции, и верно следующее вложение $CFP \subset PFP$.

Следующая теорема говорит что класс *согласованных финитно-параллельных* функций 2-предполный в классе согласованных функций.

Пусть $M \subset P$ и $M \not\subset PFP$, тогда верна следующая теорема.

Теорема 2. $P^{(2)} \subset [M \cup PFP]$.

Доказательство.

Из предыдущей теоремы следует, что если мы получим все двухместные *кусочно-линейные непрерывные* функции и функцию $F_N(x, y), N \in \mathbb{R}$, то мы докажем 2-предполноту класса PFP. Функция $F_N(x, y), N \in \mathbb{R}$ имеется так, как она принадлежит классу *согласованных финитно-параллельных* функций. Рассмотрим функцию $f \notin PFP$. Данная функция не содержится в классе PFP *согласованных финитно-параллельных* функций, а следовательно не содержится в классе CFP *непрерывных финитно-параллельных* функций. Из работы [4] следует, что из функции f и множества L *линейных* функций можно получить все двухместные *кусочно-линейные непрерывные* функции. Т.е. мы доказали 2-предполноту класса PFP. **Теорема доказана.**

Теорема 3. *Класс P согласованных функций содержит только два 2-предполных класса: класс PFP согласованных финитно-параллельных функций и класс CPL непрерывных кусочно-линейных функций.*

Доказательство.

Пусть у нас имеются функции $f_1 \notin PFP$ и $f_2 \notin CPL$. Докажем что $P^{(2)} \subset [f_1 \cup f_2 \cup L]$. Из теорем 1 и 2 следует что $P^{(2)} \subset [f_1 \cup f_2 \cup L]$ если

$(\Theta(x) \cup CPL) \subset [f_1 \cup f_2 \cup L]$. Из функции $f_1 \notin PFP$, функции $f_2 \notin CPL$ и L линейных функций, можно получить $\Theta(x)$ (теорема 1). Все двухместные кусочно-линейные непрерывные функции можно получить из функции $f_1 \notin CFP \subset PFP$ и L линейных функций (теорема 2). **Теорема доказана.**

4. Заключение.

В данной статье мы рассмотрели полноту согласованных функций и только в двумерном случай. Дальнейшей задачей станет обобщения доказательства на n-мерный случай. А также расширение решетки замкнутых классов кусочно-линейных функций.

Автор выражает искреннюю признательность А. А. Часовских за постановку задачи, обсуждение результатов, советы и замечания.

Список литературы

[1] В. С. Половников, *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Москва, 2007.

[2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 pp.

[3] А. Н. Кан, “Вопросы выразимости в классе нейронных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:1 (2015), 15–21

[4] А. Н. Кан, “Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 46–56

Questions of expressibility in the class of matched functions

Kan A. N.

In this paper we consider the 2-completeness in the class of matched functions P. This class was considered earlier in [3, 4]. It is precomplete in the class PL of piecewise-linear functions. There are two precomplete classes: the class of continuous fucnton, the class of matched finite function.

Key words: Class of piecewise-linear functions, the class of piecewise-linear continuous functions, the class of matched functions, class of finite functions, the class of mathced finite function, 2-precompleteness, the Heaviside function.